MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT.

UNIVERSITY OF HAWAI
LIBRARY

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG
VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN
VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

24. BAND

QA1
M88
v.24

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1926

5456-42

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

24. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1926

66 53060

QA1
M88
v.24

Inhaltsverzeichnis

Seite

Bergmann, St., Zur Theorie der ein- und mehrwertigen harmonischen Funktionen des dreidimensionalen Raumes 641
Bernstein, S., Sur les courbes de distribution des probabilités 199
Blaschke, W., Eine Kennzeichnung der Kreise auf der Kugel 191
Blaschke, W., Über die Geometrie von Laguerre. IV. Von den Nabelpunkten einer Eifläche 617
Blaschke, W., Über die Geometrie von Laguerre. V. Kugelsysteme Ribaucours . 622
Bompiani, E., Corrispondenza fra una superficie e le sue parallele 311
Doetsch, G., Bemerkung zu der Arbeit von V. Fock: Über eine Klasse von Integralgleichungen. (Math. Zeitschr. 21 (1924), S. 161—173) 785
Dörge, K., Ein Beitrag zur Theorie der diophantischen Gleichungen mit zwei Unbekannten 193
Enskog, D., Eine allgemeine Methode zur Auflösung von linearen Integralgleichungen 670
Fejér, L., Über die Summabilität der Laplaceschen Reihe durch arithmetische Mittel 267
Fejér, L., Abschätzungen für die Legendreschen und verwandte Polynome . . . 285
Fujiwara, M., Über die algebraischen Gleichungen, deren Wurzeln in einem Kreise oder in einer Halbebene liegen 161
Furtwängler, Ph., Über die linearen Mannigfaltigkeiten auf Hyperflächen zweiter Ordnung 396
Günther, N. M., Über ein Hauptproblem der Hydrodynamik 448
Hasse, H., Ein weiteres Existenztheorem in der Theorie der algebraischen Zahlkörper 149
Haupt, O. und E. Hilb, Über Liouvillesche Mannigfaltigkeiten 105
Hurewicz, W., Über eine Verallgemeinerung des Borelschen Theorems 401
Jarník, V., Über die Gitterpunkte auf konvexen Kurven 500
Jarník, V., Über bedingt konvergente Reihen 715
Khintchine, A., Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen . 706
Kloosterman, H. D., Über Gitterpunkte in vierdimensionalen Ellipsoiden . . . 519
Knopp, K., und I. Schur, Elementarer Beweis einiger asymptotischer Formeln der additiven Zahlentheorie 559
Koschmieder, L., Invarianten bei der Variation vielfacher Integrale 181
Kähler, E., Transformation der Differentialgleichungen des Dreikörperproblems . 743
Landau, E., Nachtrag zu meinen Bemerkungen zu der Arbeit des Herrn Walfisz: „Über das Piltzsche Teilerproblem in algebraischen Zahlkörpern" [Bd. 22 (1925), S. 189—205] 192
Landau, E., Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. Zweite Abhandlung 299
Müller, W., Zur Geometrie des binären Formennetzes fünfter Ordnung 131

Nagell, Tr., Über einige kubische Gleichungen mit zwei Unbestimmten 422
Neder, L., Über Funktionen von reellen Argumenten. (Erste Mitteilung) 759
Ostrowski, A., Über Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen Satzes 215
Perron, O., Über geodätische rhombische Netze auf krummen Flächen 170
Perron, O., Nachtrag zu meiner Arbeit: Über geodätische rhombische Netze auf krummen Flächen 792
Pollaczek-Geiringer, H., Beitrag zu den Fundamentalsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung 684
Radó, T., Über den analytischen Charakter der Minimalflächen 321
Scherrer, W., Über ungeschlossene stetige Kurven 125
Schur, A., Über Lichtgrenztangentensysteme und mit ihnen zusammenhängende Flächentransformationen 530
Sengenhorst, P., Über Körper der Charakteristik p 1
Threlfall, W., Bedingt konvergente Reihen 212
Walsh, J. L., Note on the location of the roots of a polynomial 733
Weyl, H., Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen. II. 328
Weyl, H., Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen. III. 377
Weyl, H., Nachtrag zu der Arbeit: Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen. III. (Bd. 24, S. 377—395) 789
Wiener, N., On the representation of functions by trigonometrical integrals . . 575
Wintner, A., Zur Hillschen Theorie der Variation des Mondes 259
Wintner, A., Ein Satz über unendliche Systeme von linearen Gleichungen . . . 266
Zygmund, A., Contribution à l'unicité du développement trigonométrique . . . 40
Zygmund, A., Sur la théorie riemannienne des séries trigonométriques 47
Berichtigung 640

Über Körper der Charakteristik p.

Von

P. Sengenhorst in Charlottenburg.

§ 1.

Vorbemerkungen.

In der vorliegenden Arbeit wird die arithmetische Theorie gewisser Körper der Charakteristik p entwickelt. Dabei sagen wir nach Steinitz (**2**, § 4)[1]) von einem Körper K, daß er die Charakteristik p hat (p ist eine positive Primzahl), wenn das p-fache jedes Elements von K gleich dem Nullelement ist. Das einfachste Beispiel solcher Körper bilden die endlichen Körper. Sei $F(q)$ ein endlicher Körper von q Elementen ($q > 1$). Dann gilt $q = p^\nu$, wo p eine positive Primzahl, $\nu \geqq 1$ ist, und $F(q)$ ist von der Charakteristik p. Adjungiert man nun zu $F(q)$ eine in bezug auf $F(q)$ transzendente Größe t, d. h. betrachtet man den Körper Ω aller rationalen Funktionen von t mit Koeffizienten in $F(q)$, und bezeichnet man als *ganze* Größen von Ω die *Polynome* in der Variablen t mit Koeffizienten in $F(q)$, so kann man eine arithmetische Theorie des Körpers Ω entwickeln, die große Analogie zeigt zur Theorie des Körpers der rationalen Zahlen. Adjungiert man ferner zu Ω eine in bezug auf Ω algebraische Größe ϑ, so erhält man in dem so entstehenden Körper $\Omega(\vartheta)$ ein Analogon zu den gewöhnlichen algebraischen Zahlenkörpern.

Die folgende Arbeit gibt eine Idealtheorie und eine Theorie der Einheiten für den so definierten Körper $\Omega(\vartheta)$. Für den Fall, daß ϑ in bezug auf Ω vom zweiten Grade und daß $\nu = 1$, also $q = p$ ist, liegt die Theorie bereits vor in einer Arbeit von Herrn Artin (**6**), die darüber hinaus auch die analytische Theorie bringt. Ferner sind einige Ergebnisse dieser Arbeit für spezielle Fälle von Herrn Kühne (**12**) entwickelt worden.

[1]) Die eingeklammerten fettgedruckten Zahlen beziehen sich auf das am Schluß der Arbeit befindliche Literaturverzeichnis.

Zur Anwendung gelangen in der vorliegenden Arbeit außer den Schlußweisen der klassischen Zahlen- und Idealtheorie vor allem die Resultate der algebraischen Theorie der abstrakten Körper von Herrn Steinitz (2) und die Methoden, die Herr Hensel bei der Behandlung der p-adischen Zahlen entwickelt hat (8). Die Darstellung wird wesentlich vereinfacht durch Verwendung der Begriffe der von Herrn Kürschák (3) begründeten Bewertungstheorie.

§ 2.

Polynome in einem Körper.

Wir setzen den Begriff des *abstrakten Körpers* als bekannt voraus (vgl. etwa 2, S. 172f. und 10). Wir verwenden unbedenklich auch im abstrakten Körper die Ausdrücke Addition, Multiplikation usw. und die Operationszeichen $+$, $\cdot$ usw. Dagegen wollen wir das *Nullelement* in dem jeweils betrachteten abstrakten Körper zum Unterschied von der *Zahl* 0 stets mit z, entsprechend das *Einheitselement* stets mit u bezeichnen. Ist a ein Element eines Körpers K, so kann man, wenn n eine ganze Zahl ist, in üblicher Weise das „*ganzzahlige Vielfache*“ $n \cdot a$ und — zunächst im Falle $a \neq z$ — die *Potenz* a^n definieren. Für $n > 0$ setzen wir $z^n = z$, ferner sei $z^0 = u$; wenn $n < 0$ ist, wird z^n nicht definiert.

Unter einem *Polynom* im Körper K verstehen wir einen Ausdruck der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0,$$

wo $n \geqq 0$ ist, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ Elemente von K sind und x ein Symbol ist. Zwei Polynome heißen gleich, wenn die einander entsprechenden Koeffizienten gleich sind. Das Polynom, dessen sämtliche Koeffizienten gleich z sind, nennen wir das *Nullpolynom*; wir bezeichnen es, wenn Verwechslungen mit dem *Nullelement* nicht zu befürchten sind, einfach mit z. Der *Grad* eines Polynoms wird in üblicher Weise definiert. Als Grad des Nullpolynoms wählen wir nicht 0, sondern — was einige Vorzüge hat — das Symbol $(-\infty)$. Es soll gelten, wenn n eine (endliche) ganze Zahl ist,

$$-\infty = -\infty; \qquad -\infty < n;$$
$$-\infty + n = -\infty; \quad -\infty + (-\infty) = -\infty.$$

Wir wollen den Grad des Polynoms $f(x)$ mit $\{f(x)\}$ bezeichnen. Summe und Produkt von Polynomen lassen sich in der üblichen Weise definieren. Es gilt dann, wenn f und g zwei Polynome sind,

$$\{f \cdot g\} = \{f\} + \{g\}.$$

Zwei von z verschiedene Polynome f und g im Körper K heißen *assoziiert*, wenn $f = a \cdot g$ ist, wo a ein (eo ipso von z verschiedenes) Element von K

ist. Ein von z verschiedenes Polynom heißt *primär*[2]), wenn die höchste wirklich auftretende Potenz von x als Koeffizienten das Einheitselement u hat.

Man kann nun, wie üblich, die *Teilbarkeitstheorie* der Polynome entwickeln. Die Polynome des Grades 0 spielen die Rolle der *Einheiten*. Ein Polynom P, das von z und von den Einheiten verschieden ist, heißt *Primpolynom*, wenn es nur durch die zu ihm assoziierten Polynome und durch die Einheiten teilbar ist. Es gilt der

Satz. *Jedes von z und von den Einheiten verschiedene Polynom f läßt sich auf eine und nur eine Weise in der Form*

$$f = a \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_n \qquad (n \geqq 1)$$

darstellen, wo a eine Einheit ist und $P_1, P_2, \ldots, P_n$ primäre Primpolynome sind.

Auch die Definition von Polynomen in mehreren „Variablen" $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (die wieder als bloße Symbole aufzufassen sind) bereitet keine Schwierigkeiten. Wir definieren insbesondere in üblicher Weise (für $n \geqq 1$) die *elementarsymmetrischen Polynome* in den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$c_1 = x_1 + \ldots + x_n; \qquad c_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n, \ldots,$$
$$c_n = x_1 \cdot x_2 \ldots x_n.$$

Dann besagt der

Hauptsatz von den symmetrischen Polynomen. *$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sei ein symmetrisches Polynom der Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Die Koeffizienten $A, B, C, \ldots$ seien Elemente von K oder allgemeiner Polynome in irgendwelchen anderen Variablen $v_1, v_2, \ldots, v_k$ (mit Koeffizienten in K). Dann kann man $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ darstellen als ganze rationale Funktion in den elementarsymmetrischen Polynomen $c_1, c_2, \ldots, c_n$, wobei als Koeffizienten nur ganzzahlige Vielfache von $A, B, C, \ldots$ auftreten.*

§ 3.

Die Körper Ω und Ω'.

Zu einer wichtigen Einteilung der Körper gelangt man, wenn man die ganzzahligen Vielfachen des Einheitselements u betrachtet. Entweder diese Vielfachen sind alle voneinander verschieden — dann enthält der Körper einen Unterkörper, der zum Körper der rationalen Zahlen isomorph ist — oder es gibt zwei ganze Zahlen m und n, derart, daß $m < n$ und $mu = nu$ ist. Im letzteren Fall gibt es eine Primzahl p, derart, daß

[2]) Herr Hensel (8, S. 64) verbindet mit diesem Ausdruck eine andere Bedeutung.

für ein beliebiges Element a des Körpers, das von z verschieden ist, das ganzzahlige Vielfache $k \cdot a$ von a dann und nur dann gleich z ist, wenn k durch p teilbar ist. Der Körper heißt dann nach Steinitz (2, § 4) *„von der Charakteristik p"*. Er enthält dann einen (genau die ganzzahligen Vielfachen von u umfassenden) Unterkörper, der zum Körper der Restklassen mod p isomorph ist.

Das einfachste Beispiel von Körpern mit Primzahlcharakteristik bieten die *endlichen Körper* (vgl. 7, Kap. I—III; 2, § 4; § 15). Sei $F(q)$ ein endlicher Körper mit q Elementen; dann nennen wir q die *Ordnung* von $F(q)$. Es gibt dann stets eine Primzahl p und eine positive ganze Zahl ν, derart, daß $q = p^\nu$ ist; ferner hat dann $F(q)$ die Charakteristik p. Ist umgekehrt die Primzahl p und die positive ganze Zahl ν gegeben und setzt man $q = p^\nu$, so gibt es einen endlichen Körper der Ordnung q. Schließlich sind alle endlichen Körper der gleichen Ordnung zueinander isomorph.

Wir legen nun für alles Folgende einen festen endlichen Körper $F(q)$ der Ordnung $q = p^\nu$ zugrunde. Dann betrachten wir (vgl. 6, § 2) Ausdrücke von folgender Form:

$$R(t) = \sum_{-\infty}^{n} a_k t^k = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + a_{n-2} t^{n-2} + \ldots;$$

dabei ist n eine ganze Zahl, die auch negativ oder gleich 0 sein darf; t ist ein Symbol; $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots$ sind Elemente von $F(q)$; k durchläuft alle ganzen Zahlen, die nicht größer als n sind, wird aber nicht etwa gleich dem (in § 2 eingeführten) Symbol $-\infty$. Wir wollen einen Ausdruck der gekennzeichneten Art kurz eine *Reihe* nennen. Zwei Reihen werden als gleich bezeichnet, wenn die einander entsprechenden Koeffizienten gleich sind. Addiert, bzw. subtrahiert werden Reihen, indem man die entsprechenden Koeffizienten addiert, bzw. subtrahiert. Auch die Multiplikation von Reihen läßt sich in naheliegender Weise definieren: Sei

$$R(t) = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \ldots,$$
$$S(t) = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \ldots.$$

Dann setzen wir

$$R(t) \cdot S(t) = c_{m+n} t^{m+n} + c_{m+n-1} t^{m+n-1} + \ldots,$$

wo

$$c_k = \sum_{l+r=k} a_l b_r$$

ist. Diese Definitionen sind von der Schreibweise der betreffenden Reihen (d. h. von der Hinzufügung höherer Potenzen von t mit dem Koeffizienten z) unabhängig. Sei wieder

$$R(t) = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \ldots$$

eine Reihe und sei insbesondere $a_m \neq z$; dann heißt m der *Grad* der Reihe. Der „*Nullreihe*", deren sämtliche Koeffizienten gleich z sind und die wir, wenn Mißverständnisse nicht zu befürchten sind, kurz mit z bezeichnen, geben wir den Grad $-\infty$.

In dem Falle, daß die Reihen insbesondere Polynome sind, befinden wir uns im Einklang mit der in § 2 erwähnten Definition des Grades. Wir wollen den Grad der Reihe R mit $\{R\}$ bezeichnen. Es gilt

$$\{R \cdot S\} = \{R\} + \{S\}.$$

Ferner gilt

$$\{R \pm S\} \leqq \mathrm{Max}(\{R\}, \{S\}).$$

Ist $\{R\} \neq \{S\}$, so gilt

$$\{R \pm S\} = \mathrm{Max}(\{R\}, \{S\}).$$

Wir führen noch den „*Betrag*" $|R|$ der Reihe R ein. Ist $R \neq z$, so setzen wir $|R| = q^{\{R\}}$; ist $R = z$, so setzen wir $|R| = 0$. Es gilt

$$|R \cdot S| = |R| \cdot |S|, \qquad |R \pm S| \leqq \mathrm{Max}(|R|, |S|).$$

Ist $|R| \neq |S|$, so gilt

$$|R \pm S| = \mathrm{Max}(|R|, |S|).$$

Sei nun $R_1, R_2, \ldots$ eine *Folge von Reihen*. Sie heißt *konvergent*, wenn es eine Reihe R gibt, derart, daß $\lim\limits_{k=\infty} |R_k - R| = 0$ ist (vgl. 3, S. 222). Wir schreiben dann

$$\lim_{k=\infty} R_k = R \quad \text{oder} \quad R_k \to R.$$

Aus $R_k \to R$, $S_k \to S$ folgt offensichtlich

$$(R_k \pm S_k) \to (R \pm S),$$

denn

$$|(R_k \pm S_k) - (R \pm S)| = |(R_k - R) \pm (S_k - S)|$$
$$\leqq \mathrm{Max}(|R_k - R|, |S_k - S|) \to 0.$$

Wenn also $R_k \to R$ und gleichzeitig $R_k \to S$ gilt, so folgt

$$(R_k - R_k) \to (R - S),$$

also

$$|(R_k - R_k) - (R - S)| \to 0,$$

also $|R - S| = 0$, $R - S = z$, $R = S$, d. h. der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

Jetzt zeigt man in üblicher Weise: Aus $R_k \to R$ folgt für eine beliebige Reihe K

$$K \cdot R_k \to K \cdot R.$$

Gilt ferner $R_k \to R$, $S_k \to S$, so folgt

$$R_k \cdot S_k \to R \cdot S.$$

Denn es ist $R_k = R + \varepsilon_k$, wo $|\varepsilon_k| \to 0$. Also gilt

$$|R_k| \leqq \text{Max}\,(|R|, |\varepsilon_k|) \leqq |R| + |\varepsilon_k|.$$

Also gibt es ein von k unabhängiges positives c, derart, daß $|R_k| < c$ ist. Dann wird

$$R_k S_k - RS = R_k(S_k - S) + S(R_k - R),$$

also

$$\begin{aligned} |R_k S_k - RS| &\leqq \text{Max}(|R_k| \cdot |S_k - S|, |S| \cdot |R_k - R|) \\ &\leqq \text{Max}(c \cdot |S_k - S|, |S| \cdot |R_k - R|) \to 0. \end{aligned}$$

Nunmehr beweisen wir den grundlegenden

Satz. *Seien R und S zwei Reihen; sei $S \neq z$. Dann gibt es eine Reihe Q, derart, daß $R = Q \cdot S$ ist.*

Beweis. Sei

$$\begin{aligned} R &= a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \ldots, \\ S &= b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \ldots; \end{aligned}$$

sei ferner $b_n \neq z$.

Wir definieren eine Folge von Elementen $c_0, c_1, c_2, \ldots$, bilden (für $h = 0, 1, 2, \ldots$) die Reihen

$$Q_h = c_0 t^{m-n} + c_1 t^{m-n-1} + \ldots + c_h t^{m-n-h}$$

(Q_{h+1} unterscheidet sich also von Q_h nur durch das hinzutretende Glied $c_{h+1} t^{m-n-h-1}$) und beweisen zunächst, daß

$$\{R - Q_h \cdot S\} < m - h, \quad \text{d. h.} \quad |R - Q_h \cdot S| < q^{m-h}$$

ist. Wir setzen $c_0 = \frac{a_m}{b_n}$. Dann wird $\{R - Q_0 \cdot S\} < m$.

Es seien bereits für ein festes h ($h \geqq 0$) die Elemente $c_0, c_1, \ldots, c_h$ definiert und sei bewiesen, daß $\{R - Q_h \cdot S\} < m - h$, d. h.

$$R - Q_h \cdot S = d^{(h)}_{m-h-1} t^{m-h-1} + d^{(h)}_{m-h-2} t^{m-h-2} + \ldots$$

ist. Wenn wir dann

$$c_{h+1} = \frac{d^{(h)}_{m-h-1}}{b_n}$$

setzen, so wird

$$R - Q_{h+1} \cdot S = (R - Q_h \cdot S) - c_{h+1} t^{m-n-h-1} \cdot S = d^{(h+1)}_{m-h-2} t^{m-h-2} + \ldots.$$

Die Behauptung

$$\{R - Q_h \cdot S\} < m - h$$

gilt also in der Tat für alle h ($h \geqq 0$). Nun setzen wir

$$Q = c_0 t^{m-n} + c_1 t^{m-n-1} + \ldots + c_k t^{m-n-k} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{m-n-k}.$$

Dann gilt für $h \geqq 0$

$$\{Q_h - Q\} < m - n - h, \quad |Q_h - Q| < q^{m-n-h}.$$

Also folgt $Q_h \to Q$. Ferner ergibt sich, wenn wir $Q = Q_h + R_h$ setzen, $|R_h| < q^{m-n-h}$, also

$$|R - Q\,S| = |(R - Q_h \cdot S) - R_h \cdot S| \leqq \text{Max}\,(|R - Q_h \cdot S|, |R_h \cdot S|)$$
$$\leqq \text{Max}\,(q^{m-h}, q^{m-n-h} \cdot q^n) = q^{m-h}.$$

Da dies für jedes nicht negative ganze h gilt, so ist $|R - Q\,S| = 0$, $R = Q \cdot S$, womit der Beweis geführt ist.

Das assoziative und das kommutative Gesetz für Addition und Multiplikation von Reihen sind leicht zu erweisen, ebenso das distributive Gesetz (von dem wir schon Gebrauch gemacht haben). Aus der Beziehung

$$|R \cdot S| = |R| \cdot |S|$$

folgt ferner leicht, daß ein Produkt von zwei Reihen nur dann gleich z ist, wenn mindestens ein Faktor gleich z ist. Nunmehr ergibt sich: Wenn $R = Q \cdot S$, $R = Q_1 \cdot S$ und $S \neq z$ ist, so ist $Q = Q_1$. Man erkennt also, da zwei Reihen auch eine eindeutig bestimmte Differenz haben, daß die Gesamtheit der Reihen einen *Körper* (2, S. 172 f.) darstellt, *den wir stets mit Ω' bezeichnen werden.*

Wir nennen eine Reihe insbesondere *rational*, wenn sie gleich dem Quotienten von zwei Polynomen ist. Die Gesamtheit der rationalen Reihen bildet ihrerseits offensichtlich einen *Teilkörper von Ω', den wir mit Ω bezeichnen werden.* Führt man für die Reihe

$$a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \ldots + a_0 + a_{-1} t^{-1} + a_{-2} t^{-2} + \ldots$$

das bequeme Symbol $a_m\, a_{m-1} \ldots a_0,\ a_{-1}\, a_{-2} \ldots$ ein, so erkennt man leicht, daß die periodischen Reihen und nur sie rational sind. Da nun $F(q)$ mindestens die beiden (voneinander verschiedenen) Elemente z und u enthält, so kann man nicht-periodische Reihen bilden, so daß Ω ein *echter* Teilkörper von Ω' ist. Übrigens ist die Menge aller Polynome in $F(q)$, also auch Ω, die Gesamtheit der rationalen Reihen, abzählbar, während Ω' die (höhere) Mächtigkeit des Kontinuums besitzt.

Der Körper Ω' ist *perfekt* im Sinne von Herrn Kürschák (3, S. 228). In der Tat gilt der

Satz. *Dann und nur dann ist die Folge* $R_1, R_2, \ldots$ *konvergent, wenn es zu jedem positiven* ε *ein ganzes positives* m *gibt, derart, daß für* $k \geqq m$, $h \geqq 0$ *die Beziehung*

$$|R_{k+h} - R_k| < \varepsilon$$

gilt.

Beweis. Daß die Bedingung notwendig ist, ist ganz evident. Wir zeigen, daß sie hinreichend ist. Sei also die Bedingung erfüllt. Wir setzen — für jedes positive ganze l —

$$\varepsilon_l = q^{-l}.$$

Der zugehörige Wert von m sei m_l. Wir dürfen

$$m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$$

annehmen. Dann gilt für $k \geqq m_l$, $k' \geqq m_l$ die Beziehung:

$$|R_k - R_{k'}| < q^{-l},$$

d. h. für $k \geqq m_l$ stimmen alle R_k bis hinab zur $(-l)$-ten Potenz von t (diese eingeschlossen) überein. Wir betrachten insbesondere die Reihen $R_{m_1}, R_{m_2}, \ldots$. R_{m_1} möge etwa so beginnen:

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_0 + a_{-1} t^{-1}.$$

Dann beginnt R_{m_2} mit eben diesen Gliedern; das nächste Glied in R_{m_2} sei $a_{-2} t^{-2}$. Dann beginnt auch R_{m_3} mit den Gliedern

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_0 + a_{-1} t^{-1} + a_{-2} t^{-2}.$$

Das nächste Glied in R_{m_3} sei $a_{-3} t^{-3}$ usw. Wir setzen nun

$$R = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_0 + a_{-1} t^{-1} + a_{-2} t^{-2} + \ldots .$$

Dann zeigen wir

$$R_k \to R.$$

Denn für $k \geqq m_l$ ist

$$|R_k - R_{m_l}| < q^{-l}, \quad |R_{m_l} - R| < q^{-l},$$

also

$$|R_k - R| < q^{-l}.$$

Wir wollen zum Schluß dieses Paragraphen im Anschluß an die von Herrn Steinitz (2, § 12) entwickelte allgemeine Theorie der Wurzelkörper die Körper Ω^{p^e} und Ω'^{p^e} (für jedes ganzzahlige e) einführen. In jedem Körper der Charakteristik p folgt aus

$$a^{p^e} = b^{p^e} \quad \text{und} \quad e \geqq 0$$

bekanntlich $a = b$. Also hat die Gleichung

$$x^{p^e} - t = z \qquad (e > 0$$

in einem geeignet gewählten Erweiterungskörper L von Ω', in welchem ihre linke Seite $x^{p^e} - t$ in Linearfaktoren zerfällt (**2**, § 8), nur *eine*, p^e-fach zu zählende Lösung, die wir mit $t^{p^{-e}}$ oder einfacher mit t_{-e} bezeichnen wollen. Das Element t_{-e} gehört (für $e > 0$) nicht zu Ω'. Denn wäre t_{-e} eine Reihe, so würde wegen $t_{-e} \neq z$ folgen:

$$\{t_{-e}\} = n, \quad |t_{-e}| = q^n, \quad \text{also} \quad |t| = q^{p^e \cdot n},$$

was wegen $|t| = q$ unmöglich ist.

Wir bemerken noch, daß das Polynom der Variablen x

$$x^{p^e} - t \qquad (e > 0)$$

in Ω' (also auch in Ω) irreduzibel ist. Denn gäbe es eine Zerlegung, so hätte jeder irreduzible Faktor die Form (vgl. **2**, S. 219)

$$(x - t_{-e})^{p^r} = x^{p^r} - t_{-e}^{p^r} = x^{p^r} - \varepsilon,$$

wo $0 \leqq r < e$ und ε ein Element von Ω' wäre. Es ergäbe sich

$$(x^{p^r} - \varepsilon)^{p^{e-r}} = x^{p^e} - \varepsilon^{p^{e-r}} = x^{p^e} - t,$$

also, wenn wir $e - r = f$ setzen,

$$\varepsilon^{p^f} = t,$$

$f > 0$, ε eine Reihe, was, wie oben gezeigt, unmöglich ist. Demnach hat t_{-e} für $e > 0$ in bezug auf Ω' sowohl als in bezug auf Ω den genauen Grad p^e.

Wir setzen ferner $t_0 = t$ und für $e > 0$

$$t_e = t^{p^e}.$$

Damit ist t_e für alle ganzzahligen e definiert. Nur im Falle $e \geqq 0$ gehört t_e zu Ω und Ω'; im Falle $e < 0$ hat t_e in bezug auf Ω und Ω' den Grad p^{-e}.

Sei eine Reihe

$$R = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \ldots$$

gegeben. Wir setzen für $h > 0$

$$R_h = a_m t^m + \ldots + a_0 + a_{-1} t^{-1} + \ldots + a_{-h} t^{-h},$$

so daß $R_h \to R$ gilt. Dann ergibt sich für $e > 0$

$$R_h^{p^e} = a_m^{p^e} t_e^m + \ldots + a_0^{p^e} + a_{-1}^{p^e} t_e^{-1} + \ldots + a_{-h}^{p^e} t_e^{-h},$$

also folgt

$$R^{p^e} = (\lim_{h=\infty} R_h)^{p^e} = \lim_{h=\infty} (R_h^{p^e}) = a_m^{p^e} t_e^m + a_{m-1}^{p^e} t_e^{m-1} + \ldots .$$

R^{p^e} wird also eine Reihe in der Variablen t_e mit Koeffizienten in $F(q)$. Sei umgekehrt

$$S = b_m t_e^m + b_{m-1} t_e^{m-1} + \ldots$$

eine Reihe in der Variablen t_e $(e > 0)$ mit Koeffizienten in $F(q)$ Jedes Element von $F(q)$ hat seine p-te, also seine p^e-te Wurzel in $F(q)$ (2, S. 225). Es gibt also für $k \leqq m$ in $F(q)$ ein Element a_k, derart, daß $a_k^{p^e} = b_k$ ist. Setzt man dann

$$R = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \ldots,$$

so wird offensichtlich $R^{p^e} = S$.

Bezeichnet man nun die Gesamtheit der Reihen, bzw. der rationalen Reihen, in der Variablen t_e $(e \geqq 0)$ mit Ω'^{p^e} bzw. Ω^{p^e} oder einfacher mit Ω'_e bzw. Ω_e, wobei $\Omega'_0 = \Omega'$, $\Omega_0 = \Omega$ wird, so erkennt man leicht, daß Ω'_e bzw. Ω_e ein Körper ist, der zu Ω' bzw. Ω isomorph ist und der genau die p^e-ten Potenzen der Elemente von Ω' bzw. Ω enthält. Eine isomorphe Beziehung zwischen Ω' und Ω'_e (bzw. Ω und Ω_e) ergibt sich, indem man entweder dem Element

$$R = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \ldots$$

von Ω' (Ω) das Element

$$R^{p^e} = a_m^{p^e} t_e^m + a_{m-1}^{p^e} t_e^{m-1} + \ldots$$

von Ω'_e (Ω_e) zuordnet, oder auch, indem man dem gleichen Element R von Ω' (Ω) das Element

$$a_m t_e^m + a_{m-1} t_e^{m-1} + \ldots$$

zuordnet.

Aber offensichtlich kann man auch im Falle $e < 0$ in derselben Weise $\Omega'_e = \Omega'^{p^e}$ (bzw. $\Omega_e = \Omega^{p^e}$) definieren als Gesamtheit der Reihen (bzw. der rationalen Reihen) in der Variablen

$$t_e = t^{p^e} = \sqrt[p^{-e}]{t}$$

mit Koeffizienten in $F(q)$. Auch die angegebenen Resultate über den Körper Ω'_e (Ω_e) gelten in gleicher Weise für $e < 0$; natürlich ist dann $\sqrt[p^{-e}]{R}$ unter R^{p^e}, $\sqrt[p^{-e}]{a_k}$ unter $a_k^{p^e}$ zu verstehen.

Im Falle $e < 0$ ist der Körper Ω'_e (Ω_e) ein Erweiterungskörper von Ω' (Ω) und hat in bezug auf Ω' (Ω), da er aus diesem offenbar durch Adjunktion von t_e entsteht, den Grad p^{-e}. Daraus ergibt sich leicht unter Benutzung der Isomorphie aller Körper Ω'_e (Ω_e), daß Ω' (Ω) im Falle $e > 0$ in bezug auf seinen Teilkörper Ω'_e (Ω_e) den Grad p^e hat

§ 4.

Polynome in Ω'.

Wir betrachten jetzt Polynome der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0,$$

wo nunmehr $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ nicht Elemente von $F(q)$, sondern von Ω', d. h. Reihen in der Variablen t, sind. Mit $\{f(x)\}$ wollen wir den Grad von $f(x)$ in der Variablen x bezeichnen (vgl. § 2). Ferner setzen wir $|f(x)| = \text{Max}(|a_n|, |a_{n-1}|, \ldots, |a_0|)$.

Ist also $f(x)$ das Nullpolynom, so ist $|f(x)| = 0$; in jedem anderen Fall entwickle man $f(x)$ nach fallenden Potenzen von t; ist m der Grad in t ($m \gtreqless 0$), so ist $|f(x)| = q^m$.

Es gilt

$$|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)|;$$

$$|f(x) \pm g(x)| \leqq \text{Max}(|f(x)|, |g(x)|);$$

wenn $|f(x)| + |g(x)|$ ist, so gilt schärfer

$$|f(x) \pm g(x)| = \text{Max}(|f(x)|, |g(x)|).$$

Sei $f_1(x), f_2(x), \ldots$ eine *Folge von Polynomen.* Wir nennen eine solche Folge *konvergent*, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Es gibt eine — nur von der Folge, nicht von k abhängige — Zahl m, derart, daß für jedes k die Beziehung $\{f_k(x)\} < m$ gilt.
2. Es gibt ein Polynom $f(x)$, derart, daß $\lim_{k=\infty} |f_k(x) - f(x)| = 0$ ist.

Es lassen sich nun wie in § 3 die einfachen Sätze beweisen:

Aus $f_k \to f$, $g_k \to g$ folgt $(f_k \pm g_k) \to (f \pm g)$.
Aus $f_k \to f$, $f_k \to g$ folgt $f = g$.
Aus $f_k \to f$ folgt $k \cdot f_k \to k \cdot f$.
Aus $f_k \to f$, $g_k \to g$ folgt $f_k \cdot g_k \to f \cdot g$.

Ferner gilt wie in § 3

Satz I. *$f_1(x), f_2(x), \ldots$ sei eine Folge von der Beschaffenheit, daß für jedes k die Beziehung $\{f_k\} < n$ erfüllt ist. Die Folge ist dann und nur dann konvergent, wenn es zu jedem positiven ε ein positives ganzes m gibt, derart, daß für $k \geqq m$, $h \geqq 0$ die Beziehung*

$$|f_{k+h} - f_k| < \varepsilon$$

gilt.

Der Beweis verläuft genau wie der entsprechende Beweis in § 3, nur werden die a_h, die dort Elemente von $F(q)$ waren, hier Polynome der Variablen x mit Koeffizienten in $F(q)$. —

Wir wollen — nur für die Beweise dieses Paragraphen — ein Polynom $f(x)$ *„ausgezeichnet“* [3]) nennen, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $|f(x)| = 1$ (also insbesondere $f(x) \neq z$);

2. der Koeffizient der höchsten Potenz von x hat die Form t^k, wo k eine (infolge 1. nicht positive) ganze Zahl ist.

Es sei $h(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ ein Polynom (immer mit Koeffizienten in Ω') und sei $a_n \neq z$. Es sei endlich $\left|\frac{h(x)}{a_n}\right| = q^m$. Dann ist offenbar das Polynom

$$f(x) = \frac{t^{-m}}{a_n} \cdot h(x) = t^{-m} x^n + \ldots$$

ein zu $h(x)$ assoziiertes ausgezeichnetes Polynom. Sind ferner h_1 und h_2 zwei zueinander assoziierte ausgezeichnete Polynome, so folgt $h_1 = c \cdot h_2$ und dabei muß wegen 1. $|c| = 1$ und wegen 2. c eine Potenz von t, also muß $c = t^0 = u$, $h_1 = h_2$ sein. Es gibt also zu jedem von z verschiedenen Polynom ein und nur ein ausgezeichnetes assoziiertes Polynom. —

Seien f und g zwei Polynome in Ω'. Wir schreiben

$$f \equiv g \pmod{t^k} \quad \text{oder kürzer} \quad f \equiv g\,(t^k),$$

wenn $|f - g| \leqq q^k$ ist; k ist eine ganze Zahl.

Aus $f_1 \equiv f_2$, $f_2 \equiv f_3$ folgt $f_1 \equiv f_3\,(t^k)$.

Aus $f_1 \equiv g_1$, $f_2 \equiv g_2$ folgt $f_1 \pm f_2 \equiv g_1 \pm g_2\,(t^k)$.

Aus $f \equiv g\,(t^k)$, $|c| \leqq 1$ folgt $cf \equiv cg\,(t^k)$.

Ferner folgt aus $f_1 \equiv g_1$, $f_2 \equiv g_2\,(t^k)$, wenn noch $|f_2| \leqq 1$, $|g_1| \leqq 1$ ist, daß $f_1 f_2 \equiv g_1 g_2\,(t^k)$ ist. Denn es wird $f_1 f_2 \equiv g_1 f_2 \equiv g_1 g_2\,(t^k)$.

Wir erinnern noch an die Definition der Resultante: Sei

$$f(x) = a_m x^m + \ldots + a_0, \quad g(x) = b_n x^n + \ldots + b_0,$$
$$a_m \neq z, \quad b_n \neq z, \quad m > 0, \quad n > 0.$$

Dann setzen wir

$$R(f,g) = \left|\begin{array}{ccccc} a_m & \ldots & a_0 z & \ldots & z \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z & \ldots & z a_m & \ldots & a_0 \\ b_n & \ldots & b_0 z & \ldots & z \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z & \ldots & z b_n & \ldots & b_0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} n \text{ Zeilen,} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} m \text{ Zeilen.} \end{array}$$

[3]) Herr Hensel (8, S. 64) gebraucht für den entsprechenden Begriff den Ausdruck *„primär“*, der bei uns schon vergeben ist (vgl. § 2).

Satz II. *Sei* $\{f(x)\} = m$, $\{g(x)\} = n$, $m > 0$, $n > 0$, $|f(x)| \leqq 1$, $|g(x)| \leqq 1$, $R(f,g) \neq z$, *etwa* $|R(f,g)| = q^\varrho$. *Sei ferner* $\{F(x)\} < m+n$, $|F(x)| \leqq q^r$. *Dann kann man auf eine und nur eine Weise zwei Polynome* $f_1(x)$ *und* $g_1(x)$ *angeben, derart, daß*

$$fg_1 + gf_1 = F, \quad \{f_1\} < m \quad \text{und} \quad \{g_1\} < n$$

wird. Es wird dann ferner $|f_1| \leqq q^{r-\varrho}$, $|g_1| \leqq q^{r-\varrho}$ (vgl. 8, S. 63).

Beweis. Sei

$$f = a_m x^m + \ldots + a_0, \quad g = b_n x^n + \ldots + b_0 \qquad (a_m \neq z,\ b_n \neq z),$$
$$F = E_{m+n-1} x^{m+n-1} + \ldots + E_0.$$

etzt man dann

$$f_1 = C_{m-1} x^{m-1} + \ldots + C_0, \quad g_1 = D_{n-1} x^{n-1} + \ldots + D_0,$$

o erhält man aus

$$fg_1 + gf_1 = F$$

in System von $m+n$ Gleichungen ersten Grades für $D_{n-1}, \ldots, D_0$, $C_{m-1}, \ldots, C_0$. Die Determinante dieses Gleichungssystems ist gleich $R(f,g) \neq z$, so daß die D_k und C_l auf eine und nur eine Weise bestimmt sind (2, S. 174). Jedes D_k und C_l wird ein Bruch; der Nenner ist $R(f,g)$, sein Betrag q^ϱ. Der Zähler ist homogen linear in den E_i, und war sind die Koeffizienten Unterdeterminanten von $R(f,g)$. Es ist nun $E_i| \leqq q^r$, ferner hat jede der genannten Unterdeterminanten wegen $f| \leqq 1$, $|g| \leqq 1$ höchstens den Betrag 1. Also wird $|C_k| \leqq q^{r-\varrho}$, $D_l| \leqq q^{r-\varrho}$.

Man kann nun die von Herrn Hensel für den Körper der p-adischen Zahlen entwickelten Zerlegungsmethoden (8, Kap. 4) auf den Körper Ω' übertragen; insbesondere läßt sich durch ein endliches Verfahren entscheiden, ob ein Polynom $f(x)$, dessen Koeffizienten zu Ω gehören, in Ω' reduzibel ist; ferner kann man die Koeffizienten der in Ω' irreduziblen Bestandteile als Reihen nach fallenden Potenzen von t beliebig weit entwickeln. An dieser Stelle soll jedoch nur das für den folgenden Aufbau Notwendige abgeleitet werden.

Satz III. *Sei* $F(x) = t^{\alpha+\beta} x^{m+n} + A_{m+n-1} x^{m+n-1} + \ldots + A_0$, $f(x) = t^\alpha x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_0$, $g(x) = t^\beta x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0$, $|f| = |g| = |F| = 1$, $m > 0$, $n > 0$, $R(f,g) \neq z$, *etwa* $|R(f,g)| = q^\varrho$, *sei ferner* r_1 *ganz,* $r_1 \leqq 2\varrho$, *sei endlich* $F \equiv fg(t^{r_1-1})$. *Dann gibt es zwei Polynome* $\bar{f}$ *und* $\bar{g}$, *derart, daß*

$$\{f - \bar{f}\} < m, \quad \{g - \bar{g}\} < n, \quad \bar{f} \equiv f(t^{r_1-\varrho-1}), \quad \bar{g} \equiv g(t^{r_1-\varrho-1}),$$
$$|\bar{f}| = |\bar{g}| = 1, \quad |R(\bar{f}, \bar{g})| = |R(f,g)| = q^\varrho$$

und

$$F \equiv \bar{f}\,\bar{g}\,(t^{r_1-2})$$

gilt (vgl. 8, S. 68).

Beweis. $\{F-fg\} < m+n$, $|F-fg| \leqq q^{r_1-1}$. Sei

$$F - f\cdot g = t^{r_1-1}\cdot\Phi, \quad \text{also} \quad |\Phi| \leqq 1, \quad \{\Phi\} < m+n.$$

Es gibt also nach Satz II [4]) zwei Polynome $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$, derart, daß

$$f\cdot\mathfrak{G} + g\cdot\mathfrak{F} = t^{\varrho}\cdot\Phi, \quad \{\mathfrak{F}\} < m, \quad \{\mathfrak{G}\} < n, \quad |\mathfrak{F}| \leqq 1, \quad |\mathfrak{G}| \leqq 1$$

wird. Sei

$$\varphi = t^{r_1-1-\varrho}\cdot\mathfrak{F}, \quad \chi = t^{r_1-1-\varrho}\cdot\mathfrak{G}.$$

Dann ist

$$|\varphi| \leqq q^{r_1-1-\varrho}, \quad |\chi| \leqq q^{r_1-1-\varrho}, \quad |\varphi\cdot\chi| \leqq q^{2r_1-2-2\varrho} \leqq q^{r_1-2},$$

$$\varphi\cdot\chi \equiv z(t^{r_1-2}), \quad (f+\varphi)(g+\chi) \equiv fg + f\chi + g\varphi\,(t^{r_1-2}),$$

$$F = fg + t^{r_1-1}\cdot\Phi = fg + t^{r_1-1-\varrho}\cdot t^{\varrho}\Phi$$

$$= fg + t^{r_1-1-\varrho}(f\mathfrak{G} + g\mathfrak{F}) = fg + f\chi + g\varphi,$$

also

$$F \equiv (f+\varphi)(g+\chi)\,(t^{r_1-2}).$$

Man setze

$$f+\varphi = \bar{f}, \quad g+\chi = \bar{g}.$$

Dann ist $F \equiv \bar{f}\cdot\bar{g}\,(t^{r_1-2})$, ferner

$$\{f-\bar{f}\} = \{\varphi\} = \{\mathfrak{F}\} < m, \quad \text{ebenso} \quad \{g-\bar{g}\} < n,$$

$$|f-\bar{f}| = |\varphi| \leqq q^{r_1-\varrho-1}, \quad \text{ebenso} \quad |g-\bar{g}| \leqq q^{r_1-\varrho-1}.$$

Ferner ist $\varrho \leqq 0$, also

$$r_1 - \varrho - 1 \leqq 2\varrho - \varrho - 1 = \varrho - 1 < 0, \quad |\varphi| \leqq q^{r_1-\varrho-1} < 1, \quad |f| = 1$$

also

$$|\bar{f}| = |f+\varphi| = 1, \quad \text{ebenso} \quad |\bar{g}| = 1.$$

Endlich folgt aus $\bar{f} \equiv f(t^{r_1-\varrho-1})$, daß $\bar{f} \equiv f(t^{\varrho-1})$, ebenso $\bar{g} \equiv g\,(t^{\varrho-1})$, also wegen $|f| = |g| = |\bar{f}| = |\bar{g}| = 1$, daß

$$R(\bar{f},\bar{g}) \equiv R(f,g)(t^{\varrho-1}), \quad |R(\bar{f},\bar{g})| = q^{\varrho}$$

ist.

Satz IV. *Sei*

$$F = t^{\alpha+\beta}x^{m+n} + A_{m+n-1}x^{m+n-1} + \ldots + A_0,$$

$$f_0 = t^{\alpha}x^{m} + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_0, \quad g_0 = t^{\beta}x^{n} + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0,$$

$$|f_0| = |g_0| = |F| = 1, \quad m > 0, \quad n > 0, \quad R(f_0, g_0) + z,$$

[4]) Dem dortigen F entspricht hier $t^{\varrho}\cdot\Phi$, dem dortigen r sowohl wie dem dortige ϱ entspricht hier ϱ.

etwa $|R(f_0, g_0| = q^\varrho$, *sei ferner* r *ganz,* $r \leqq 2\varrho$, *sei endlich*

$$F \equiv f_0 g_0 (t^{r-1})$$

(vgl. die Voraussetzungen von Satz III). *Dann gibt es zwei Polynome* H *und* K, *derart, daß*

$$\{H - f_0\} < m, \quad \{K - g_0\} < n, \quad H \equiv f_0(t^{r-\varrho-1}),$$
$$K \equiv g_0(t^{r-\varrho-1}), \quad |H| = |K| = 1$$

und

$$F = H \cdot K$$

ist (vgl. 8, S. 71).

Beweis. Man bestimme gemäß Satz III f_1 und g_1 so, daß

$$\{f_1 - f_0\} < m, \quad \{g_1 - g_0\} < n, \quad f_1 \equiv f_0(t^{r-\varrho-1}), \quad g_1 \equiv g_0(t^{r-\varrho-1}),$$
$$|f_1| = |g_1| = 1, \quad |R(f_1, g_1)| = q^\varrho \quad \text{und} \quad F \equiv f_1 \cdot g_1(t^{r-2})$$

ist. Dann kann man nach dem gleichen Satz f_2 und g_2 bestimmen, derart, daß

$$\{f_2 - f_1\} < m, \quad \{g_2 - g_1\} < n,$$

also auch

$$\{f_2 - f_0\} < m, \quad \{g_2 - g_0\} < n,$$

ferner

$$f_2 \equiv f_1(t^{r-\varrho-2}), \quad g_2 \equiv g_1(t^{r-\varrho-2}), \quad |f_2| = |g_2| = 1,$$
$$|R(f_2, g_2)| = q^\varrho \quad \text{und} \quad F \equiv f_2 g_2 (t^{r-3})$$

ist usw. Offensichtlich sind die beiden Folgen

$$f_1, f_2, \ldots \quad \text{und} \quad g_1, g_2, \ldots$$

nach Satz I konvergent, da $\{f_h\} = m$ und da für $l \geqq 0$

$$|f_{h+l} - f_h| \leqq q^{r-\varrho-h-1}$$

ist (entsprechend für die g_h). Sei $H = \lim_{h=\infty} f_h$, $K = \lim_{h=\infty} g_h$. Dann ist in der Tat

$$\{H - f_0\} < m, \quad \{K - g_0\} < n, \quad H \equiv f_0(t^{r-\varrho-1}), \quad K \equiv g_0(t^{r-\varrho-1});$$

ferner gilt

$$|H - f_0| \leqq q^{r-\varrho-1} \leqq q^{\varrho-1} < 1,$$

also $|H| = 1$, entsprechend $|K| = 1$. Endlich folgt aus

$$f_{h+l} \equiv f_h(t^{r-\varrho-h-1}) \qquad (\text{für } h \geqq 0,\ l \geqq 0)$$

leicht

$$H \equiv f_h(t^{r-\varrho-h-1}), \quad \text{ebenso} \quad K \equiv g_h(t^{r-\varrho-h-1}),$$

also

$$H \cdot K \equiv f_h \cdot g_h(t^{r-\varrho-h-1});$$

da nun

$$F \equiv f_h \cdot g_h(t^{r-h-1}),$$

also wegen $\varrho \leqq 0$ auch $F \equiv f_h \cdot g_h(t^{r-\varrho-h-1})$ ist, so folgt $F \equiv H \cdot K(t^{r-\varrho-h-1})$ für jedes $h \geqq 0$, also $F = H \cdot K$.

Satz V. *Sei das Polynom*

$$F = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_0$$

in Ω' irreduzibel, sei $A_n \neq z$, $n \geqq 2$, $|F| = 1$, $|A_0| < 1$. Dann gilt $\mathrm{Max}(|A_{n-1}|, |A_{n-2}|, \ldots, |A_1|) < 1$ (vgl. 8, S. 74; 3, S. 218).

Beweis. Sei $F_1 = C \cdot F = B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \ldots + B_0$ das zu F assoziierte ausgezeichnete Polynom; dann gilt, da $|F_1| = |F| = 1$ ist, $|C| = 1$, also $|B_k| = |A_k|$. Zu zeigen ist also

$$\mathrm{Max}(|B_{n-1}|, |B_{n-2}|, \ldots, |B_1|) < 1.$$

Wäre dies falsch, so gäbe es unter den Elementen $B_{n-1}, B_{n-2}, \ldots, B_1$ ein Element B_μ mit kleinstem Index, für welches

$$|B_\mu| = 1$$

wäre. Es ergäbe sich

$$F_1 \equiv (B_n x^{n-\mu} + B_{n-1} x^{n-\mu-1} + \ldots + B_\mu) \cdot x^\mu(t^{-1}),$$
$$F_1 \equiv f \cdot g(t^{-1}),$$

wo $f = x^\mu$, $g = B_n x^{n-\mu} + \ldots + B_\mu$ wäre. Nun ist

$$\{f\} = \mu > 0, \quad \{g\} = n - \mu \geqq n - (n-1) = 1 > 0, \quad \{F_1 - fg\} < m$$
$$|f| = 1, \quad |g| = \mathrm{Max}(|B_n|, |B_{n-1}|, \ldots, |B_\mu|)$$
$$\leqq \mathrm{Max}(|B_n|, |B_{n-1}|, \ldots, |B_0|) = |F_1| = 1,$$

ferner $|g| \geqq |B_\mu| = 1$, also $|g| = 1$; ferner sind f und g ausgezeichnet. Endlich ist

$$R(f, g) = R(x^\mu, g) = B_\mu^\mu, \quad \text{also} \quad |R(f, g)| = 1.$$

Man kann also Satz IV anwenden (was dort F, $m+n$, m, n, ϱ und ist, ist hier F_1, n, μ, $n-\mu$, 0 und 0).[5]) Es wäre also F_1 und damit auch F reduzibel, gegen die Annahme.

Satz VI. *Sei das Polynom*

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$$

in Ω' irreduzibel, $n \geqq 2$, $|a_n| = 1$, $|a_0| \leqq q^\alpha$, wo α entweder gleich oder gleich -1 ist. Dann ist

$$\mathrm{Max}(|a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \ldots, |a_1|) \leqq q^\alpha.$$

Beweis. Sei die Behauptung falsch, sei also

$$\mathrm{Max}(|a_{n-1}|, \ldots, |a_1|) = q^\tau \geqq q^{\alpha+1} \geqq 1.$$

---

[5]) Es ist $\alpha = 0$; setzt man $B_n = t^\gamma$, so ist $\alpha + \beta = \beta = \gamma$.

a $|a_0| \leqq 1$, $|a_n| = 1$, so ergäbe sich $|f| = q^r$. Sei $F = t^{-r} f$, wo ebenfalls irreduzibel und $|F| = 1$. Sei etwa $F = A_n x^n + \ldots + A_0$. s würde folgen

$$A_n \neq z, \quad |A_0| = |a_0| \cdot q^{-r} \leqq q^a \cdot q^{-r} \leqq q^a \cdot q^{-a-1} = q^{-1} < 1.$$

atz V würde also liefern

$$\text{ax}(|A_{n-1}|, \ldots, |A_1|) \leqq q^{-1}, \quad \text{Max}(|a_{n-1}|, \ldots, |a_1|) \leqq q^r \cdot q^{-1} = q^{r-1},$$

n Widerspruch mit der Annahme $\text{Max}(|a_{n-1}|, \ldots, |a_1|) = q^r$.

§ 5.

Algebraische Größen.

Ist K_1 ein Körper der Charakteristik p, so kann es vorkommen, daß ne in K_1 irreduzible ganze rationale Funktion $f(x)$ in einem Erweiterungsörper mehrfache Nullstellen besitzt (2, S. 218; vgl. auch § 3 dieser Arbeit). s folgt dann leicht $f(x) | f'(x)$, [6]) also $f'(x) = z$. Sei

$$f(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \ldots + a_0;$$

ann ist also

$$k \cdot a_k = z \qquad (k = 0, 1, \ldots, N);$$

so können in $f(x)$ nur solche Potenzen von x wirklich auftreten, deren xponenten durch p teilbar sind.

Ein *irreduzibles* Polynom $f(x)$ in einem Körper K_1 der Charakristik p heißt nun *vom Exponenten* e ($e \geqq 0$), wenn die Exponenten ller wirklich auftretenden Potenzen von x durch p^e, dagegen nicht ämtlich durch p^{e+1} teilbar sind; auch jede Nullstelle eines solchen $f(x)$ eißt vom Exponenten e. Ein solches $f(x)$ kann dann geschrieben werden der Form

$$f(x) = a_n x^{n \cdot p^e} + a_{n-1} x^{(n-1) \cdot p^e} + \ldots + a_0 \text{ mit } a_n \neq z.$$

ann heißt n der reduzierte Grad von $f(x)$; ist ϑ eine Nullstelle von x) in einem Erweiterungskörper, so heißt n auch der reduzierte Grad n ϑ (in bezug auf K_1). Die Polynome bzw. Elemente vom Exponenten 0 ißen auch „von erster Art“ (vgl. 2, S. 231 f.).

Ein irreduzibles Polynom von erster Art hat, wie aus dem Obigen rvorgeht, nur einfache Nullstellen. Ist ferner der Exponent e des reduziblen $f(x)$ positiv und ist $1 \leqq e_1 \leqq e$, so gilt in $K_1^{p^{-e_1}}$ offenbar e Zerlegung $f(x) = [\varphi_{e_1}(x)]^{p^{e_1}}$, wo φ_{e_1} in $K_1^{p^{-e_1}}$ irreduzibel und vom xponenten $e - e_1$ ist. Jede Nullstelle von $f(x)$ ist also genau p^e-fach.

[6]) $g \mid h$ bedeutet: g ist ein Teiler von h.

Sei nun K_1 insbesondere Ω oder Ω. Habe ϑ in bezug auf K_1 de Exponenten e und den reduzierten Grad n. Dann gilt, wenn wir — i Anschluß an 2, S. 196 und S. 199 — mit $[\vartheta : L]$ den Grad des Elements in bezug auf den Körper L, mit $[\mathfrak{M} : L]$ den Grad des Körpers $\mathfrak{M}$ i bezug auf den Körper L bezeichnen,

$$[\vartheta : K_1^{p^{-e}}] = n, \quad [K_1^{p^{-e}} : K_1] = p^e,$$

also (2, S. 200)

$$[K_1^{p^{-e}}(\vartheta) : K_1] = [K_1^{p^{-e}}(\vartheta) : K_1^{p^{-e}}] \cdot [K_1^{p^{-e}} : K_1]$$
$$= [\vartheta : K_1^{p^{-e}}] \cdot [K_1^{p^{-e}} : K_1] = n \cdot p^e.$$

Da nun auch $[\vartheta : K_1] = n \cdot p^e$ ist, so folgt leicht

$$K_1^{p^{-e}}(\vartheta) = K_1(\vartheta).$$

Wegen

$$[\vartheta : K_1^{p^{-e}}] = n$$

läßt sich jedes Element α von $K_1(\vartheta) = K_1^{p^{-e}}(\vartheta)$ in der Form

$$\alpha = c_0 + c_1 \vartheta + \ldots + c_{n-1} \vartheta^{n-1}$$

schreiben, wo $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ zu $K_1^{p^{-e}}$ gehören. Dann wird

$$\alpha^{p^e} = c_0^{p^e} + c_1^{p^e} \vartheta^{p^e} + \ldots + c_{n-1}^{p^e} \vartheta^{(n-1) \cdot p^e}$$

ein Element von $K_1(\vartheta^{p^e})$. Nun hat ϑ^{p^e} in bezug auf K_1 den Exponenten und den Grad n (2, S. 232). Also hat ein beliebiges Element β v $K_1(\vartheta^{p^e})$ die Form

$$\beta = d_0 + d_1 \vartheta^{p^e} + \ldots + d_{n-1} \vartheta^{(n-1) \cdot p^e},$$

wo $d_0, \ldots, d_{n-1}$ zu K_1 gehören, ist also die p^e-te Potenz eines Elemen von $K_1(\vartheta) = K_1^{p^{-e}}(\vartheta)$. Offensichtlich ist diese Zuordnung isomorph, u es gilt

$$[K_1(\vartheta)]^{p^e} = K_1(\vartheta^{p^e}).$$

Damit ist bewiesen:

Satz I. *K_1 sei entweder Ω oder Ω'; ϑ sei in bezug auf K_1 v Exponenten e und vom reduzierten Grade n. Dann ist $K_1(\vartheta) = K_1^{p^{-e}}($ ferner ist $[K_1(\vartheta)]^{p^e} = K_1(\vartheta^{p^e})$. Man erhält eine isomorphe Beziehu zwischen $K_1(\vartheta)$ und $K_1(\vartheta^{p^e})$, indem man dem Element*

$$\alpha = c_0 + c_1 \vartheta + \ldots + c_{n-1} \vartheta^{n-1}$$

n $K_1(\vartheta) = K_1^{p^{-e}}(\vartheta)$ — *wo* $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ *zu* $K_1^{p^{-e}}$ *gehören — das Element*

$$\alpha^{p^e} = c_0^{p^e} + c_1^{p^e}\vartheta^{p^e} + \ldots + c_{n-1}^{p^e}\vartheta^{(n-1)\cdot p^e} \text{ von } K_1(\vartheta^{p^e})$$

ordnet. ϑ *ist in bezug auf* $K_1^{p^{-e}}$, *ebenso* ϑ^{p^e} *in bezug auf* K_1 *von erster rt und vom Grade* n.

Wir bemerken noch, daß $t_{-e} = t^{p^{-e}}$ zu $K_1(\vartheta) = K_1^{p^{-e}}(\vartheta)$ gehört; dagegen gehört t_{-e-1} nicht zu $K_1(\vartheta)$, da t_{-e-1} in bezug auf K_1 den Exponenten $e+1$ hat (vgl. 2, S. 238).

Sei nun ϑ in bezug auf Ω (also auch in bezug auf Ω') algebraisch; ei e der Exponent in bezug auf Ω, e' in bezug auf Ω'. Dann gehört $_e$ zu $\Omega(\vartheta)$, also a fortiori zu $\Omega'(\vartheta)$, also ist $e \leqq e'$. Sei $g(x)$, bzw. (x) das zu ϑ gehörige primäre irreduzible Polynom in Ω, bzw. Ω'. ann gilt in Ω'

$$\gamma \mid g.$$

Da γ nur $p^{e'}$-fache, g nur p^e-fache Nullstellen hat, so gilt $e' \leqq e$, lso $e' = e$. Es ergibt sich also

Satz II. *Eine in bezug auf* Ω (*also auch in bezug auf* Ω') *algebraische Größe* ϑ *hat in bezug auf* Ω *und* Ω' *den gleichen Exponenten.*

Sei nun ϑ algebraisch in bezug auf Ω'. Das zugehörige primäre reduzible Polynom in Ω' sei

$$g(x) = x^N + a_{N-1}x^{N-1} + \ldots + a_0.$$

ann definieren wir den Betrag von ϑ in folgender Weise:

$$|\vartheta| = |a_0|^{\frac{1}{N}}.$$

iese Definition hat einen Sinn, da $|a_0|$ bereits definiert war. Ferner timmt in dem Fall, daß ϑ zu Ω' gehört, die neue Definition mit der isherigen überein.

Sei nun α ein Element von Ω'^{p^e} $(e \gtreqless 0)$; dann gehört $\alpha^{p^{-e}} = a$ zu Ω'. ir behaupten, daß

$$|\alpha| = |a|^{p^e}$$

t. Das ist trivial im Fall $e \geqq 0$. Sei $e < 0$. Dann genügt α in Ω' der leichung

$$x^{p^{-e}} - a = z.$$

t $g(x)$ das zu α gehörige primäre irreduzible Polynom in Ω', so gilt gl. 2, S. 219)

$$g(x) = x^{p^{e_1}} - a_1, \quad 0 \leqq e_1 \leqq -e,$$

$$x^{p^{-e}} - a = (x^{p^{e_1}} - a_1)^{p^{-e-e_1}}, \quad a = a_1^{p^{-e-e_1}}, \quad |a| = |a_1|^{p^{-e-e_1}},$$

$$|\alpha| = |-a_1|^{p^{-e_1}} = |a_1|^{p^{-e_1}} = |a|^{p^e}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. Man schreibe etwa α, als Elemen von Ω'^{p^e}, in der Form

$$\alpha = c_k t_e^k + c_{k-1} t_e^{k-1} + \ldots + c_0$$

mit Koeffizienten in $F(q)$; ist dann $c_k \neq z$, so folgt nach dem Vorige $|\alpha| = q^{k \cdot p^e}$.

Satz III. *Sei ϑ in bezug auf Ω' algebraisch, vom Exponenten e un vom reduzierten Grade n. Seien $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$, wo wir $\vartheta_1 = \vartheta$ annehme dürfen, die in bezug auf Ω' konjugierten Größen. Sei $\alpha = r(\vartheta)$ ei Element von $\Omega'(\vartheta) = \Omega'^{p^{-e}}(\vartheta)$ (dabei können wir $r(x)$ entweder als Po lynom in $\Omega'^{p^{-e}}$ oder als Polynom in Ω' annehmen); ferner sei*

$$\alpha_i = r(\vartheta_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Dann ist

$$|\alpha| = |(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_n)^{p^e}|^{\frac{1}{n \cdot p^e}} = |\alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Beweis. Habe α den Exponenten e_1, den reduzierten Grad n_1. Dan gilt (2, S. 239) $e_1 \leqq e$, $n_1 | n$. In $\Omega'^{p^{-e_1}}$ ist α Nullstelle eines primäre irreduziblen Polynoms $\varphi(x)$ erster Art vom Grade n_1, und es gilt

$$\prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i) = [\varphi(x)]^{\frac{n}{n_1}}.$$

Sei

$$g(x) = x^{n_1 \cdot p^{e_1}} + a_{n_1 - 1} x^{(n_1 - 1) p^{e_1}} + \ldots + a_0$$

das zu α gehörige primäre irreduzible Polynom in Ω'. Dann gilt

$$g(x) = [\varphi(x)]^{p^{e_1}}, \quad \left[\prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i)\right]^{p^e} = [\varphi(x)]^{\frac{n}{n_1} \cdot p^e} = [g(x)]^{\frac{n}{n_1} \cdot p^{e - e_1}},$$

$$\pm a_0^{\frac{n}{n_1} \cdot p^{e - e_1}} = \left(\prod_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^{p^e};$$

also wird

$$|\alpha| = |a_0|^{\frac{1}{n_1 \cdot p^{e_1}}} = |a_0^{\frac{n}{n_1} \cdot p^{e - e_1}}|^{\frac{1}{n \cdot p^e}} = |(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_n)^{p^e}|^{\frac{1}{n \cdot p^e}}.$$

Da ferner nach dem Vorigen, weil $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_n$ zu $\Omega^{p^{-e}}$ gehört,

$$|\alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_n| = |(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_n)^{p^e}|^{p^{-e}}$$

ist, so ergibt sich

$$|\alpha| = |\alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Satz IV. *α und β seien in bezug auf Ω' algebraisch. Dann ist*

$$|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|.$$

Beweis. Da $[\Omega'^{p^{-1}}:\Omega']=p$, also $[\Omega':\Omega'^{p}]=p$ ist, so gibt es ein
bezug auf Ω' algebraisches ϑ, derart, daß α und β zu $\Omega'(\vartheta)$ gehören
3, S. 244). $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ seien die zu ϑ in bezug auf Ω' konjugierten
rößen, sei $\alpha=r(\vartheta)$, $\beta=s(\vartheta)$, $\alpha\cdot\beta=\gamma$, $\gamma=R(\vartheta)$, $\alpha_i=r(\vartheta_i)$, $\beta_i=s(\vartheta_i)$,
$=\alpha_i\cdot\beta_i$; dann ist $\gamma_i=R(\vartheta_i)$.

Sei $\alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_n=\mathsf{A}$, $\beta_1\cdot\beta_2\ldots\beta_n=\mathsf{B}$, $\gamma_1\cdot\gamma_2\ldots\gamma_n=\Gamma$. Sei wieder
der Exponent von ϑ in bezug auf Ω'. Dann gilt nach Satz III

$$|\alpha|=|\mathsf{A}^{p^e}|^{\frac{1}{n\cdot p^e}},\quad |\beta|=|\mathsf{B}^{p^e}|^{\frac{1}{n\cdot p^e}},$$

so

$$|\alpha|\cdot|\beta|=(|\mathsf{A}^{p^e}|\cdot|\mathsf{B}^{p^e}|)^{\frac{1}{n\cdot p^e}}=|\mathsf{A}^{p^e}\cdot\mathsf{B}^{p^e}|^{\frac{1}{n\cdot p^e}}=|\Gamma^{p^e}|^{\frac{1}{n\cdot p^e}}=|\gamma|.$$

abei haben wir benutzt, daß A^{p^e} und B^{p^e} zu Ω' gehören.

Satz V. *Sei ζ algebraisch in bezug auf Ω' und sei $|\zeta|\leqq 1$. Dann*
t $|u+\zeta|\leqq 1$ und, wenn $|\zeta|<1$ ist, $|u+\zeta|=1$.

Beweis (vgl. 3, S. 218). Das zu ζ gehörige irreduzible Polynom
Ω' sei

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0.$$

Ist zunächst $n=1$, so ist die Behauptung bereits bewiesen (§ 3).

Sei $n\geqq 2$. Dann ist $|\zeta|=|a_0|^{\frac{1}{n}}$, $|a_0|=|\zeta|^n$, also $|a_0|\leqq 1$, und,
enn $|\zeta|<1$ ist, $|a_0|<1$. Setzt man also $\alpha=0$ oder $\alpha=-1$, je
achdem ob man die Voraussetzung $|\zeta|\leqq 1$ oder $|\zeta|<1$ zugrunde legt,
sind die Voraussetzungen von § 4, Satz VI erfüllt. Es folgt also
$_k|\leqq q^a$ für $k=1,2,\ldots,n-1$. Wir bilden das Polynom

$$g(y)=f(y-u)=y^n+b_{n-1}y^{n-1}+\ldots+b_0.$$

(y) ist irreduzibel; ferner ist $u+\zeta$ eine Nullstelle von $g(y)$.
Es folgt

$$|u+\zeta|=|b_0|^{\frac{1}{n}}.$$

un ist

$$b_0=g(z)=f(-u)=(-u)^n+a_{n-1}\cdot(-u)^{n-1}+\ldots+a_0,$$

so

$$|b_0|\leqq \mathrm{Max}(1,|a_{n-1}|,\ldots,|a_0|)=1,$$

d, wenn $|\zeta|<1$, also $\alpha=-1$ zugrunde gelegt wird, sogar

$$|b_0|=1.$$

mit ist die Behauptung bewiesen.

Nunmehr folgt der allgemeine Fall:

Satz VI. *α und β seien algebraisch in bezug auf Ω'; ferner sei* $|\alpha| \geqq |\beta|$ *bzw.* $|\alpha| > |\beta|$. *Dann ist* $|\alpha+\beta| \leqq |\alpha|$ *bzw.* $|\alpha+\beta| = |\alpha|$.

Beweis. Der Fall $\alpha = z$ ist trivial. Sei $\alpha \neq z$. Dann setze man $\frac{\beta}{\alpha} = \zeta$. Auch ζ ist algebraisch in bezug auf Ω', und es wird nach Satz IV

$$|\beta| = |\alpha| \cdot |\zeta|, \quad \text{also} \quad |\zeta| \leqq 1 \quad \text{bzw.} \quad |\zeta| < 1.$$

Also wird $|u+\zeta| \leqq 1$ bzw. $|u+\zeta| = 1$, also folgt die Behauptung unter Benutzung von Satz IV.

Sind $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)$ endlich viele Polynome in $\Omega'(\Omega)$, so kann man durch Adjunktion von endlich vielen in bezug auf $\Omega'(\Omega)$ algebraischen Elementen einen Körper erhalten, in welchem alle $g_\mu(x)$ in Linearfaktoren zerfallen. Gemäß **2**, S. 244 kann dieser Körper auch durch Adjunktion eines einzigen in bezug auf $\Omega'(\Omega)$ algebraischen Elementes erhalten werden.

Wir legen nun für alle folgenden Betrachtungen einen festen Körper K zugrunde, der auf folgende Weise entsteht:

Sei ζ eine feste, in bezug auf Ω (also auch in bezug auf Ω') algebraische Größe. Dann soll $K = \Omega'(\zeta)$ sein.

Wir betrachten dann nur noch Größen aus K, und führen folgende Terminologie ein:

Größen aus Ω heißen „rational"; haben sie die Form

$$c_0 + c_1 t + \ldots + c_n t^n,$$

wo die c_k zu $F(q)$ gehören, so heißen sie „ganz rational". Eine Größe aus K heißt algebraisch, wenn sie in bezug auf Ω algebraisch ist, d. h. wenn es ein Polynom positiven Grades $g(x)$ mit „rationalen" Koeffizienten gibt, das α zur Nullstelle hat. Insbesondere heißt α ganz algebraisch, wenn es ein primäres Polynom $g(x)$ mit „ganzen rationalen" Koeffizienten gibt, das α zur Nullstelle hat.

Unter Zugrundelegung dieser Terminologie kann man ohne weiteres die elementaren Sätze über algebraische Zahlen übertragen, wie sie etwa in **1**, § 2 entwickelt werden. Auch die an derselben Stelle bewiesenen Sätze 27—30 gelten unverändert. An die Stelle des Körpers der komplexen Zahlen (etwa in **1**, § 2, Satz 21) tritt der Körper K.

Eine Einschränkung ist zu machen, da der Körper K nicht algebraisch abgeschlossen ist[7]). Sei

$$x^r + \alpha \cdot x^{r-1} + \beta \cdot x^{r-2} + \ldots + \varkappa x + \lambda$$

[7]) Z. B. hat in ihm, wenn ζ den Exponenten e_1 hat, die Gleichung

$$x^{p^{e_1+1}} - t = z$$

keine Lösung.

ine ganze rationale Funktion mit Koeffizienten, die im obigen Sinne lgebraisch sind (vgl. 1, § 2, Satz 25); dann brauchen die Nullstellen nicht u K zu gehören. Gehört aber eine Nullstelle zu K, so ist sie algebraisch, nd, wenn die $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa, \lambda$ ganz algebraisch sind, sogar ganz algebraisch.

Sei nun ϑ algebraisch im obigen Sinne; der Exponent von ϑ sei e, er reduzierte Grad von ϑ (in bezug auf Ω) sei n. Die konjugierten rößen (*damit sind im folgenden immer die in bezug auf Ω konjugierten emeint*) seien $\vartheta^{(1)}, \vartheta^{(2)}, \ldots, \vartheta^{(n)}$. *Wir setzen voraus, daß nicht nur ϑ, ondern auch die konjugierten Größen zu K gehören.* Wir wollen dann en Körper $\Omega(\vartheta)$ betrachten[8]). Sei α ein Element von $\Omega(\vartheta)$. Man chreibe α in der Form $s(\vartheta)$, wo $s(x)$ ein Polynom mit Koeffizienten n $\Omega^{p^{-e}}$ ist. Dann setzen wir

$$N_r(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} s(\vartheta^{(i)}), \qquad S_r(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} s(\vartheta^{(i)}).$$

$N_r(\alpha)$ heißt die *reduzierte Norm*, $S_r(\alpha)$ die *reduzierte Spur* von α. 'erner definieren wir die *Norm*:

$$N(\alpha) = [N_r(\alpha)]^{p^e}.$$

$N_r(\alpha)$ und $S_r(\alpha)$ sind unabhängig davon, wie man das Polynom $s(x)$ in $\Omega^{p^{-e}}$ wählt; insbesondere kann man $s(x)$ so wählen, daß die Koeffizienten ogar zu Ω gehören. $N_r(\alpha)$ und $S_r(\alpha)$ sind Elemente von $\Omega^{p^{-e}}$, und war sind sie ganz algebraisch, wenn α es ist. $N(\alpha)$ ist „rational" und, enn α ganz algebraisch ist, sogar „ganz rational".

Sind ferner $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ genau n Elemente von $\Omega(\vartheta) = \Omega^{p^{-e}}(\vartheta)$, t weiter $\alpha_k = s_k(\vartheta)$, wo $s_k(x)$ ein Polynom in $\Omega^{p^{-e}}$ ist, so setzen wir

$$\Delta_r(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} s_1(\vartheta^{(1)}) \ldots s_n(\vartheta^{(1)}) \\ \cdots\cdots\cdots \\ s_1(\vartheta^{(n)}) \ldots s_n(\vartheta^{(n)}) \end{vmatrix}^2,$$

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = [\Delta_r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)]^{p^e}$.

Δ_r gehört zu $\Omega^{p^{-e}}$, Δ ist „rational"; sind die α_i ganz algebraisch, o werden Δ_r bzw. Δ ganz algebraisch bzw. „ganz rational". $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ind dann und nur dann linear unabhängig in bezug auf $\Omega^{p^{-e}}$, wenn

[8]) Es entgeht uns kein Körper $\Omega(\vartheta)$. Denn ist ϑ algebraisch in bezug auf Ω, o kann man z. B. ζ so bestimmen, daß ζ algebraisch in bezug auf Ω und daß $(\zeta) = \Omega(\vartheta^{(1)}, \ldots, \vartheta^{(n)})$ ist. Dann setze man $K = \Omega'(\zeta)$. — Übrigens könnte man ch wegen der Isomorphie zwischen $\Omega(\vartheta) = \Omega^{p^{-e}}(\vartheta)$ und $\Omega(\vartheta^{p^e})$ auf den Fall $e = 0$ eschränken; dadurch würde sich im folgenden die Einführung der „reduzierten" orm, der „reduzierten" Basis usw. erübrigen.

$\Delta_r(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — oder, was gleichbedeutend ist, wenn $\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — von z verschieden ist (vgl. zu diesen Entwicklungen **1**, § 3).

Es gibt im Körper $\Omega(\vartheta)$ ein System von n ganzen algebraischen in bezug auf $\Omega^{p^{-e}}$ unabhängigen Elementen $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Für jedes solches System ist $\Delta(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ von z verschieden und „ganz rational". Wir wollen $\beta_1, \ldots, \beta_n$ insbesondere so wählen, daß $|\Delta(\beta_1, \ldots, \beta_n)|$, d. h. der Betrag von $\Delta(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, möglichst klein wird. Dann bilden $\beta_1, \ldots, \beta_n$ eine *„reduzierte Basis"* von $\Omega(\vartheta)$, d. h. stellt man irgendein Element von $\Omega(\vartheta)$ dar in der Form

$$\alpha = b_1\beta_1 + \ldots + b_n\beta_n,$$

wo $b_1, \ldots, b_n$ zu $\Omega^{p^{-e}}$ gehören — diese Darstellung ist nur auf eine Weise möglich —, so sind die Elemente $b_1, \ldots, b_n$ dann und nur dann *ganz* algebraisch, wenn α es ist.

Man kann also, wenn diese Voraussetzung zutrifft, schreiben:

$$b_\varkappa = c_{\varkappa 0} + c_{\varkappa 1}\cdot t_{-e} + c_{\varkappa 2}\cdot t_{-e}^2 + \ldots + c_{\varkappa p^e-1}\cdot t_{-e}^{p^e-1},$$

wo $t_{-e} = t^{p^{-e}}$ ist und die $c_{\varkappa i}$ „ganz rational" sind. Setzt man also

$$\mathsf{B}_1 = \beta_1, \quad \mathsf{B}_2 = t_{-e}\cdot\beta_1, \ \ldots, \quad \mathsf{B}_{p^e} = t_{-e}^{p^e-1}\cdot\beta_1,$$
$$\mathsf{B}_{p^e+1} = \beta_2, \ \mathsf{B}_{p^e+2} = t_{-e}\cdot\beta_2, \ \ldots, \ \mathsf{B}_{2\cdot p^e} = t_{-e}^{p^e-1}\cdot\beta_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \mathsf{B}_N = t_{-e}^{p^e-1}\cdot\beta_n,$$

wo $N = n\cdot p^e$ ist, so bilden $\mathsf{B}_1, \ldots, \mathsf{B}_N$ eine *Basis* von $\Omega(\vartheta)$ (in bezug auf Ω), d. h. alle ganzen algebraischen Größen von $\Omega(\vartheta)$ — und nur solche Größen — lassen sich in der Form

$$B_1\mathsf{B}_1 + \ldots + B_N\mathsf{B}_N$$

mit „ganzen rationalen" Koeffizienten $B_1, \ldots, B_N$, also *alle* Größen von $\Omega(\vartheta)$ in derselben Form mit „rationalen" $B_1, \ldots, B_N$ darstellen. Aus der letzteren Tatsache folgt wegen $[\Omega(\vartheta):\Omega] = N$ leicht die lineare Unabhängigkeit von $\mathsf{B}_1, \ldots, \mathsf{B}_N$ in bezug auf Ω.

§ 6.

Ideale im Körper $\Omega(\vartheta)$.

Sei $k \geqq 1$, seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ k ganze algebraische Größen von $\Omega(\vartheta)$, die nicht sämtlich gleich z sind. Dann verstehen wir unter dem *Ideal*

$$\mathfrak{a} = [\alpha_1, \ldots, \alpha_k]$$

die Gesamtheit der Größen, die sich in der Form

$$\eta_1\alpha_1 + \ldots + \eta_k\alpha_k$$

rstellen lassen, wo $\eta_1, \ldots, \eta_k$ ganze algebraische Größen von $\Omega(\vartheta)$ sind. übertragen sich sinngemäß alle elementaren Sätze über Ideale, wie sie wa in **1**, § 4 entwickelt werden. Eine von z verschiedene ganze algeaische Größe a, die zu Ω_{-e} gehört, kann nur endlich vielen Idealen gehören, wie man durch Übertragung des Beweises von Satz 67 in **1**, 5 (unter Benutzung einer reduzierten Basis) leicht erkennt. Zu jedem eal $\mathfrak{a}$ gibt es ein Ideal $\mathfrak{b}$ und eine „ganze rationale" von z verschiedene öße a, derart, daß

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = [a]$$

. Sei nämlich

$$= [\alpha_l, \alpha_{l-1}, \ldots, \alpha_0], \quad \alpha_l \neq z, \quad g(x) = \alpha_l x^l + \alpha_{l-1} x^{l-1} + \ldots + \alpha_0,$$

$$\alpha_\lambda = r_\lambda(\vartheta), \quad \alpha_\lambda^{(k)} = r_\lambda(\vartheta^{(k)}),$$

$$k(x) = \Big[\prod_{k=1}^{n}(\alpha_l^{(k)} x^l + \ldots + \alpha_0^{(k)})\Big]^{p^e}.$$

(x) ist ein Polynom mit „ganzen rationalen" Koeffizienten. Ferner ist

$$k(x) = g(x) \cdot h(x),$$

auch die Koeffizienten von $h(x)$ ganz algebraisch sind und zu $\Omega(\vartheta)$ hören. Ist nun

$$h(x) = \beta_m x^m + \ldots + \beta_0$$

d ist a der größte gemeinsame Teiler der Koeffizienten von $k(x)$ (diese oeffizienten sind Polynome in der Variablen t; der größte gemeinsame iler ist zu verstehen im Sinne von § 2), so gilt, wenn man

$$\mathfrak{b} = [\beta_m, \ldots, \beta_0]$$

tzt, $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = [a]$ (vgl. **1**, § 5, Satz 68).

Nunmehr ergibt sich leicht die *Teilbarkeitstheorie der Ideale*, die im *auptsatz der Idealtheorie* gipfelt (**1**, § 5).

Auch die Grundbegriffe der *Kroneckerschen Theorie der algebraischen rößen* lassen sich mühelos auf den Körper $\Omega(\vartheta)$ übertragen. Sei $(v_1, \ldots, v_k)$ eine ganze rationale Funktion der Variablen $v_1, \ldots, v_k$, die oeffizienten seien ganze algebraische Größen von $\Omega(\vartheta)$ und nicht sämtlich gleich z. Dann heißt F eine *Form des Körpers* $\Omega(\vartheta)$. Es darf $= 0$ sein, dann ist F eine ganze algebraische, von z verschiedene Größe s $\Omega(\vartheta)$. F heißt eine *rationale Form*, wenn die Koeffizienten „rational", o „ganz rational" sind. Sind, in irgendeiner Reihenfolge, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ e Koeffizienten der Form F, so bezeichnen wir das Ideal

$$\mathfrak{a} = [\alpha_1, \ldots, \alpha_l]$$

den *Inhalt* der Form F. Haben F und G bzw. die Inhalte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, hat die Form $F \cdot G$ den Inhalt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ (vgl. **9**, S. 186f.).

Ist wieder F eine Form von $\Omega(\vartheta)$, so sei $F^{(i)}$ die ganze rationale Funktion, die man erhält, indem man jeden Koeffizienten $\alpha_k = r_k(\vartheta)$ von F durch $\alpha_k^{(i)} = r_k(\vartheta^{(i)})$ ersetzt. $F^{(i)}$ ist eine Form von $\Omega(\vartheta^{(i)})$. Die Formen $F^{(i)}$ heißen *die zu F konjugierten Formen*. Wir definieren

$$N_r(F) = \prod_{i=1}^{n} F^{(i)}; \qquad N(F) = [N_r(F)]^{p^e}.$$

$N_r(F)$ ist eine Form von Ω_{-e}, $N(F)$ eine rationale Form.

Sei ferner d der größte gemeinsame Teiler der Koeffizienten von $N(F)$ [9]) (im Sinne von § 2; wir dürfen d primär annehmen); dann definieren wir

$$n(F) = d.$$

Offenbar gilt, wenn F_1 und F_2 Formen von $\Omega(\vartheta)$ sind,

$$N_r(F_1 \cdot F_2) = N_r(F_1) \cdot N_r(F_2); \qquad N(F_1 \cdot F_2) = N(F_1) \cdot N(F_2);$$
$$n(F_1 \cdot F_2) = n(F_1) \cdot n(F_2).$$

Wenn $n(F) = u$ ist, so heißt F eine *Einheitsform*; ist F überdies eine rationale Form, so heißt F eine *rationale Einheitsform*. Es gilt

Satz I. *Jede Einheitsform hat den Inhalt* $\mathfrak{o}$.

Der Beweis hat keine Schwierigkeiten.

Satz II. *Jede Form des Inhalts* $\mathfrak{o}$ *ist eine Einheitsform.*

Beweis. F sei eine Form des Inhalts $\mathfrak{o}$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ seien die Koeffizienten von F. Dann ist $\mathfrak{o} = [\alpha_1, \ldots, \alpha_l]$, also

$$u = \alpha_1 \eta_1 + \ldots + \alpha_l \eta_l,$$

wo $\eta_1, \ldots, \eta_l$ ganze algebraische Größen von $\Omega(\vartheta)$ sind. Wir betrachten den Körper $\Omega(\vartheta^{(1)}, \ldots, \vartheta^{(n)})$, der ein Teilkörper von K ist (vgl. § 5). Es gilt

$$\Omega(\vartheta^{(1)}, \ldots, \vartheta^{(n)}) = \Omega(\xi),$$

wo auch ξ algebraisch ist. Aus

$$u = \alpha_1 \eta_1 + \ldots + \alpha_l \eta_l$$

folgt nun

$$u = \alpha_1^{(i)} \eta_1^{(i)} + \ldots + \alpha_l^{(i)} \eta_l^{(i)},$$

wo die $\eta_\lambda^{(i)}$ und die $\alpha_\lambda^{(i)}$ ganze algebraische Größen von $\Omega(\vartheta^{(i)})$, also von $\Omega(\xi)$ sind. Ist also $\mathfrak{D}$ das Einheitsideal in $\Omega(\xi)$, so hat jede der Formen $F^{(i)}$, als Form in $\Omega(\xi)$ betrachtet, den Inhalt $\mathfrak{D}$, also gilt das gleiche von der Form

$$G = (F^{(1)} \cdot F^{(2)} \ldots F^{(n)})^{p^e}.$$

---

[9]) Diese Koeffizienten sind Polynome der Variablen t mit Koeffizienten in $F(\varrho$

ien $a_1, \ldots, a_m$ die Koeffizienten von G, sei d ihr (primär genommener) ößter gemeinsamer Teiler. Dann gilt in $\Omega(\xi)$ offenbar

$$\mathfrak{D} = [a_1, a_2, \ldots, a_m] = [d],$$

so ist $d = u$, was zu zeigen war.

Man nennt zwei Formen F und G des Körpers $\Omega(\vartheta)$ *äquivalent* — Zeichen $F \simeq G$ —, wenn es zwei Einheitsformen F_1 und G_1 gibt, der t daß

$$FF_1 = GG_1$$

t. Aus dem Vorigen folgt leicht:

Satz III. *Äquivalente Formen haben den gleichen Inhalt.*

Ferner zeigt man in bekannter Weise:

Satz IV. *Ist F_1 eine Form von $\Omega(\vartheta)$, so gibt es eine Form F_2 $\Omega(\vartheta)$, derart, daß $F_1 F_2$ einer Form a äquivalent ist, wo a eine ganze rationale" von z verschiedene Größe ist.*

Nunmehr kann man beweisen:

Satz V. *Haben die Formen F und G den gleichen Inhalt, so sind e äquivalent.*

Beweis. Man bestimme die Formen F_1 und G_1 derart, daß

$$FF_1 = GG_1$$

ird (etwa $F_1 = G$, $G_1 = F$). Zu F_1 gibt es eine Form F_2 derart, daß

$$F_1 F_2 = aE$$

ird, wo $a \neq z$, a „ganz rational" und E eine Einheitsform ist. Es folgt

$$FF_1F_2 = GG_1F_2 = aFE.$$

abe G_1F_2 den Inhalt $\mathfrak{c}$. Dann hat GG_1F_2 den Inhalt $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$, wo $\mathfrak{a}$ der halt von F und G ist. Es folgt

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} = [a] \cdot \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{o}, \qquad \mathfrak{c} = [a].$$

so ist

$$G_1F_2 = a \cdot E_1,$$

E_1 eine Einheitsform ist. Es ist demnach

$$GaE_1 = aFE, \qquad GE_1 = FE, \qquad G \simeq F.$$

Natürlich gilt

Satz VI. *Aus $F \simeq G$ folgt $n(F) = n(G)$.*

Sei nun wieder $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $\Omega(\vartheta)$. Die Größen $\beta_1, \ldots, \beta_n$ mögen ne reduzierte Basis von $\Omega(\vartheta)$ bilden. Sei η eine von z verschiedene öße von $\mathfrak{a}$; dann gehört $a = N(\eta)$ zu $\mathfrak{a}$, also auch die n Größen

$\alpha \cdot \beta_1, \ldots, \alpha \cdot \beta_n$. Dabei ist $\alpha \neq z$. Man wähle nun (für $m = 1, 2, \ldots, n$ unter den Größen von $\mathfrak{a}$, die sich in der Form

$$a_{m1}\beta_1 + a_{m2}\beta_2 + \ldots + a_{mm}\beta_m$$

schreiben lassen, wo die a_{mh} nur zu Ω_{-e} zu gehören brauchen und $a_{mm} \neq z$ ist, eine solche aus, wo $|a_{mm}|$ möglichst klein ist (d. h. wo a_{mm} als Polynom in $t_{-e} = t^{p^{-e}}$ geschrieben, einen möglichst kleinen Grad hat). Dann sind die n Größen

$$\alpha_m = a_{m1}\beta_1 + \ldots + a_{mm}\beta_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, n$$

wegen

$$\Delta_r(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (a_{11} \cdot a_{22} \ldots a_{nn})^2 \cdot \Delta_r(\beta_1, \ldots, \beta_n) \neq z$$

linear unabhängig in bezug auf Ω_{-e}, und man beweist leicht, daß sie eine *„reduzierte Basis"* von $\mathfrak{a}$ bilden, d. h. daß sich alle Größen von $\mathfrak{a}$ — und nur diese Größen — in der Form schreiben lassen:

$$\alpha = b_1\alpha_1 + \ldots + b_n\alpha_n,$$

wo die $b_1, \ldots, b_n$ ganze algebraische Größen aus $\Omega^{p^{-e}}$ sind. (Man kann natürlich — genau wie in § 5 bei der Körperbasis — zu einer Basis in bezug auf den Körper Ω übergehen). Habe nun a_{mm} — als Polynom in $t_{-e} = t^{p^{-e}}$ aufgefaßt — den Grad f_m. Dann ist $|a_{mm}^{p^e}| = q^{f_m}$. Nun erhält man offensichtlich — wenn man in der üblichen Weise Kongruenzen nach Idealen einführt — ein vollständiges Restsystem mod $\mathfrak{a}$, wenn man in dem Ausdruck $r_1\beta_1 + \ldots + r_n\beta_n$ für $r_1, \ldots, r_n$ alle Polynome der Variablen t_{-e} einsetzt, die entweder z sind oder Grade haben, die bzw. kleiner als $f_1, \ldots, f_n$ sind. Demnach gibt es $q^{f_1} \cdot q^{f_2} \ldots q^{f_n} = |a_{11} \ldots a_{nn}|^{p^e}$ Restklassen mod $\mathfrak{a}$.

Wir führen nun folgende Bezeichnung ein: $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sei eine beliebige reduzierte Basis von $\mathfrak{a}$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ eine reduzierte Basis von $\Omega(\vartheta)$. Sei $\alpha_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\beta_k$, wo die c_{ik} ganze algebraische Größen von $\Omega^{p^{-e}}$ sind. Dann setzen wir

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) = \frac{|c_{ik}|^{p^e}}{\operatorname{sgn}(|c_{ik}|^{p^e})}.$$

Dabei bezeichnet $|c_{ik}|$ (keinen Betrag, sondern) die Determinante der c_{ik}, so daß $|c_{ik}|^{p^e}$ „ganz rational", also ein Polynom in der Variablen ist. Ferner bezeichnet, wenn P ein solches (von z verschiedenes) Polynom ist, $\operatorname{sgn} P$ den Koeffizienten der höchsten Potenz von t in diesem Polynom, so daß $\frac{P}{\operatorname{sgn} P}$ das zu P assoziierte primäre Polynom ist (vgl. 6, § 2).

Man erkennt ohne weiteres, daß $\mathfrak{N}(\mathfrak{a})$ von der Wahl der reduzierten Körper- und der reduzierten Idealbasis unabhängig ist. Man darf also

e oben konstruierte spezielle Idealbasis zugrunde legen; dann ergibt sich, enn $N(\mathfrak{a})$ die Anzahl der Restklassen mod $\mathfrak{a}$ bezeichnet, aus den obigen ntwicklungen

$$N(\mathfrak{a}) = |\mathfrak{N}(\mathfrak{a})|,$$

o $|\mathfrak{N}(\mathfrak{a})|$ der Betrag von $\mathfrak{N}(\mathfrak{a})$ ist.

Wir wollen die Beziehung des Polynoms $\mathfrak{N}(\mathfrak{a})$ zu den Begriffen der roneckerschen Formentheorie entwickeln. Dazu sind einige Hilfsbeachtungen nötig. Wir betrachten ganze rationale Funktionen $H_1, H_2, \ldots$ den Variablen $v_1, v_2, \ldots$; die Koeffizienten seien ganze algebraische rößen aus $\Omega_{-e} = \Omega^{p^{-e}}$, d. h. Polynome in der Variablen $t_{-e} = t^{p^{-e}}$ mit oeffizienten aus $F(q)$. Sei ferner P eine ganze algebraische Größe aus $_{-e}$, die — als Polynom in t_{-e} aufgefaßt — irreduzibel ist. Dann nennen ir H_i durch P teilbar, wenn jeder Koeffizient von H_i durch P teilbar . Ferner schreiben wir

$$H_i \equiv H_k \pmod{P},$$

enn $H_i - H_k$ im angegebenen Sinne durch P teilbar ist.

Hilfssatz. *Seien H_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ n^2 Funktionen der gekennichneten Art; habe P die angegebene Bedeutung; sei $n \geqq 1$. Ferner sei*

$$|H_{ik}| \equiv z \pmod{P},$$

o $|H_{ik}|$ die Determinante der H_{ik} bezeichnet. Dann kann man n Funkonen der genannten Art $H_1, \ldots, H_n$ angeben, die nicht sämtlich durch teilbar sind, derart, daß für $i = 1, 2, \ldots, n$

$$H_{i1} H_1 + \ldots + H_{in} H_n \equiv z \pmod{P}$$

lt.

Beweis. Ist $n = 1$, so setze man $H_1 = u$. Sei nun $n \geqq 2$. Ist des H_{ik} durch P teilbar, so kann man

$$H_1 = H_2 = \ldots = H_n = u$$

tzen. Sei nun nicht jedes H_{ik} durch P teilbar. Dann hat die Deterinante $|H_{ik}| \bmod P$ einen bestimmten Rang r und es gilt

$$1 \leqq r \leqq n - 1.$$

an darf annehmen, daß

$$\begin{vmatrix} H_{11} & \ldots & H_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ H_{r1} & \ldots & H_{rr} \end{vmatrix} \not\equiv z \pmod{P}$$

ist. Wir betrachten die Unterdeterminante

$$\begin{vmatrix} H_{11} & \dots & H_{1r} & H_{1\,r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{r1} & \dots & H_{rr} & H_{r\,r+1} \\ H_{r+k1} & \dots & H_{r+kr} & H_{r+k\,r+1} \end{vmatrix} \qquad (1 \leqq k \leqq n-r$$

Sie ist durch P teilbar. Sei (für $l = 1, 2, \dots, r+1$) H_l das alge braische Komplement von H_{r+kl} in dieser Determinante. Dann hänge $H_1, H_2, \dots, H_r, H_{r+1}$ nicht von k ab. Ferner ist $H_{r+1} \not\equiv z \pmod{P}$ Setzt man noch (im Falle $r+1 < n$)

$$H_{r+2} = \dots = H_n = z,$$

so sind alle Behauptungen erfüllt.

Satz VII. *Sei* $\mathfrak{a}$ *ein Ideal, sei* F *eine Form des Inhalts* $\mathfrak{a}$. *Dann gi*

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) = n(F). \qquad \text{(Vgl. 9, S. 190, Satz 20}$$

Beweis. Sei $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ eine reduzierte Basis von $\mathfrak{a}$. Dann ist

$$\mathfrak{a} = [\alpha_1, \dots, \alpha_n].$$

Also ist die Form

$$F_1 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

eine Form des Inhalts $\mathfrak{a}$. Es folgt nach Satz V und Satz VI

$$F \simeq F_1; \quad n(F) = n(F_1).$$

Es bleibt zu zeigen $\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) = n(F_1)$.

Sei $\beta_1, \dots, \beta_n$ eine reduzierte Körperbasis. Dann ist $\alpha_i \beta_k$ eine Grö aus $\mathfrak{a}$, läßt sich also in der Form darstellen

$$c_1 \alpha_1 + \dots + c_n \alpha_n,$$

wo $c_1, \dots, c_n$ ganz algebraisch sind und zu Ω_{-e} gehören. Also kommt

$$\beta_k \cdot F_1 = H_{1k} \alpha_1 + \dots + H_{nk} \alpha_n \qquad (k = 1, 2, \dots, n$$

wo die H_{ik} Funktionen der Art sind, wie sie im Hilfssatz auftreten (sog lineare). Ihre Determinante $|H_{ik}|$ ist durch kein irreduzibles P der g kennzeichneten Art teilbar. Denn sonst gäbe es n Funktionen $H_1, \dots, H$ mit den im Hilfssatz genannten Eigenschaften. Dann wäre jeder Koeffizie der Form

$$(H_1 \beta_1 + \dots + H_n \beta_n) \cdot F_1 = \alpha_1 \cdot \sum_{k=1}^{n} (H_{1k} \cdot H_k) + \dots + \alpha_n \cdot \sum_{k=1}^{n} (H_{nk} \cdot H_k)$$

durch das Ideal $[P] \cdot \mathfrak{a}$ teilbar. Sei $\mathfrak{b}$ der Inhalt der Form

$$H_1 \beta_1 + \dots + H_n \beta_n.$$

Dann würde gelten

$$[P] \cdot \mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}; \quad [P] \mid \mathfrak{b}.$$

Jeder Koeffizient der Form $H_1\beta_1 + \ldots + H_n\beta_n$ wäre durch P teilbar, oraus sich leicht ergäbe, daß jedes H_l durch P teilbar wäre, im Widerruch mit dem Hilfssatz.

$|H_{ik}|$ ist also von z verschieden und durch kein irreduzibles P der kennzeichneten Art teilbar. Also gibt es kein irreduzibles Polynom P_1 r Variablen t (mit Koeffizienten in $F(q)$), das in $|H_{ik}|^{p^e}$ aufgeht.

Es folgt

$$\beta_k^{(l)} F_1^{(l)} = H_{1k}\alpha_1^{(l)} + \ldots + H_{nk}\alpha_n^{(l)},$$

$$|\beta_k^{(l)} F_1^{(l)}| = |H_{ik}| \cdot |\alpha_k^{(l)}|$$

lie Striche bezeichnen Determinanten), also, wenn

$$\alpha_k = \sum_{l=1}^{n} c_{kl} \cdot \beta_l$$

t,

$$N_r(F_1) \cdot |\beta_k^{(l)}| = |H_{ik}| \cdot |c_{kl}| \cdot |\beta_k^{(l)}|,$$

$$N_r(F_1) = |H_{ik}| \cdot |c_{kl}|,$$

$$N(F_1) = |H_{ik}|^{p^e} \cdot |c_{kl}|^{p^e},$$

so, wegen der bewiesenen Eigenschaft von $|H_{ik}|^{p^e}$,

$$n(F_1) = \frac{|c_{kl}|^{p^e}}{\operatorname{sgn}(|c_{kl}|^{p^e})} = \mathfrak{N}(\mathfrak{a}).$$

Satz VIII. *Es ist*

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{b}), \quad \text{also} \quad N(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = N(\mathfrak{a}) \cdot N(\mathfrak{b}).$$

Der Beweis folgt ohne weiteres aus dem vorigen Satz in Verbindung it der Beziehung $n(F_1 \cdot F_2) = n(F_1) \cdot n(F_2)$.

Ferner gilt: Ist α eine ganze algebraische Größe von $\Omega(\vartheta)$ und ist $\neq z$, so ist

$$\mathfrak{N}([\alpha]) = \frac{N(\alpha)}{\operatorname{sgn}(N(\alpha))},$$

o $N(\alpha)$ die Bedeutung von § 5 hat.

§ 7.

Idealklassen. Einheiten.

Auch die weitere elementare Idealtheorie läßt sich durch geringe odifikation der üblichen Methoden übertragen. Wir schicken — in engem nschluß an **1**, § 7 — einige Hilfssätze über lineare Formen voraus. Seien

$$f_k = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} u_l \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

n lineare Formen in den n Variablen $u_1, \ldots, u_n$ mit „ganzen rationalen“ Koeffizienten. Sei $n \geqq 1$, sei ferner die Determinante

$$D = |a_{kl}| + z.$$

Dann verstehen wir unter dem „*Modul*“

$$\mathfrak{m} = [f_1, \ldots, f_n]$$

die Gesamtheit der Formen, die sich in der Gestalt

$$f = \sum_{k=1}^{n} v_k f_k$$

mit „ganzen rationalen“ $v_1, \ldots, v_n$ darstellen lassen. Seien $\mathfrak{m} = [f_1, \ldots, f_n]$ und $\overline{\mathfrak{m}} = [\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n]$ zwei Moduln. Wir nennen sie gleich, wenn sie die gleichen Formen enthalten.

Wir definieren

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{m}) = \frac{D}{\operatorname{sgn} D}.$$

Ist dann $\mathfrak{m} = \overline{\mathfrak{m}}$, so folgt leicht $\mathfrak{N}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{N}(\overline{\mathfrak{m}})$.

Wir nennen zwei Formen g und h kongruent mod $\mathfrak{m}$, in Zeichen $g \equiv h \pmod{\mathfrak{m}}$, wenn ihre Differenz zu $\mathfrak{m}$ gehört. Wir wollen ferner von n Formen $g_1, \ldots, g_n$ sagen, daß sie eine *Basis* des Moduls $\mathfrak{m} = [f_1, \ldots, f_n]$ bilden, wenn auch $\mathfrak{m} = [g_1, \ldots, g_n]$ ist. Man kann (vgl. **1**, Satz 112) in $\mathfrak{m}$ eine Basis $g_1, \ldots, g_n$ finden, derart, daß

$$g_k = d_{k1} u_1 + d_{k2} u_2 + \ldots + d_{kk} u_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

d_{kl} „ganz rational“, $d_{kk} \neq z$ und d_{kk} primär ist. Dann ist

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{m}) = d_{11} \cdot d_{22} \ldots d_{nn},$$

und man beweist leicht, daß es mod $\mathfrak{m}$ genau $|\mathfrak{N}(\mathfrak{m})| = |D|$ Restklassen gibt.

Hilfssatz I. *Es gibt in* $\mathfrak{m}$ *eine von* z *verschiedene Form*

$$g = a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n,$$

derart, daß

$$\operatorname{Max}(|a_1|, \ldots, |a_n|) \leqq |\mathfrak{N}(\mathfrak{m})|^{\frac{1}{n}}$$

ist.

Beweis. Sei N der Grad von $\mathfrak{N}(\mathfrak{m})$. Sei r die wohlbestimmte ganze rationale Zahl, für welche

$$r \leqq \frac{N}{n} < r + 1$$

ist. Dann folgt

$$n \cdot r \leqq N < n \cdot (r+1), \qquad q^{nr} \leqq |\mathfrak{N}(\mathfrak{m})| < q^{n(r+1)}.$$

Wir betrachten die $q^{n(r+1)}$ Formen

$$c_1 u_1 + \ldots + c_n u_n \quad \text{mit} \quad |c_k| \leqq q^r.$$

arunter müssen zwei mod $\mathfrak{m}$ kongruente sein. Ihre Differenz erfüllt die orderung des Satzes.

Hilfssatz II. *Gegeben seien n^2 „ganze rationale" Größen b_{kl} $(k=1,\ldots,n;\ l=1,\ldots,n)$ mit*

$$D=|b_{kl}|\neq z.$$

ann gibt es n „ganze rationale" Größen $x_1,\ldots,x_n$, die nicht sämtlich eich z sind, derart, daß für $k=1,\ldots,n$

$$|b_{k1}x_1+\ldots+b_{kn}x_n|\leqq|D|^{\frac{1}{n}}$$

(vgl. 1, Satz 113).

Beweis. Man setze

$$f_k=\sum_{l=1}^{n}b_{lk}u_l\quad(k=1,\ldots,n),\qquad \mathfrak{m}=[f_1,\ldots,f_n].$$

ann wird

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{m})=\frac{D}{\operatorname{sgn}D}.$$

an bestimme

$$g=\sum_{k=1}^{n}a_k u_k$$

mäß Hilfssatz I. Sei

$$g=\sum_{k=1}^{n}x_k\cdot f_k.$$

ann folgt

$$a_k=b_{k1}x_1+\ldots+b_{kn}x_n,$$

d es sind alle Behauptungen erfüllt.

Hilfssatz III. *Die n^2 Größen b_{kl} $(k=1,\ldots,n;\ l=1,\ldots,n)$ ögen zu Ω' gehören; sei*

$$D=|b_{kl}|\neq z.$$

ann gibt es n „ganze rationale" Größen $x_1,\ldots,x_n$, die nicht sämtlich eich z sind, derart, daß

$$|b_{k1}x_1+\ldots+b_{kn}x_n|\leqq|D|^{\frac{1}{n}}$$

(vgl. 1, Satz 114).

Beweis. 1. Zunächst erledigt sich — wie in 1, S. 37 — leicht der ll, daß die b_{kl} „rational" sind.

2. Seien nun die b_{kl} irgendwelche Größen aus Ω'. Wir entwickeln nach fallenden Potenzen von t. Bricht man (für $h=1,2,3,\ldots$) die twicklung von b_{kl} hinter der Potenz t^{-h} ab, so erhält man eine „ratio-le" Größe $b_{kl}^{(h)}$. Es gilt

$$b_{kl}^{(h)}\to b_{kl}.$$

Setzt man

$$|b_{kl}^{(h)}| = D^{(h)},$$

so gilt ferner

$$D^{(h)} \to D.$$

Da $\lim (|D^{(h)} - D|) = 0$ und $|D| > 0$ ist, so ist für $h > m$ offensichtlich

$$|D^{(h)} - D| < |D|, \quad |D^{(h)}| = |D|.$$

Man kann nun für jedes $h > m$ nach dem ersten Teil des Beweises di Größen $x_1^{(h)}, \ldots x_n^{(h)}$, „ganz rational" und nicht sämtlich verschwinden bestimmen, derart, daß

$$|\sum_{l=1}^{n} b_{kl}^{(h)} x_l^{(h)}| \leqq |D^{(h)}|^{\frac{1}{n}} = |D|^{\frac{1}{n}}$$

ist. Ferner kann man ein reelles positives A bestimmen, derart, da — für beliebige k, l, h — der Betrag von $b_{kl}^{(h)}$ kleiner als A und überdie

$$|D|^{\frac{1}{n}} < A$$

ist. Setzt man dann

$$y_k^{(h)} = \sum_{l=1}^{n} b_{kl}^{(h)} x_l^{(h)},$$

so wird für $h > m$, da

$$|y_k^{(h)}| < A,$$

ferner der Betrag von $b_{kl}^{(h)}$ kleiner als A ist, offenbar

$$|x_l^{(h)}| < \frac{A^n}{|D|}.$$

Daher gibt es unter den unendlich vielen Systemen $x_l^{(h)}$ $(h = m+1, m+2, \ldots$ nur endlich viele verschiedene, also mindestens eins, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, das fü unendlich viele Werte $h_1, h_2, h_3, \ldots$ von h wiederkehrt $(h_\varkappa > m)$. Dann gi

$$\left|\sum_{l=1}^{n} b_{kl}^{(h_\varkappa)} x_l\right| \leqq |D|^{\frac{1}{n}}, \qquad \left(\sum_{l=1}^{n} b_{kl}^{(h_\varkappa)} x_l\right) \to \sum_{l=1}^{n} b_{kl} x_l,$$

also

$$\left|\sum_{l=1}^{n} b_{kl} x_l\right| \leqq |D|^{\frac{1}{n}}.$$

Hilfssatz IV. *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz* III *gibt e wenn* $\delta_1 \cdot \delta_2 \ldots \delta_n = |D|$, $\delta_\varkappa > 0$ *ist* $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$, n *„ganze rati nale"* x_k, *die nicht sämtlich gleich z sind, derart, daß*

$$\left|\sum_{l=1}^{n} b_{kl} x_l\right| \leqq \delta_k$$

wird.

Beweis. Man bestimme die ganze rationale Zahl r_k so, daß

$$q^{r_k} \leqq \delta_k < q^{r_k+1} \qquad (k = 1, \ldots,$$

rd. Sei

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_n = R.$$

nn ist

$$q^R \leqq |D| < q^{R+n}.$$

$$\bar{b}_{kl} = \frac{b_{kl}}{t^{r_k}}, \qquad \bar{D} = |\bar{b}_{kl}|.$$

nn wird

$$\bar{D} = \frac{D}{t^R} + z, \qquad |\bar{D}| = \frac{|D|}{q^R} < \frac{q^{R+n}}{q^R} = q^n.$$

mnach kann man gemäß Hilfssatz III die „ganzen rationalen" Größen $\ldots, x_n$, nicht sämtlich verschwindend, bestimmen, daß

$$|\bar{b}_{k1} x_1 + \ldots + \bar{b}_{kn} x_n| \leqq |\bar{D}|^{\frac{1}{n}} < q,$$

$$|\bar{b}_{k1} x_1 + \ldots + \bar{b}_{kn} x_n| \leqq 1,$$

$$|b_{k1} x_1 + \ldots + b_{kn} x_n| \leqq q^{r_k} \leqq \delta_k$$

Sei nun ϑ eine algebraische Größe im Sinne von § 5 und § 6, sei x) das zugehörige primäre irreduzible Polynom in Ω. In Ω' gelte die legung

$$g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \ldots g_l(x).$$

wenn e der Exponent von $g(x)$ in bezug auf Ω ist, auch jedes $g_\lambda(x)$ näß § 5, Satz II in bezug auf Ω' den Exponenten e hat, so sind die x) zu je zweien teilerfremd. Sei n der reduzierte Grad von $g(x)$ (in ug auf Ω), d_λ der reduzierte Grad von $g_\lambda(x)$ (in bezug auf Ω'). enbar gilt

$$n = \sum_{\lambda=1}^{l} d_\lambda.$$

en endlich, wie bisher, $\vartheta^{(1)}, \ldots, \vartheta^{(n)}$ die zu ϑ konjugierten algebraischen ßen. Dann sagen wir, daß die Größen $\vartheta^{(1)}, \ldots, \vartheta^{(n)}$ in l *Gruppen von jugiert komplexen Größen* zerfallen, und zwar nennen wir die d_λ ver- edenen Nullstellen des gleichen Polynoms $g_\lambda(x)$ zueinander konjugiert plex. Man erkennt übrigens leicht, daß, wenn auch η algebraisch und $\vartheta) = \Omega(\eta)$ ist, für ϑ und η nicht nur die Zahlen n und e, sondern l und — von der Reihenfolge abgesehen — $d_1, d_2, \ldots, d_l$ überein- mmen.

Seien nun $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ n in bezug auf Ω_{-e} linear unabhängige Größen $\Omega(\vartheta)$. Ist

$$\gamma_i = r_i(\vartheta),$$

etzen wir

$$\gamma_i^{(k)} = r_i(\vartheta^{(k)}).$$

Wir betrachten die Formen

$$y^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^{(k)} x_i \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

deren Determinante $\Gamma = |\gamma_i^{(k)}|$ von z verschieden ist.

Wir nennen zwei von diesen Formen $y^{(k_1)}$ und $y^{(k_2)}$ *konjugiert komplex*, wenn $\vartheta^{(k_1)}$ und $\vartheta^{(k_2)}$ konjugiert komplex sind. Setzt man für die x_i spezielle Größen aus $\Omega'_{-\varepsilon}$ ein, so entstehen aus zwei konjugiert komplexen Formen zwei Größen, die in bezug auf Ω' konjugiert sind, also den gleichen Betrag haben.

Hilfssatz V. *Bezeichnungen wie angegeben. Sei überdies* $e = 0$ *und* $n > 1$ (*also* $\vartheta \neq z$, $\vartheta^{(i)} \neq z$). *Dann gibt es eine nur von* ϑ (*nicht von der Wahl der* γ_i) *abhängige positive Zahl* C *von folgender Art: Sind den n Formen* $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}$ *die positiven Zahlen* $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ *so zugeordnet, daß wenn* $y^{(k_1)}$ *zu* $y^{(k_2)}$ *konjugiert komplex ist,* $\delta_{k_1} = \delta_{k_2}$ *ist, und daß die Beziehung*

$$\delta_1 \cdot \delta_2 \ldots \delta_n = C \cdot |\Gamma|$$

gilt, so gibt es ein System „ganzer rationaler“ $x_1, \ldots, x_n$, *die nicht sämtlich gleich* z *sind, derart, daß für diese Werte der Variablen die Beziehungen*

$$|y^{(k)}| \leqq \delta_k \text{ und (infolgedessen) } |y^{(1)} \cdot y^{(2)} \ldots y^{(n)}| \leqq C \cdot |\Gamma|$$

gelten.

Beweis. Wir denken uns — nur für diesen Beweis — die Nullstellen von $g(x)$ so geordnet, daß $\vartheta^{(1)}, \ldots, \vartheta^{(d_1)}$ die Nullstellen von $g_1(x)$, $\vartheta^{(d_1+1)}, \ldots, \vartheta^{(d_1+d_2)}$ die Nullstellen von $g_2(x)$, sind usw. Sei

$$|\vartheta^{(1)}| = \ldots = |\vartheta^{(d_1)}| = \varkappa_1; \quad |\vartheta^{(d_1+1)}| = \ldots = |\vartheta^{(d_1+d_2)}| = \varkappa_2, \ldots,$$

endlich $|\vartheta^{(n)}| = \varkappa_l$. Es ist $\varkappa_\lambda \neq 0$. Sei ferner

$$\begin{vmatrix} u\vartheta^{(1)} & \ldots & \vartheta^{(1)^{d_1-1}} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ u\vartheta^{(d_1)} & \ldots & \vartheta^{(d_1)^{d_1-1}} \end{vmatrix} = \Delta_1; \quad \begin{vmatrix} u\vartheta^{(d_1+1)} & \ldots & \vartheta^{(d_1+1)^{d_2-1}} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ u\vartheta^{(d_1+d_2)} & \ldots & \vartheta^{(d_1+d_2)^{d_2-1}} \end{vmatrix} = \Delta_2 \text{ usw.}^{10})$$

Ist $d_\lambda = 1$, so soll $\Delta_\lambda = u$ sein. Es gilt $\Delta_\lambda \neq z$. Nunmehr sei

$$C = \frac{\varkappa_1^{\frac{d_1(d_1-1)}{2}} \ldots \varkappa_l^{\frac{d_l(d_l-1)}{2}}}{|\Delta_1| \ldots |\Delta_l|} = \prod_{\lambda=1}^{l} \frac{\varkappa_\lambda^{\frac{d_\lambda \cdot (d_\lambda - 1)}{2}}}{|\Delta_\lambda|}.$$

---

[10]) $\vartheta^{(d_1+1)^k}$ soll die k-te Potenz von $\vartheta^{(d_1+1)}$ bezeichnen usw.

Seien die Zahlen $\delta_1, \ldots, \delta_n$ den Voraussetzungen gemäß vorgegeben. ann ist

$$\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_{d_1}; \quad \delta_{d_1+1} = \delta_{d_1+2} = \ldots = \delta_{d_1+d_2} \text{ usw.}$$

i nun $\gamma^{(1)}$ irgendein Koeffizient der Form $y^{(1)}$. Dann gilt

$$\gamma^{(1)} = a_1 + a_2 \cdot \vartheta^{(1)} + \ldots + a_{d_1} \cdot \vartheta^{(1)^{d_1-1}},$$

die a zu Ω' gehören; also folgt für $1 \leqq \varrho \leqq d_1$:

$$\gamma^{(\varrho)} = a_1 + a_2 \vartheta^{(\varrho)} + \ldots + a_{d_1} \vartheta^{(\varrho)^{d_1-1}},$$

$\gamma^{(\varrho)}$ der entsprechende Koeffizient in $y^{(\varrho)}$ ist. Demnach kann man reiben für $1 \leqq \varrho_1 \leqq d_1$:

$$y^{(\varrho_1)} = w_1 + w_2 \vartheta^{(\varrho_1)} + \ldots + w_{d_1} \vartheta^{(\varrho_1)^{d_1-1}};$$

enso für $d_1 + 1 \leqq \varrho_2 \leqq d_1 + d_2$

$$y^{(\varrho_2)} = w_{d_1+1} + w_{d_1+2} \vartheta^{(\varrho_2)} + \ldots + w_{d_1+d_2} \vartheta^{(\varrho_2)^{d_2-1}} \text{ usw.}$$

bei sind $w_1, w_2, \ldots, w_n$ lineare Formen der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ t Koeffizienten aus Ω'. Sei $\bar{\Gamma}$ die Determinante dieser Formen. nn ist

$$\bar{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Delta_1 \cdot \Delta_2 \ldots \Delta_l} \neq z.$$

nmehr setzen wir

$$\bar{\delta}_{\sigma_1} = \frac{\delta_{\sigma_1}}{x_1^{\sigma_1 - 1}} \quad \text{für} \quad 1 \leqq \sigma_1 \leqq d_1,$$

$$\bar{\delta}_{d_1+\sigma_2} = \frac{\delta_{d_1+\sigma_2}}{x_2^{\sigma_2-1}} \quad \text{für} \quad 1 \leqq \sigma_2 \leqq d_2 \quad \text{usw.}$$

nn wird

$$\bar{\delta}_1 \cdot \bar{\delta}_2 \ldots \bar{\delta}_n = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2 \ldots \delta_n}{x_1^{\frac{d_1(d_1-1)}{2}} \ldots x_l^{\frac{d_l(d_l-1)}{2}}} = |\bar{\Gamma}|.$$

o kann man nach Hilfssatz IV die „ganzen rationalen", nicht sämtlich rschwindenden $x_1, \ldots, x_n$ bestimmen, daß

$$|w_k| \leqq \bar{\delta}_k$$

rd. Dann folgt — für diese $x_1, \ldots, x_n$ —

$$\begin{aligned} |y^{(1)}| &\leqq \text{Max}(|w_1|, |w_2 \vartheta^{(1)}|, \ldots, |w_{d_1} \vartheta^{(1)^{d_1-1}}|) \\ &\leqq \text{Max}(\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2 \cdot x_1, \ldots, \bar{\delta}_{d_1} \cdot x_1^{d_1-1}) \\ &= \text{Max}(\delta_1, \delta_1, \ldots, \delta_1) = \delta_1, \end{aligned}$$

o für $1 \leqq \varrho_1 \leqq d_1$

$$|y^{(\varrho_1)}| = |y^{(1)}| \leqq \delta_1 \quad \text{usw.} \; —$$

Wir werden im folgenden annehmen, daß ϑ eine Größe erster Art, also $e = 0$ ist. Auf diesen Fall läßt sich der Fall eines beliebigen Exponenten leicht zurückführen (vgl. § 5, letzte Fußnote). Sei dann $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $\Omega(\vartheta)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eine Basis von $\mathfrak{a}$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ eine Basis von $\Omega(\vartheta)$, $\alpha_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\beta_k$. Wir betrachten die n Formen

$$y^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(k)} x_i.$$

Sie entsprechen den Voraussetzungen von Hilfssatz V. Hat also C dieselbe Bedeutung wie dort, so kann man die „ganzen rationalen", nicht sämtlich verschwindenden $x_1, \ldots, x_n$ bestimmen, derart, daß, wenn wir

$$\alpha = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$$

setzen,

$$|N(\alpha)| = |\alpha^{(1)} \ldots \alpha^{(n)}| \leqq C \cdot |\Gamma|$$

wird, wo $\Gamma = |\alpha_i^{(k)}|$ ist. Es ist $\alpha \neq z$. Ferner ist

$$\Gamma^2 = \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = |c_{ik}|^2 \cdot |\beta_i^{(k)}|^2 = (\mathfrak{N}(\mathfrak{a}))^2 \cdot \Delta \cdot a,$$

wo Δ die (bis auf einen zu $F(q)$ gehörigen, von z verschiedenen Faktor eindeutig bestimmte) Körperdiskriminante, a ein von z verschiedenes Element von $F(q)$ ist. Es folgt

$$|N(\alpha)| \leqq C \cdot |\mathfrak{N}(\mathfrak{a})| \cdot \sqrt{|\Delta|} = C_1 \cdot N(\mathfrak{a}),$$

wo $C_1 = C \cdot \sqrt{|\Delta|}$ nur vom Körper — nicht von $\mathfrak{a}$ — abhängt.

Satz I. *In jedem Ideal $\mathfrak{a}$ von $\Omega(\vartheta)$ gibt es eine von z verschiedene Größe α, derart, daß*

$$|N(\alpha)| \leqq C_1 \cdot N(\mathfrak{a})$$

ist, wo C_1 eine nur vom Körper abhängige positive Zahl ist.

Nunmehr ergibt sich leicht die *Endlichkeit der Idealklassenzahl* (Satz 125).

Auch die *Theorie der Einheiten* läßt sich auf Grund der Hilfssätze leicht erledigen. Habe l die Bedeutung wie oben. Wir setzen $r = l - 1$, also $l = r + 1$. Wir denken uns $\vartheta^{(1)}, \ldots, \vartheta^{(n)}$ jetzt (anders als beim Beweis von Hilfssatz V) so geordnet, daß zunächst von jeder Gruppe konjugiert komplexer Größen je eine kommt und dann die übrigen $\vartheta^{(s)}$ in beliebiger Reihenfolge. Ferner mögen $d_1, d_2, \ldots, d_l = d_{r+1}$ die Bedeutung haben wie oben. Dann gilt wörtlich 1, Satz 133. Der Beweis überträgt sich vollständig, nur tritt $C \cdot \sqrt{|\Delta|}$ an die Stelle von $\sqrt{|\Delta|}$ (vgl. Hilfssatz V). Ebenso gilt Satz 135, wenn wir eine Größe von $\Omega(\vartheta)$ *Einheitswurzel* nennen, sofern sie einer Gleichung

$$x^{m_1} - u = z$$

genügt.

Sei in der Tat α eine Einheitswurzel in diesem Sinne, und gehöre α zu $\Omega(\vartheta)$; das zugehörige, in Ω irreduzible Polynom sei

$$g(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0.$$

Es ist $m \leqq n$; ferner folgt leicht $|\alpha| = 1$, ebenso $|\alpha_k| = 1\,(k = 1, 2, \ldots, m)$, wenn α_k eine Nullstelle von $g(x)$ ist, also $|b_\mu| \leqq 1$. Da ferner die α_k ganz algebraisch sind, so sind die b_μ „ganz rational". Es folgt also wegen $|b_\mu| \leqq 1$, daß $b_{m-1}, b_{m-2}, \ldots, b_0$ Elemente von $F(q)$ sind, so daß es für $g(x)$ nur endlich viele Möglichkeiten gibt.

Satz II. Wörtlich wie **1**, Satz 137.

Auch die Übertragung des Beweises hat keine Schwierigkeiten

Literaturverzeichnis.

1. E. Landau, Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner 1918.

2. E. Steinitz, Algebraische Theorie der Körper. Journal für die reine und angew. Math. **137** (1910), S. 167–309.

3. J. Kürschák, Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie. Journal für die reine und angew. Math. **142** (1913), S. 211–254.

4. A. Ostrowski, Über einige Fragen der allgemeinen Körpertheorie. Journal für die reine und angew. Math. **143** (1913), S. 255–284.

5. A. Ostrowski, Über sogenannte perfekte Körper. Journal für die reine und angew. Math. **147** (1917), S. 191–204.

6. E. Artin, Quadratische Körper im Gebiete der höheren Kongruenzen. Math. Zeitschrift **19** (1924), S. 153–246.

7. L. E. Dickson, Linear groups etc. Leipzig: B. G. Teubner 1901.

8. K. Hensel, Theorie der algebraischen Zahlen. 1, Leipzig und Berlin: G. Teubner, 1908.

9. D. Hilbert, Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **4** (1894–1895), Berlin 1897.

10. Arbeiten in den Transactions of the American Mathematical Society.
   a) L. E. Dickson, Definitions of a field by independent postulates. **4** (1903), S. 13–20.
   b) E. V. Huntington, Definitions of a field by sets of ind. post. **4** (1903), S. 31–37.
   c) E. V. Huntington, Note on the definitions of abstract groups and fields. **6** (1905), S. 181–197.
   d) L. E. Dickson, Definitions of a group and a field. **6** (1905), S. 198–204.

11. H. Kühne, Eine Wechselbeziehung zwischen Funktionen mehrerer Unbestimmten usw. Journal für die reine und angew. Math. **124** (1902), S. 121–133.

12. H. Kühne, Angenäherte Auflösung von Kongruenzen nach Primmodulsystemen usw. Journal für die reine und angew. Math. **126** (1903), S. 102–115.

13. R. Dedekind, Abriß einer Theorie der höheren Kongruenzen in bezug auf einen reellen Primzahl-Modulus. Journal für die reine und angew. Math. **54** (1857), S. 1–26.

(Eingegangen am 12. Juni 1924.)

Contribution à l'unicité du développement trigonométrique.

Par

A. Zygmund (Varsovie).

1. On dit qu'un ensemble E de points, situé sur $(0, 2\pi)$, est *un ensemble d'unicité*, ou, tout court, *ensemble U*, si toute série trigonométrique à coefficients tendant vers zéro

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{1}$$

convergente vers zéro en dehors de E, a tous ses coefficients nuls.

Les ensembles d'unicité étaient étudiés par Heine, Cantor, P. Du Bois Reymond, M. Ch. de la Vallée Poussin, M. W. H. Young et dernièrement par M. Al. Rajchman et M^lle N. Bary[1]).

Posons quelques définitions. Soit donnée une suite (S) de nombres positifs $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ vérifiant les conditions:

$$\varepsilon_0 \geqq \varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 \geqq \ldots > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0 \qquad \text{(Suite } (S)\text{)} \tag{2}$$

Nous dirons qu'un ensemble E de points de l'intervalle $(0, 2\pi)$ *est un ensemble d'unicité rélatif à la suite donnée* (S), ou-tout court—est *un ensemble* $U(S)$, si toute série trigonométrique (1) à coefficients vérifiant la condition

$$\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \leqq \varepsilon_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

[1]) Cf. p. ex. Al. Rajchman, C. R. 3. IX. 1923 et Fundamenta Mathematicae; M^lle N. Bary, C. R. 3. XII. 1923. Les recherches de M. Rajchman et de M^lle Bary ont démontré l'existence des ensembles U fermés et non dénombrables. Évidemment tous les ensembles U (mesurables) sont nécessairement de mesure nulle mais non réciproquement. M. Menchoff (C. R. 1916) a construit des ensembles parfaits de mesure nulle qui ne sont pas des ensembles U.

vergente[2]) vers zéro en dehors de E, a tous ses coefficients nuls. idemment, tout ensemble U est un ensemble $U(S)$ pour toute suite (S); l'ensemble considéré E est un ensemble $U(S)$ pour toute suite (S), il aisé de voir qu'il est aussi un ensemble U.

2. Il est naturel de se demander: quelles propriétés possèdent des embles $U(S)$. L'une des réponses possibles est donnée par le théorème vant:

Théorème I. *À toute suite* (S) *on peut faire correspondre des* $U(S)$ *mesure positive et aussi voisine de* 2π, *que l'on veut.*

Ce théorème montre que, si l'on abandonne la théorie *générale* des ies trigonométriques à coefficients tendant vers zéro, et si l'on fait des pothèses *particulières*, mais *aussi peu restrictives que l'on veut* sur la nière dont les coefficients de la série (1) tendent vers zéro, on arrive ce résultat, un peu paradoxale au premier abord: *les ensembles nicité ne sont pas forcément de mesure nulle.*

Construction. Désignons par P_s l'ensemble des solutions de l'inégalité

$$\operatorname{Red}\left(s\cdot\frac{x}{2\pi}-\alpha_s\right)\leqq 1-\eta_s \qquad (s=1,2,3,\ldots),$$

Red $z = z - [z]$ = la partie non entière de z) où $0\leqq\alpha_s<1$, $0\leqq\eta_s<1$ $= 1, 2, 3, \ldots$). Choisissons η_s de sorte que l'on ait

$$1^\circ\ \lim_{s\to\infty}\eta_s=0, \qquad 2^\circ\ \lim_{s\to\infty}\frac{\varepsilon_s}{\eta_s}=0.$$

nc $\{\eta_s\}$ est une suite quelconque de nombres positifs (et <1) tendant s zéro moins rapidement que la suite $\{\varepsilon_s\}$.

Soit $n_1<n_2<n_3<\ldots$ une suite quelconque des nombres naturels dant vers l'infini. Je dis que tout ensemble

$$P=\coprod_{k=1}^{\infty}P_{n_k}$$

un $U(S)$.

Les ensembles que nous avons construits tout à l'heure, possèdent une nde analogie avec des ensembles H introduits par M. Rajchman (loc.), à savoir si l'on pose $\eta_s=\text{const}$[3]), l'ensemble P, donné par la formule (6), a, par définition, l'ensemble du type H.

---

[2]) On peut aussi considérer des U ou $U(S)$ relatives aux méthodes de somma- plus générales.

[3]) La condition 1° (5) n'est pas nécessaire et peut être rejetée, sans que l'ensemble le (6)) cesse d'être un ensemble $U(S)$. Cette condition (ou, plus précisement, la dition $\lim_{k\to\infty}\eta_{n_k}=0$) n'est nécessaire que pour la condition: mes $P>0$.

La démonstration est basée sur l'idée à l'aide de laquelle M. Rajchma à démontré[4]) que les ensembles du type H sont des ensembles U.

3. Démonstration. Nous démontrerons d'abord que si la suit $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ tend assez rapidement vers l'infini, les ensembles (de (6)) sont nécessairement de mesure positive. Cela est évident, si l'o tient compte du caractère géométrique des ensembles P_s et de ce que

$$\text{mes } P_s = 2\pi(1-\eta_s), \quad \text{donc} \quad \lim_{s\to\infty} \text{mes } P_s = 2\pi.$$

Plus exactement, il est aisé de voir, que pour tout θ vérifiant la conditio $0<\theta<1$, on peut choisir une suite $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$, telle que 1° la sér $\sum_{k=1}^{\infty} \eta_{n_k}$, donc le produit $\prod_{k=1}^{\infty}(1-\eta_{n_k})$, convergent et 2° mes $P > 2\pi\theta \prod_{k=1}^{\infty}(1-\eta_{n_k})$

On en déduit sans peine que la mesure de P peut-être aussi voisi de 2π, que l'on veut.

Passons maintenant à la démonstration que les ensembles (6) so des $U(S)$. Cette démonstration s'appuyera sur les théorèmes sur la mul plication formelle, donnés par M. Rajchman[5]).

Considérons la série trigonométrique

$$(7) \qquad \lambda(x,h) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nh}{n^2 h^2} \cos nx.$$

Comme on peut vérifier, cette série est la série de Fourier d'u fonction paire de période 2π, égale à zéro dans l'intervalle $(2h, \pi)$ $\left(0<h<\frac{\pi}{2}\right)$, égale à $\frac{\pi}{2h}$ pour $x=0$, et linéaire dans l'intervalle $(0, 2h)$ On peut démontrer que si l'on multiplie la série trigonométrique (1) coefficients tendant vers zéro par la série (7), les théorèmes de M. Rajchma

---

[4]) Al. Rajchman, C. R. loc. cit.

[5]) Al. Rajchman, Sur le principe de localisation de Riemann. C. R. de Soc. Scientif. de Varsovie 1918. Cf. aussi Al. Rajchman, C. R. 3. IX. 1923 A. Zygmund. Sur la théorie riemannienne des séries trigonométriques. Math. Zeitsch ce volume.

[6]) Les fonctions

$$h\lambda(x,h) = \frac{h}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nh}{n^2 h} \cos nx, \qquad \left(0<h<\frac{\pi}{2}\right.$$

sont donc bornées dans leur ensemble. Cette remarque nous sera utile dans la sui

: la multiplication formelle subsistent, sauf peut-être dans un nombre
i des points angulairs de $\lambda(x, h)$ [7]).

4. Supposons que la série (1) à coefficients vérifiant (3), converge
rs zéro en dehors de P. Nous démontrerons que $a_0 = 0$, $a_n = b_n = 0$
$= 1, 2, \ldots$).

Prenons la fonction $\lambda_q(x) = \lambda(x - \beta_q, h_q)$ (où, pour la commodité,
us avons posé $n_k = q$) et choisissons β_q et h_q de tel façon que l'ensemble
s zéros de la fonction $\lambda_q(x)$ soit identique à l'ensemble P_q. [8])

Désignons par

$$\frac{A_0^{(q)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n^{(q)} \cos n x + B_n^{(q)} \sin n x)$$

produit formel de la série (1) par la série de Fourier de la fonction
$q x$). Comme 1° la série (1), par hypothèse, converge vers zéro par-
ıt, sauf, peut-être dans P, 2° l'ensemble P est contenu dans $P_q = P_{n_k}$,
les théorèmes sur la multiplication ne peuvent être en défaut que
ıs les points angulairs de $\lambda_q(q x)$, on en déduit que la série (8) est
e série trigonométrique, à coefficients tendant vers zéro, convergente
rs zéro partout, sauf peut-être dans un ensemble fini de points. Donc

$$A_0^{(q)} = 0, \quad A_n^{(q)} = B_n^{(q)} = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

---

[7]) On peut aussi se servir de la série

$$\Lambda(x, h) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^3 n h}{n^3 h^3} \cos n x$$

ıt les coefficients sont $O(n^{-3})$, pour laquelle, donc, les théorèmes sur la multi-
ation formelle ont lieu sans aucunes restrictions. On peut vérifier que

$$\Lambda(-x, h) = \Lambda(x, h)$$

pour

$$0 \leqq x \leqq h \qquad \frac{\pi}{4}\Lambda(x, h) = -\frac{x^3}{2h^3} + \frac{3}{2h},$$

$$h \leqq x \leqq 3h \qquad \frac{\pi}{4}\Lambda(x, h) = \frac{(x - 3h)^2}{4h^3},$$

$$3h \leqq x \leqq \pi \qquad \frac{\pi}{4}\Lambda(x, h) = 0 \qquad \left(0 < h < \frac{\pi}{3}\right).$$

[8]) Évidemment $h_q = \frac{2\pi\eta_q}{4} = \frac{\pi\eta_q}{2}$, $\beta_q = 2\pi\alpha_q - \pi\eta_q$.

En vertu des formules pour les coefficients du produit formel on a

$$A_n^{(q)} - i B_n^{(q)} = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{\infty}{}' (a_{n-pq} - i b_{n-pq}) \left(\frac{\sin^2 p h_q}{p^2 h_q^2} \cos p \beta_q - i \frac{\sin^2 p h_q}{p^2 h_q^2} \sin p \beta_q \right)$$
$$+ \frac{1}{2}(a_n - i b_n).^9)$$

En vertu de (9) on a donc:

$$|a_n - i b_n| \leqq \sum_{p=-\infty}^{+\infty}{}' |a_{n-pq} - i b_{n-pq}| \frac{\sin^2 p h_q}{p^2 h_q^2} \leqq \sum_{p=-\infty}^{+\infty}{}' \varepsilon_{n-pq} \frac{\sin^2 p h_q}{p^2 h_q^2}.^{10})$$

Désignons cette dernière expression par $J_n^{(q)}$. Prenons $q > n$. Alo

$$(10)\quad J_n^{(q)} \leqq \sum_{p=-\infty}^{-1} + \sum_{p=2}^{\infty} + \varepsilon_{q-n} = \varepsilon_{q-n} + \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon_{n+pq} \frac{\sin^2 p h_q}{p^2 h_q^2} + \sum_{p=2}^{\infty} \varepsilon_{pq-n} \frac{\sin^2 p}{p^2}$$
$$< \varepsilon_{q-n} + \frac{\varepsilon_q}{h_q} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 p h_q}{p^2 h_q} + \frac{\varepsilon_q}{h_q} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\sin^2 p h_q}{p^2 h_q} < \varepsilon_{q-n} + 2 \frac{\varepsilon_q}{h_q} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 p h_q}{p^2 h_q}$$

Comme, en vertu de 2° (5), on a:

$$\lim_{q \to \infty} \frac{\varepsilon_q}{h_q} = 0 \qquad (q = n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$$

et comme la somme $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 p h}{p^2 h}$ est uniformément bornée, on voit sa peine que le dernier membre de l'inégalité (10) tend vers zéro po $q = n_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ tendant vers l'infini. Donc

$$\lim_{k \to \infty} J_n^{(n_k)} = 0,$$

d'où

$$a_n = b_n = 0.$$

Cela démontre le théorème.

5. Maintenant le problème suivant, qui me parait intéressant, se po par lui-même.

Existent-ils des ensembles $U(S)$ de mesure égale juste à 2π? O à toute suite (S) — peut-on faire correspondre des ensembles E *de mesu nulle* vérifiant la propriété suivante: toute série (1) dont les coefficien vérifient (3), convergente vers zéro dans E, a tous ses coefficients nul

Il est probable que la reponse sur ce problème est affirmative, m je ne peux pas démontrer cela.

---

9) L'apostrophe ′ désigne que le terme correspondant à $p = 0$ est omis. Rappelo que les coefficients a_n et b_n sont définis, pour n entier *quelconque*, par la conventio

$$a_{-n} = a_n, \qquad b_{-n} = -b_n.$$

10) Si $n - pq < 0$, il faut évidemment écrire ε_{pq-n} au lieu de ε_{n-pq}.

Ce problème se rattache au problème suivant:

La somme d'une infinité au plus dénombrable des ensembles fermés (S) — *est elle-même un ensemble* $U(S)$? [11]) À ce problème on peut donner e reponse (affirmative) seulement dans un cas assez particulier. Désignons (S') toute suite (S), qui, outre les conditions (2), vérifie aussi les ditions suivantes:

$$1) \qquad 1^\circ \lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{2n}}{\varepsilon_n} > 0, \quad 2^\circ \ \varepsilon_n \geqq \frac{1}{(n+1)^\gamma} \ \text{(pour un certain } \gamma > 0).$$

Ces conditions supplementaires sont assez naturelles. Elles demandent e la suite $\{\varepsilon_n\}$ doit tendre assez régulièrement et pas trop rapidement s zéro et sont remplies pour les suites

$$= \frac{1}{(n+1)^{a_0}}; \quad \varepsilon_n = \frac{1}{[\lg(n+a_1)]^{a_1}}, \quad = \frac{1}{[\lg\lg(n+a_2)]^{a_2}\cdots} \Bigg\} \begin{array}{l} n = 0, 1, 2, \ldots, \ a_i > 0 \\ a_1, a_2, \ldots \text{ — des constantes positives.} \end{array}$$

On peut énoncer le théorème suivant:

Théorème II. *La somme d'une infinité dénombrable des ensembles més* $U(S')$, *qui sont de mesure nulle, sauf, peut-être un nombre fini ntre eux, est aussi un* $U(S')$.

Ce théorème est une conséquence de deux propositions suivantes: la somme d'une infinité dénombrable des ensembles $U(S')$ fermés et mesure nulle — est elle-même un $U(S')$, 2° la somme d'un $U(S')$ quelnque et d'un $U(S')$ fermé — est un $U(S')$. Nous ne donnons pas ici de démonstration de ces propositions, qui est analogue à la démonstration nnée par M^lle^ N. Bary (l. c.) pour le cas des ensembles U.

Expliquons seulement le sens des conditions (11). Soit

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

produit formel des séries trigonométriques

$$) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$) \qquad \lambda(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx).$$

---

[11]) La résolution affirmative de ce problème entrainait, à plus forte raison, la olution affirmative du problème précédent. Le problème analogue pour les enbles U était résolu par M^lle^ N. Bary (l. c.). (Cf. aussi: A. Zygmund. C. R. . 1924 et Errata dans C. R. 22. X. 1923.)

On peut démontrer sans peine que si: 1° $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = O(\varepsilon_n)$, 2° la série $\sum \frac{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}}{\varepsilon_n}$ converge, 3° la suite $\{\varepsilon_n\}$ $(\lim \varepsilon_n = 0)$ vérifie la première des conditions (11), on a: $\sqrt{A_n^2 + B_n^2} = O(\varepsilon_n)$. On voit donc que la condition 1° (11) suffit pour que la série localisante $\lambda(x)$ conserve l'ordre de grandeur des coefficients. Si la condition 2° (11) est remplie, on peut aisément construire des séries localisantes (B) possédant des propriétés requises et telles que la série $\sum \frac{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}}{\varepsilon_n}$ converge.

(Eingegangen am 12. Juli 1924.)

r la théorie riemannienne des séries trigonométriques.

Par

A. Zygmund (Varsovie).

1. On sait que la théorie des séries trigonométriques

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

nées par la suite de leurs coefficients a été fondée par Riemann.

Dans la dissertation classique de Riemann („Über die Darstellbarkeit r Funktion durch eine trigonometrische Reihe") deux points paraîssent r le rôle essentiel: 1°. le théorème sur la signification analytique de ouble intégration terme à terme, 2°. les théorèmes sur la localisation. Ce sont les théorèmes »de localisation« qui font l'objet de ce noire.

2. La forme primitive qu'a donné Riemann à ces théorèmes n'était bien facile à débrouiller et c'était le mérite de M. Rajchman d'avoir osé ces résultats d'une manière plus simple et plus accessible aux ralisations.

M. Rajchman met en évidence une opération qu'il appelle »la ciplication formelle« des séries trigonométriques; c'est cette opération est implicitement contenue dans les calculs de Riemann et paraît leur point le plus essentiel.

En appliquant la multiplication formelle on établit facilement les cés classiques de Riemann (je le montre dans ce mémoire); cette méthode est applicable à bien d'autres occasions (ensembles icité, construction des séries trigonométriques présentant quelques ularités particulières etc.), inaccessibles à la méthode classique sous sa e primitive.

3. Les résultats de M. Rajchman concernent les séries à coefficients ant vers zéro avec l'inverse de leur rang. Ce mémoire contient la

généralisation de ces résultats aux séries trigonométriques dont les coeff cients sont du type[1]) $o(n^\gamma)$ $(\gamma > -1)$ et quelques applications de méthode de la multiplication formelle à l'étude des séries trigonométriqu et des séries de Taylor.

À côté des résultats qui me paraîssent nouveaux, j'expose ici c nouvelles démonstrations de quelques théorèmes connus, dans le but simplifier les démonstrations antérieures et de mettre en relief la métho dont je fais l'usage.

Je crois qu'il est de mon devoir d'exprimer ici mes remerciemen empressés à M. Rajchman qui par ses indications et son encouragem a largement contribué aux résultats qui font l'objet de ce mémoire.

Chapitre I.

Lemmes préliminaires.

Ce chapitre est consacré à la démonstration de quelques lemmes c sont très simples, mais qui jouent un rôle fondamental dans nos raisonn ments ultérieurs.

Lemme I.[2]) *Étant donné deux suites de nombres (réels ou non)*

$$\{a_n\} \quad \text{et} \quad \{\alpha_n\} \qquad (n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$$

infinies dans les deux sens, si la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|$ *converge et si* $\lim_{n\to\pm\infty} a_n = 0$, *alors, en posant*

$$u_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p \alpha_{n-p}, \tag{1}$$

on a: $\lim_{n\to\pm\infty} u_n = 0$.

Démonstration. Supposons que $n \to +\infty$ et soit ε un nombre pos arbitraire. Soit: $M = \operatorname{Max}(a_n)$, $K = \sum_{-\infty}^{+\infty} |\alpha_p|$. Choisissons un indice $n_0 >$ tel que la condition $|n| > n_0$ entraine

$$1^\circ. \quad \sum_{p=|n|}^{\infty} |\alpha_p| + |\alpha_{-p}| \qquad \text{et} \qquad 2^\circ. \quad |a_n| < \varepsilon.$$

Pour $n > 2n_0$ on a donc:

$$\left|\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p \alpha_{n-p}\right| \leqq \left|\sum_{p=-\infty}^{-n_0-1}\right| + \left|\sum_{p=-n_0}^{n_0}\right| + \left|\sum_{p=n_0+1}^{\infty}\right| < \varepsilon K + \varepsilon M + \varepsilon K = \varepsilon(2k+$$

[1]) Notation de M. Landau qui paraît être universellement admise.

[2]) Cf. A. Rajchman, O Riemannowskiej zasadzie umiejscowienia (Sur le p cipe de localisation de Riemann). Comptes Rendus de la Soc. Scientif. de Vars 11 (1918), fascic. 2, pp. 115—152.

cas où n tend vers $-\infty$ se réduit au précédent; en effet:

$$u_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p \alpha_{n-p} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_{-p} \alpha_{n+p}$$

n posant $a_{-p} = a_p$, $\alpha_{-p} = \alpha'_p$, on a: $u_{-n} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a'_p \alpha'_{n-p}$, a'_n et α'_n véri- les conditions du lemme.

Lemme II. *Soit γ un nombre réel non négatif. Supposons que nombres a_n et α_n verifient les conditions:*

1°. $\lim_{n\to\pm\infty} \frac{a_n}{|n|^\gamma} = 0$, 2°. la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n| \cdot |n|^\gamma$ *converge.*

posant

$$u_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p \alpha_{n-p}$$

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{u_n}{|n|^\gamma} = 0.$$

Démonstration. Posons:

$$|a_0| = \varepsilon_0, \quad |\alpha_0| = \eta_0; \quad \frac{|a_n|}{|n|^\gamma} = \varepsilon_n, \quad |\alpha_n| \cdot |n|^\gamma = \eta_n \qquad (n \neq 0).$$

n positif:

$$\leqq \frac{1}{n^\gamma} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |a_p \alpha_{n-p}| = \frac{1}{n^\gamma} \Big[\sum_{p=-\infty}^{0} + \sum_{p=1}^{2n} + \sum_{p=2n+1}^{\infty} \Big]$$

$$= \frac{1}{n^\gamma} \sum_{p=-\infty}^{-1} \varepsilon_p \eta_{n-p} \left|\frac{p}{n-p}\right|^\gamma + \frac{|a_0 \alpha_n|}{n^\gamma} + \frac{1}{n^\gamma} \sum_{p=1}^{2n}{}' \varepsilon_p \eta_{n-p} \left|\frac{p}{n-p}\right|^\gamma \quad [3]$$

$$\frac{1}{\gamma} |a_n \alpha_0| + \frac{1}{n^\gamma} \sum_{p=2n+1}^{+\infty} \varepsilon_p \eta_{n-p} \left|\frac{p}{n-p}\right|^\gamma \leqq \frac{1}{n^\gamma} \sum_{p=-\infty}^{-1} \varepsilon_p \eta_{n-p} + 2^\gamma \sum_{p=1}^{2n]}{}' \varepsilon_p \eta_{n-p}$$

$$+ \frac{2^\gamma}{n^\gamma} \sum_{p=2n+1}^{\infty} \varepsilon_p \eta_{n-p} + \varepsilon_0 \eta_n + \eta_0 \varepsilon_n \leqq 2^\gamma \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_p \eta_{n-p},$$

η_n vérifiant les conditions du lemme I, notre assertion est donc ntrée pour $n \to +\infty$. Le cas $n \to -\infty$ se démontre d'une manière gue.

Lemme III. *Si pour $\gamma > 0$ on a*

1°. $\lim_{n\to\pm\infty} a_n |n|^\gamma = 0$, 2°. $\lim_{n\to\pm\infty} \alpha_n |n|^{\gamma+1} = 0$ [4]

[3]) L'apostrophe ' désigne qu'un terme de la somme est omis (dans le cas du le terme à l'indice n).

[4]) Pour $\gamma > 1$ la condition 2° peut être remplacée par $\lim_{n\to\pm\infty} \alpha_n |n|^\gamma = 0$. Cela immédiatement de la démonstration du lemme.

alors, en posant

$$u_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p \alpha_{n-p},$$

on a:

$$\lim_{n \to \pm\infty} u_n |n|^\gamma = 0.$$

Démonstration. Posons

$$|a_0| = \varepsilon_0, \quad |\alpha_0| = \eta_0; \quad |a_n| \cdot |n|^\gamma = \varepsilon_n; \quad |\alpha_n| \cdot |n|^{\gamma+1} = \eta_n.$$

Pour $n > 0$ on a

$$|u_n| \cdot n^\gamma \leqq \sum_{p=-\infty}^{+\infty}{}'' n^\gamma \frac{\varepsilon_p \eta_{n-p}}{|p|^\gamma |n-p|^{\gamma+1}} + \varepsilon_0 \eta_n + \eta_0 \varepsilon_n$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{-1} + \sum_{p=1}^{n-1} + \sum_{p=n+1}^{\infty} + o(1) = A_n + B_n + C_n + o(1).$$

On voit sans peine que

$$A_n = \sum_{p=-\infty}^{-1} n^\gamma \frac{\varepsilon_p \eta_{n-p}}{|p|^\gamma |n-p|^{\gamma+1}} \leqq \operatorname*{Max}_{k>n} \eta_k \cdot \sum_{p=-\infty}^{-1} \frac{\varepsilon_p}{|p|^\gamma |n-p|} = o(1),$$

$$C_n = \sum_{p=n+1}^{\infty} n^\gamma \frac{\varepsilon_p \eta_{n-p}}{|p|^\gamma |n-p|^{\gamma+1}} \leqq \operatorname*{Max}_{k>n} \varepsilon_k \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{\eta_{n-p}}{|n-p|^{\gamma+1}} = o(1).$$

Démontrons maintenant que $B_n = o(1)$. A cet effet il suffit au lieu de 2° faire l'hypothèse que $|\alpha_n| |n|^{\gamma+1} \leqq K$ (K = une constante).

$$B_n = \sum_{p=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} + \sum_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n-1} = B_n' + B_n'',$$

$$B_n' = \sum_{p=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n^\gamma \cdot \varepsilon_p \eta_{n-p}}{p^\gamma (n-p)^{\gamma+1}} \leqq 2^\gamma K \sum_{p=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{\varepsilon_p}{(n-p)\, p^\gamma} \leqq \frac{2^{\gamma+1} K}{n} \sum_{p=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \varepsilon_p = o(1),$$

$$B_n'' = \sum_{p=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n-1} \frac{n^\gamma \varepsilon_p \eta_{n-p}}{p^\gamma (n-p)^{\gamma+1}} \leqq 2^\gamma K \sum_{p=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n-1} \frac{\varepsilon_p}{(n-p)^{\gamma+1}}$$

$$\leqq 2^\gamma K \cdot \operatorname*{Max}_{k>\left[\frac{n}{2}\right]} \varepsilon_k \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{1+\gamma}} = o(1).$$

Le lemme est ainsi démontré.

Passons à présent à quelques remarques sur les lemmes I—III qu ultent immédiatement du raisonnement précédent.

1°. Si dans ces lemmes on remplace les sommes u_n par

$$w_n = \sum_{p=0}^{n} a_p \alpha_{n-p},$$

w_n vérifient les mêmes conditions que les u_n.

2°. Si dans les lemmes I—III on remplace les sommes u_n par

$$v_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p \alpha_{n+p},$$

v_n remplissent les mêmes conditions que les u_n. On a notamment

$$v_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p \alpha_{n+p} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_{-p} \alpha_{n-p}$$

l suffit de remarquer que les suites $\{a_p\}$ et $\{a_{-p}\}$ $(p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ ifient les mêmes conditions.

3°. Les lemmes I—III subsistent, si, à la place des sommes u_n et nous considérons les sommes

$$u'_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p \alpha_{n-p+k}; \qquad v_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p \alpha_{n+p+k},$$

ntier arbitraire mais fixe. Par exemple:

$$u'_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p \alpha_{n-p+k} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a'_p \alpha_{n-p},$$

$a'_p = a_{p+k}$; les a'_p remplissent les mêmes conditions que les a_p.

4°. Si on remplace dans les lemmes et les remarques précédentes conditions:

$$a_n \to 0; \qquad \frac{a_n}{|n|^\gamma} \to 0; \qquad a_n |n|^\gamma \to 0 \quad (\text{pour } n \to \pm\infty)$$

ectivement par les conditions:

$$|a_n| < M; \qquad \frac{|a_n|}{|n|^\gamma} < M; \qquad |a_n| \cdot |n|^\gamma < M \quad (M \text{ une constante})$$

conditions sur les α_n restant les mêmes), nous obtenons respectivement:

$$< M'; \qquad \frac{|u_n|}{|n|^\gamma} < M'; \qquad |u_n| \cdot |n|^\gamma < M' \quad (M' \text{ une constante}).$$

5°. Si les a_n et α_n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ sont des fonctions d'une able x et si, pour x appartenant à un ensemble donné E, les conditions ncées dans les lemmes et dans les remarques précédentes sont réalisées *ormément*, les thèses correspondantes sont également vérifiées unifor- ent, pour x appartenant à E.

Lemme IV. *Soit donnée une serie* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n$. *Si*

$$1^\circ.\ a_n = O\left(\frac{1}{n^{2k+1}}\right)^{5)} \qquad 2^\circ.\ \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p^j a_p = 0$$

$(j = 0, 1, 2, \ldots, k-1,\ k > 0,$ entier

on a:

$$(2) \qquad \sum_{p_k=-\infty}^{+\infty} \sum_{p_{k-1}=p_k}^{\infty} \sum_{p_{k-2}=p_{k-1}}^{\infty} \cdots \sum_{p=p_1}^{\infty} a_p = \frac{1}{k!} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p^k a_p.^{6)}$$

Ce lemme montre le lien qui existe (sous certaines restrictions) entr les restes k'itérées de la série Σa_p et la somme de la série $\Sigma p^k a_p$. Nous allons démontrer ce lemme par l'induction.

a) Soit $k = 1$. Posons

$$R_n = \sum_{p=n}^{\infty} a_p.$$

La condition 1° et l'égalité $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p = 0$ (cond. 2°) entraînent la conver gence de la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} R_n$. On a:

$$\sum_{p=-n}^{+n} R_p = \sum_{p=-n}^{+n} p R_p - \sum_{p=-n}^{+n} (p-1) R_p = \sum_{p=-n}^{+n} p R_p - \sum_{p=-n}^{n-1} p R_{p+1}$$

$$= \sum_{p=-n}^{+n} p a_p + (n+1) R_{-n} + n R_{n+1}.$$

En passant à la limite et en tenant compte de l'ordre de grandeur d R_n, on obtient:

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} R_p = \sum_{p_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=p_1}^{\infty} a_p = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p a_p.$$

b) Supposons notre lemme démontré pour tous les entiers positif $< k$. Nous le démontrerons pour k. Il nous sera commode d'introduir les notations suivantes:

$$\sum_{p=n}^{\infty} a_p = R_n^{(1)}; \qquad \sum_{p=n}^{\infty} R_p^{(i-1)} = R_n^{(i)} \qquad (i = 2, 3, \ldots)$$

---

5) La condition 1° peut être remplacée par la condition $a_n = O(n^{-2k-\varepsilon})$ (ε po sitif arbitraire) ou même par: $a_n = o(n^{-2k})$. Dans ce dernier cas pour $k = 1$, le deux séries de (2) convergent ou divergent simultanément et leur différence con verge vers zéro cf. a). Nous dirons que $a_n = O(f(n))$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ $a_n = O(|f(n)|)$ en même temps: pour $n \to +\infty$ et pour $n \to -\infty$. D'une manièr analogue pour le symbole o.

6) La proposition subsiste, mutatis mutandis, pour les sommes $\sum_0^{\infty} a_n$; la démo stration ne diffère pas essentiellement de la démonstration donnée dans le texte.

déduit aisément de la condition 1°, que toutes ces expressions pour $< i \leqq k$, ont un sens, toutes les séries qui s'y présentent étant conver-ntes. Je dis qu'aussi le premier membre de (2), c'est-à-dire la $(k+1)$-le série

$$\sum_{p_k=-\infty}^{+\infty} \sum_{p_{k-1}=p_k}^{\infty} \cdots \sum_{p=p_1}^{\infty} a_p = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} R_p^{(k)}$$

nverge.

En effet, notre lemme étant supposé vrai pour les valeurs de j: $\leqq j < k$ et en tenant compte des hypothèses concernant la convergence s zéro des séries $\Sigma p^j a_p$ $(1 \leqq j < k)$, on peut raisonner comme suit:

α_1) Les $R_n^{(1)}$ sont $O(n^{-2k})$ et comme

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} R_p^{(1)} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p a_p = 0$$

on en deduit que $R_p^{(2)}$ sont $O(n^{-2k+1})$.

α_2) Comme, par hypothèse

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} R_p^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p^2 a_p = 0$$

on a: $R_n^{(3)} = \sum_{p=n}^{\infty} R_n^{(2)} = O(n^{-2k+2}) \ldots\ldots$

in: α_{k-1}) L'ordre de grandeur de $R_n^{(k-1)}$ est $O(n^{-k-2})$ et comme, par othèse:

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} R_n^{(k-1)} = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p^{k-1} a_p = 0$$

en conclut que

$R_n^{(k)} = O(n^{-k-1})$, c'est-à-dire la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_n^{(k)}$ converge. La formule (2) t être écrite sous la forme suivante:

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} R_p^{(k)} = \frac{1}{k!} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p^k a_p.$$

n la formule connue du calcul des différences finies, d'après laquelle 'ième différence de n^k est égale à $k!$, on a

$$1 = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} A_k^{(j)} (-1)^j (p-j)^k$$

$A_k^{(j)} = \binom{k}{j} = \frac{k \cdot (k-1) \ldots (k-j+1)}{j!}$ et p un entier arbitraire. On peut écrire:

$$\sum_{p=-N}^{+N} R_p^{(k)} = \frac{1}{k!} \sum_{p=-N}^{+N} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j A_k^{(j)} R_p^{(k)}(p-j)$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \sum_{p=-N}^{+N} (-1)^j A_k^{(j)} R_p^{(k)}(p-j)^k$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \sum_{p=-N-j}^{N-j} (-1)^j A_k^{(j)} R_{p+j}^{(k)} p^k$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \sum_{p=-N}^{+N} (-1)^j A_k^{(j)} R_{p+j}^{(k)} p^k + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{p=-N}^{+N} p^k \sum_{j=0}^{k} (-1)^j A_k^{(j)} R_{p+j}^{(k)} + O\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{k!} \sum_{p=-N}^{+N} p^k a_p + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

car les sommes $\sum_{j=0}^{k} (-1)^j A_k^{(j)} R_{p+j}^{(k)}$, c'est-à-dire k 'ièmes différences de $R_p^{(k)}$, sont égales à a_p. En passant à la limite, nous obtenons l'égalité (2).

Chapitre II.

Théorèmes sur la multiplication des séries trigonométriques à coefficients tendant vers zéro.

Avant de passer à la démonstration des théorèmes signalés, rappelons quelques remarques et définitions, dont nous ferons constamment usage. Supposons donnée une série trigonométrique (convergente ou non)

$$(1) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

à coefficients tendant vers zéro: $\lim \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 0$.

Parfois il et plus avantageux de présenter la série (1) dans la forme d'une série infinie dans les deux directions:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n,$$

où le symbole $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n$ doit être compris comme $\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=-N}^{N} u_n$ (la limite existant dans le sens ordinaire ou dans le sens généralisé, rélatif à une méthode de sommation). Appliquons à cet effet aux termes de la série (1) les formules connues d'Euler. A l'aide d'un calcul facil on parvient à l'égalité:

$$(2) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^{N} (a_n - i b_n) e^{inx} \qquad (N >$$

l'on a, par définition

$$a_{-n} = a_n, \quad b_{-n} = -b_n, \quad b_0 = 0.$$

us pouvons donc écrire

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(a_n - i\,b_n)\,e^{inx},$$

ne dans le cas de la divergence ou non-sommabilité de ces séries. ppelons une fois encore que, par définition de la somme de la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n$, e dernière peut exister, sans que les sommes $\sum_{-\infty}^{0} u_n$ et $\sum_{0}^{\infty} u_n$ existent idemment, la réciproque n'est pas vraie). La formule (3) nous apprend, la série trigonométrique (1) peut être traitée comme une série de urent sur le cercle de convergence[7]).

On sait que le produit de deux séries de Laurent $\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n z^n$ et $\sum_{-\infty}^{+\infty} v_n z^n$ t être défini comme une série de Laurent $\sum_{-\infty}^{+\infty} w_n z^n$, w_n étant égale $\sum_{-\infty}^{\infty} u_p v_{n-p}$.

En tenant compte de ce fait, nous désignons par le produit *laurentien* deux séries $\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{-\infty}^{+\infty} v_n$ la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} w_n$, les w_n étant définis par égalités $w_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} u_p v_{n-p}$. On peut démontrer sur les produits de ce e plusieurs théorèmes analogues à ceux qui subsistent pour les pro- s formés par la règle de multiplication de Cauchy[8]), mais entre ces x méthodes de multiplication il y a des différences essentielles. Par mple: dans le cas de la multiplication laurentienne, les séries $\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n$ $\sum_{\infty}^{+\infty} v_n$ peuvent être convergentes, sans que leur produit laurentien puisse défini[9]).

[7]) Si les coeficients a_n et b_n ne tendent qu'assez lentement vers zéro, tous les ts de convergence de cette série de Laurent, s'ils existent, sont situés sur la nference $|z| = 1$.

[8]) Cf. p. ex. S. Chapman, Quarterly Journal 44. — M. Chapman d'ailleurs onsidère que de telles séries $\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n$ pour lesquelles les deux séries $\sum_{0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{-\infty}^{0} u_n$ ergent simultanement.

[9]) Cf. p. ex. S. Chapman l. c. Le produit laurentien des séries $\sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{(-1)^n}{|n|^\alpha}$ et $\frac{(-1)^n}{|n|^\beta}$ (convergentes pour α et β positifs) n'existe pas pour $\alpha + \beta < 1$.

Si, cependant, l'une au moins des séries $\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{-\infty}^{+\infty} v_n$ converge *absolument*, la formule pour les termes du produit laurentien subsiste et d'après le lemme I du Chapitre I, les termes w_n du produit tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$. En s'appuyant sur la formule (3), nous pouvons prendre pour définition du produit formel des séries trigonométriques

$$(4)\quad \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \quad\text{et}\quad \frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx),$$

dont l'une au moins, par exemple la deuxième, converge absolument[10] la définition du produit des séries de Laurent:

$$(4')\qquad 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(a_n-ib_n)e^{inx} \quad\text{et}\quad \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(\alpha_n-i\beta_n)e^{inx}$$

$$(a_{-n}=a_n,\quad b_{-n}=-b_n,\quad \alpha_{-n}=\alpha_n,\quad \beta_{-n}=-\beta_n)$$

c'est-à-dire, la série

$$(5)\qquad \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(A_n-iB_n)e^{inx},$$

où

$$(6)\qquad A_n-iB_n=\frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}(a_p-ib_p)(\alpha_{n-p}-i\beta_{n-p}).$$

Supposons d'abord que tous les coefficients a_p, b_p, α_p, β_p sont réels; nous pouvons écrire dans ce cas:

$$(6')\quad A_n=\frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}a_p\alpha_{n-p}-b_p\beta_{n-p};\quad B_n=\frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}a_p\beta_{n-p}+b_p\alpha_{n-p}.$$

On peut prouver aisement que les A_n et B_n vérifient aussi les égalités

$$(7)\qquad A_{-n}=A_n,\quad B_{-n}=-B_n;$$

autrement dit, la série (5) où A_n et B_n sont donnés par (6) peut être presentée dans la forme:

$$(8)\qquad \frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx).$$

Cette dernière série nous appelons le «*produit formel*»[11] des séries (4). Il est aisé de voir que le produit formel (c'est-à-dire le terme général du produit) ne dépend pas de l'ordre des multiplicateurs.

[10]) C'est-à-dire la série $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}$ converge.

[11]) Cf. Al. Rajchman, l. c. p. 120.

Si $a_p, b_p, \alpha_p, \beta_p$ sont des nombres complexes, c'est-à-dire, si nous pposons que les A_p et B_p peuvent être aussi complexes, dans ce cas formules (6) *ne sont* pas des consequences de la formule (6), et A_n B_n, en général, ne sont pas définies d'une manière univoque. Mais en ıant compte, qu'opérant avec les séries de Laurent — nous avons à re avec des séries trigonométriques, il faut donc demander que A_n et B_n nplissent les égalités (7). Les nombres uniques A_n et B_n (en géneral — nplexes) qui vérifiaient les conditions (7) — sont des nombres donnés r (6′).

En effet, la deuxième des expressions (6′) étant une fonction impaire n, on a:

$$(A_n - iB_n) + (A_{-n} - iB_{-n}) = 2 \cdot \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p \alpha_{n-p} - b_p \beta_{n-p}$$

si A_n et B_n vérifiaient les conditions (7), on obtient, comme formule ur A_n, la première des égalités (6). D'une manière analogue on obtient formule (6′) pour B_n. En partant de ces expressions pour A_n et B_n parvient par le calcul facil aux formules:

$$A_n \cos nx + B_n \sin nx$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (a_p \cos px + b_p \sin px)(\alpha_{n-p} \cos(n-p)x + \beta_{n-p} \sin(n-p)x)$$

$$- (a_p \sin px - b_p \cos px)(\alpha_{n-p} \sin(n-p)x + \beta_{n-p} \cos(n=p)x)$$

$$A_n \sin nx - B_n \cos nx$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (a_p \cos px + b_p \sin px)(\alpha_{n-p} \sin(n-p)x - \beta_{n-p} \cos(n-p)x)$$

$$+ (a_p \sin px - b_p \cos px)(\alpha_{n-p} \cos(n-p)x + \beta_{n-p} \sin(n-p)x).$$

l'on introduit pour les termes des séries trigonométriques et des séries ijuguées les notations suivantes:

$$a_p \cos px + b_p \sin px = a_p(x) \qquad b_p \cos px - a_p \sin px = b_p(x)$$
$$\alpha_p \cos px + \beta_p \sin px = \alpha_p(x) \qquad \beta_p \cos px - \alpha_p \sin px = \beta_p(x)$$
$$A_p \cos px + B_p \sin px = A_p(x) \qquad B_p \cos px - A_p \sin px = B_p(x).$$

(d'où $a_p(0) = a_p$, $b_p(0) = b_p$ etc.).

peut écrire les égalités (9) dans la forme:

$$A_p(x) = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\alpha_{n-p}(x) - b_p(x)\beta_{n-p}(x)$$

$$B_p(x) = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\beta_{n-p}(x) + b_p(x)\alpha_{n-p}(x)$$

tout-à-fait analogue à celle des expressions (6′). On voit sans peine que $A_{-n}(x) = A_n(x)$, $B_{-n}(x) = -B_n(x)$. Les formules (10) joueront un rôle fondamental dans la suite.

Remarquons encore que les théorèmes sur la multiplication des séries trigonométriques subsistent, si, au lieu des séries, on considère les intégrales trigonométriques

$$\int_0^\infty [A(n)\cos nx + B(n)\sin nx]\,dn$$

(analogues aux intégrales de Fourier) qui peuvent être écrites sous la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [A(n) - iB(n)]e^{inx}\,dn; \quad A(-n) = A(n),\ B(-n) = -B(n).$$

Les démonstrations restent, au fond, les mêmes.

Passons maintenant à la démonstration des théorèmes sur la multiplication.

Théorème I[12]). *Si les coefficients de la série trigonométrique* (*convergente ou non*)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \tag{1}$$

tendent vers zéro, et si la série

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx + \beta_n\sin nx), \quad \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} = O(n^{-3}) \tag{11}$$

pour $x \subset E$[13]) *converge vers zéro, le produit formel de ces deux séries, c'est-à-dire la série*

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx + B_n\sin nx), \tag{12}$$

A_n *et* B_n *étant donnés par la formule* (6′), *converge uniformément vers zéro pour* $x \subset E$[14]).

Démonstration. On déduit immédiatement du lemme I (Chap. I) que les coefficients A_n et B_n du produit formel tendent vers zéro.

---

[12]) Cf. Al. Rajchman, l. c. p. 128. L'énoncé, donné ici, de ce théorème et des théorèmes III et III′ ne diffère pas essentiellement de l'énoncé donné par M. Rajchman.

[13]) C'est-à-dire pour x appartenant à un ensemble E de nombres, situé sur $(0, 2\pi)$.

[14]) Évidemment dans (11) l'exposant 3 — peut être abaissé. Pour la simplicité d'écriture nous n'insistons pas sur ce point (de même dans la suite).

Puis, en désignant par $S_n(x)$ la n'ième somme partielle du produit et en tenant compte que $A_{-p}(x) = A_p(x)$, on a:

$$4\,S_n(x) = 2\sum_{k=-n}^{+n} A_k(x) = \sum_{k=-n}^{+n} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\alpha_{k-p}(x) - b_p(x)\beta_{k-p}(x).$$

changeant l'ordre de sommation (ce qui est permis) — on obtient

$$4\,S_n(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) \sum_{k=-n}^{+n} \alpha_{k-p}(x) - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x) \sum_{k=-n}^{+n} \beta_{k-p}(x)$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) \sum_{k=-n-p}^{n-p} \alpha_k(x) - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x) \sum_{k=-n-p}^{n-p} \beta_k(x).$$

on désigne par $R_n(x)$ et $T_n(x)$ les restes

$$R_n(x) = \sum_{p=n}^{\infty} a_p(x), \quad T_n(x) = \sum_{p=n}^{\infty} \beta_p(x) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

peut écrire l'égalité (13) sous la forme suivante:

$$4\,S_n(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\,[R_{-n-p}(x) - R_{n-p+1}(x)]$$

$$- \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x)\,[T_{-n-p}(x) - T_{n-p+1}(x)]$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\,R_{-n-p}(x) - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\,R_{n-p+1}(x)$$

$$- \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x)\,T_{n-p}(x) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x)\,T_{n-p+1}(x).$$

me, par hypothèse, $\sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k(x) = 0$ pour $x \subset E$ et $\sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_n(x) = 0$ (les $\beta_n(x)$ t des fonctions impaires de n), on en conclut que $R_n(x)$ et $T_n(x)$ $O(n^{-2})$ et même uniformément pour $x \subset E$. On en déduit (d'après emme I, Chap. I) que tous les quatres termes du côté droit de alité (14) tendent uniformément vers zéro pour $x \subset E$, ce qui prouve héorème.

En examinant cette démonstration et en s'appuyant sur la remarque 4° emme I (Chap. I) nous observons qu'en même temps nous avons dé- tré le théorème suivant:

Théorème II. *Si la série* (1) *a des coefficients bornés et si la* e (11) *converge vers zéro pour* $x \subset E$, *le produit formel* (13) *de ces* c *séries* (*à coefficients* A_n *et* B_n *bornés*) *a pour* $x \subset E$ *les sommes ielles uniformément bornées.*

Remarquons encore que les théorèmes sur la multiplication des séries nométriques étant au fond des théorèmes sur la multiplication entienne des séries quelconques, on en déduit que les théorèmes I et II

subsistent meme dans le cas où les coefficients $a_p, b_p, \alpha_p, \beta_p$ des séries (et (11) sont des fonctions de la variable x, pourvu que les coefficients et B_n du produit sont donnés par les formules (6′).

Nous dirons[15]) qu'une méthode quelconque de sommation est *du ty* K_0 (ou tout court est K_0), si elle satisfait aux tros conditions suivantes[16]

1°. La convergence (uniforme) de Σa_n entraîne la sommabilité (un forme) de Σa_n vers la même somme.

2°. La sommabilité (uniforme) des Σa_n et Σb_n entraîne la somm bilité (uniforme) de la série $\Sigma(a_n + b_n)$ vers la somme $(\Sigma a_n) + (\Sigma b_n)$

3°. La sommabilité (uniforme) de la série Σa_n entraîne la somm bilité (uniforme) de la série $\Sigma c a_n$ vers la somme $c\Sigma a_n$, c-étant u constante, ou, plus généralement, une fonction bornée en valeur absolu

D'une façon analogue, nous dirons qu'une méthode quelconque sommation est du type L_0, si elle satisfait aux trois conditions:

1°. Si les sommes partielles de Σa_n sont bornées (uniformément la série Σa_n est aussi finie (uniformément) par rapport à la métho considérée[17]).

2°. Si les séries Σa_n et Σb_n sont finies (uniformément) par la m thode considérée, il est de même de la série $\Sigma(a_n + b_n)$.

3°. Si la série Σa_n est finie (uniformément) par la méthode co sidérée, il est de même de la série $\Sigma c a_n$, c-étant une constante, ou, pl généralement, une fonction bornée en valeur absolue.

A l'aide de ces termes nous allons énoncer à présent deux nouveau théorèmes; la démonstration du deuxième ne différant essentiellement celle du premier, nous l'omettrons.

Théorème III.[18]) *Si les coefficients de la série* (1) *tendent ve zéro et si l'on désigne par* $\sigma(x)$ *la somme de la série* (11), *alors différence des deux séries*

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n x + B_n \sin n x) \tag{15}$$

$$\text{et} \quad \sigma(x)\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x)\right]$$

converge dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$ *uniformément vers zéro.*

---

[15]) Cf. une remarque de M. Rajchman, l. c. p. 135.

[16]) Les termes a_n peuvent dépendre d'une variable. Si l'on tient compte l'uniformité, il faut le faire dans toutes les trois conditions.

[17]) On dit que la série Σa_n est finie (uniformément) dans le sens ordinaire généralisé, si les sommes partielles, ou les expressions qui définissent la limite gé ralisée de la série Σa_n — sont bornées (uniformément).

[18]) A. Rajchman l. c. p. 135.

Théorème IV. *Si les coefficients de la série* (1) *sont bornés, la rence des deux séries* (15) — *est uniformément bornée pour* $0 \leqq x \leqq 2\pi$.

Démonstration du théorème III. Étudions le produit formel des séries

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x),$$

$$\frac{\alpha_0}{2} - \sigma(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n x + \beta_n \sin n x).$$

leuxième de ceux séries converge vers zéro, même uniformément, sur π) et possède des coefficients du type $O(n^{-3})$. Rien ne nous empêche pliquer à ces deux séries le théorème I. Le produit formel des s (1) et (11), que nous désignerons par

$$\frac{A_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n' \cos n x + B_n' \sin n x)$$

et B_n' dépendant en général de x) converge uniformément vers zéro $0, 2\pi$). Par un calcul facil on démontre que

$$A_n' = A_n - \sigma(x) a_n, \quad B_n' = B_n - \sigma(x) b_n,$$

t B_n étant les coefficients du produit formel des séries (1) et (11). à découle immédiatement le théorème III.

De ces théorèmes on déduit aisément les conséquences suivantes:

Théorème III'.[19]) *Si pour* $x \subset E$, *la somme* $\sigma(x)$ *de la série* (11) *olit la condition*

$$|\sigma(x)| \geqq k > 0, \qquad (k \text{ une konstante})$$

, *la condition nécessaire et suffisante de la sommabilité (uniforme)* $x \subset E$ *de la série* (12) *par une méthode quelconque du type* K_0, *est mmabilité (uniforme), par la même méthode, de la série* (1).

En désignant respectivement par $S(x)$ *et* $s(x)$ *les sommes ordinaires énéralisées des séries* (12) *et* (11), *on a*

$$S(x) = \sigma(x)\, s(x)^{20}).$$

Théorème IV'. *Si pour* $x \subset E$ *la condition* (16) *est remplie, la ition nécessaire et suffisante pour que la série* (12) *soit finie (uni-*

[19]) Al. Rajchman l. c.

[20]) On voit de la démonstration de ce théorème que la sommabilité uniforme série (1) entraîne la sommabilité uniforme de (12), indépendamment de la ion (16). Cette condition n'est nécessaire que pour la proposition réciproque.

formément) L_0 *pour* $x \subset E$, *est que la série* (1) *soit finie* (*uniformémen*
par la même méthode.

Remarque: Si nous ne tenons pas compte de *l'uniformité* de la so
mation, la condition (16) dans les théorèmes III et IV peut être remplac
par la condition plus faible: $\sigma(x) \neq 0$.

Démonstration du théorème III'.

1°. Supposons que la série (1) est sommable K_0 (uniformément) v
la somme $s(x)$ pour $x \subset E$. On en déduit la sommabilité (uniforme)
de la série

$$(17) \qquad \frac{\sigma(x)\, a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(x)(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

vers la somme $\sigma(x)\, s(x)$ (cond. 3°).

La série

$$(18) \quad \frac{A_0 - \sigma(x)\, a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{(A_n - \sigma(x)\, a_n)\cos nx + (B_n - \sigma(x)\, b_n)\sin nx\}$$

converge uniformément vers zéro, donc (cond. 1°) est sommable u
formément K_0 vers zéro sur $(0, 2\pi)$. En ajoutant les séries (17) et (1
et en s'appuyant sur la condition 2°, on obtient que la série (12)
sommable (uniformément) pour $x \subset E$ vers la somme $\sigma(x)\, s(x)$.

2°. Réciproquement: de la sommabilité (uniforme) K_0 de la série (1
vers la somme $S(x)$ on obtient, en soustrayant la série (18), (cond.
et 3°), la sommabilité uniforme vers la même somme de la série (1
En s'appuyant sur l'inégalité (16) on obtient (cond. 3°, pour $c = 1 : \sigma($
que pour $x \subset E$ la série (1) est sommable (uniformément) K_0 v
$S(x) : \sigma(x)$.

Remarque au théorème III'. On voit du théorème III, que
$\sigma(x) \neq 0$ et si la série (1) n'est pas sommable K_0 — la série (12) n'
sommable non plus, mais qu'alors la non-sommabilité (en particuli
la divergence) de ces deux séries est de même caractère (la différencé
séries (15) étant le zéro uniforme sur $(0, 2\pi)$). En se bornant donc
cas de convergence (le cas de sommabilité généralisée étant analogue),
en désignant respectivement par $s_n(x)$, $\sigma_n(x)$, $S_n(x)$ les n'ièmes somm
partielles des séries (1), (11) et (12), on a[21]):

$$\left.\begin{aligned} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(x) &= \sigma(x)\, \overline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n(x) \\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(x) &= \sigma(x)\, \underline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n(x) \end{aligned}\right\} \quad \sigma(x) > 0;$$

[21]) Cf. aussi Nina Bary, Comptes Rendus 3. XII. 23.

$$\left.\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(x) &= \sigma(x)\, \underline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n(x)\\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(x) &= \sigma(x)\, \overline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n(x)\end{aligned}\right\}\quad \sigma(x) < 0.$$

Remarque sur le théorème IV'. Si les sommes partielles $s_n(x)$ la série (1) sont bornées inférieurement ou supérieurement, on conclut théorème IV que les sommes $S_n(x)$ de la série (12) sont aussi bornées: même côté si $\sigma_n(x) > 0$, et du côté contraire si $\sigma(x) < 0$.

Au lieu de supposer que les $s_n(x)$ sont bornées, on peut supposer $s_n(x)$ sont $O(\varphi(n))$ on $o(\varphi(n))$, $\varphi(n)$ tendant vers $+\infty$ avec n; a alors le même ordre de grandeur pour $S_n(x)$.

Toutes ces remarques sont évidentes, mais comme des remarques ana- ues concernent tous les théorèmes sur la multiplication qui vont suivre, us les énonçons à présent pour ne pas être obligés à y revenir plus tard. us nous occuperons maintenant des théorèmes sur la multiplication pour séries conjuguées aux séries données. On sait qu'on appelle *conjuguée* a série (1) — la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin nx - b_n \cos nx)$$

, multipliée par i, et ajoutée à la série (1), nous donne une série de ssances:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - ib_n)\, e^{inx}.$$

us verrons, que sur les séries conjuguées on peut sans peine démontrer lques théorèmes d'un caractère très simple et nous aurons l'occasion n de fois d'en profiter.

Les théorèmes V et VI correspondent aux théorèmes I et III.

Théorème V.[22]) *Si la série* (1) *a des coefficients tendant vers zéro, si la série* (11) *converge vers zéro pour* $x \subset E$, *la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n \sin nx - B_n \cos nx)$$

juguée au produit formel des séries (1) *et* (11) *converge uniformément ur* $x \subset E$ (*en général — pas vers zéro*).

Théorème VI. *Si la série* (1) *a des coefficients tendant vers zéro, si nous désignerons par* $\sigma(x)$ *la somme de la série* (11), *la différence séries*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n \sin nx - B_n \cos nx) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sigma(x)(a_n \sin nx - b_n \cos nx)$$

verge uniformément sur $(0, 2\pi)$.

[22]) Les théorèmes V et VI étaient démontrés en commun par M. Rajchman et moi.

Du théorème VI on déduit immédiatement, comme un corollaire simple, la proposition suivante:

Théorème VI. *Si pour $x \subset E$ l'inégalité* (16) *est remplie, la condition nécessaire et suffisante de la sommabilité* (*uniforme*) *de la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx) \tag{19}$$

pour $x \subset E$ par une méthode quelconque de K_0, est la sommabilité (*uniforme*), *par la même méthode, de la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin nx - B_n \cos nx). \tag{20}$$

Démonstration du théorème V. En désignant par $u_n(x)$ les sommes partielles de la série (20), on a

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} A_k \sin kx - B_k \cos kx = -\sum_{k=1}^{n} B_k(x) \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\beta_{n-p}(x) + b_p(x)\alpha_{n-p}(x) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) \sum_{k=1-p}^{n-p} \beta_k(x) - \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x) \sum_{k=1-p}^{n-p} \alpha_k(x). \end{aligned}$$

En désignant respectivement par $R_n(x)$ et $T_n(x)$ les restes des séries $\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n(x)$ et $\sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_n(x)$, et en tenant compte, que pour $x \subset E$ ces restes sont $O(n^{-2})$ (uniformément) — on a:

$$\begin{aligned} u_n(x) = &-\frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} [a_p(x) T_{1-p}(x) + b_p(x) R_{1-p}(x)] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) T_{n-p+1}(x) + \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x) R_{n-p+1}(x). \end{aligned}$$

En passant à la limite, on voit que pour $x \subset E$ les deux derniers termes de cette égalité tendant *uniformément* vers zéro (Lemme I, Chap. I). On a donc *uniformément* pour $x \subset E$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} u_n(x) &= -\frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) T_{1-p}(x) + b_p(x) R_{1-p}(x) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x) R_p(x) - a_p(x) T_p(x) \end{aligned}$$

comme on démontre sans peine, on a pour $x \subset E$:

$$R_{-n}(x) = -R_{n+1}(x); \qquad T_{-n}(x) = T_{n+1}(x).$$

théorème V est donc démontré.

Passons maintenant à la démonstration du théorème VI. Si

$$\sigma(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx),$$

érie conjuguée au produit formel des séries (11′), c'est-à-dire la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A'_n \sin nx - B'_n \cos nx),$$

$A'_n = A_n - \sigma(x)a_n$, $B'_n = B_n - \sigma(x)b_n$, converge uniformément sur 2π) et cela prouve le théorème VI. En raisonnant de la même façon, me dans le cas du théorème III, on obtient la démonstration du rème VI′.

D'une manière analogue nous allons démontrer les propositions suivantes:

Théorème VII. *La série conjuguée au produit des séries trigonoriques, dont l'une (série* (1)*), a des coefficients bornés, et l'autre ie* (11)*), converge vers zéro pour $x \subset E$, possède pour $x \subset E$ les sommes ielles uniformément bornées.*

Théorème VIII. *Si les coefficients de la série* (1) *sont bornés, la érence des séries* (21) *a les sommes partielles uniformément bornées* $(0, 2\pi)$.

On en déduit aisément un corollaire analogue au celui du théorème VI.

Chapitre III.

sommabilités par les moyennes de Cesàro. Théorèmes la multiplication pour des séries trigonométriques à coefficients du type $o(n^\gamma)$ et $O(n^\gamma)$ $(\gamma \leqq 0)$.

La série $\sum_0^{\infty} u_n$ est dite sommable vers la somme s par la méthode moyennes arithmétiques de Cesàro d'ordre γ, ou tout court (C, γ), limite (pour $n \to \infty$) de l'expression

$$\frac{S_n^{(\gamma)}}{C_n^{(\gamma)}}$$

existe et est égale à s.[23]) Dans la formule (1) les quantités $S_n^{(\gamma)}$ et $C_n^{(\gamma)}$ sont définies par les égalités

$$(2) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = (1-x)^{\gamma+1} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(\gamma)} x^n; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(\gamma)} x^n = (1-x)^{-(\gamma+1)}.$$

En partant de ces expressions, on a:

$$C_0^{(\gamma)} = 1, \qquad C_n^{(\gamma)} = \binom{\gamma+n}{n} = \frac{(\gamma+1)(\gamma+2)\dots(\gamma+n)}{1\cdot 2\dots n} \qquad (n>0)$$

$$(3) \qquad S_n^{(\gamma)} = u_n + \binom{\gamma+1}{1} u_{n-1} + \binom{\gamma+2}{2} u_{n-2} + \dots + \binom{\gamma+n}{n} u_0$$

$$= s_n + \binom{\gamma}{1} s_{n-1} + \binom{\gamma+1}{2} s_{n-2} + \dots + \binom{\gamma+n-1}{n} s_0,$$

où $s_k = u_0 + u_1 + \dots + u_k$.

Nous nous bornons au cas: $\gamma > -1$, le cas: $\gamma < -1$ étant le plu souvent dépourvu de l'intêret. Nous rappelons quelques propriétés de constantes $C_n^{(\gamma)}$. Pour tout γ subsiste la formule

$$C_n^{(\gamma)} = C_n^{(\gamma+1)} - C_{n-1}^{(\gamma+1)}.$$

En profitant de la formule connue, donnée par Gauss pour la fonctio Eulerienne $\Gamma(x)$:

$$\Gamma(x+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^x}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} \qquad (x \neq -1, -2, .$$

on peut aisément obtenir l'égalité asymptotique

$$C_n^{(\gamma)} \sim \frac{n^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)}.$$

On en conclut, que pour $\gamma < -1$, la série $\sum C_n^{(\gamma)}$ converge absolumen Après ces remarques préliminaires nous pouvons passer à la démonstratio des théorèmes sur la multiplication. Commençons du cas $\gamma < 0$.

Théorème I. *Si les coefficients de la série trigonométrique*

$$(4) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

sont:

$$(5) \qquad \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = o(n^{-\gamma}) \qquad (0 < \gamma <$$

et si la série

$$(6) \qquad \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx), \qquad \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} = O(n^{-\gamma})$$

---

[23]) Si les expressions (1) sont bornées (uniformément), on dit que la série Σ est *finie* (C, γ) (uniformément).

verge vers zéro pour $x \subset E$, le produit formel

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

ces séries, qui d'après de lemme III (*Chap.* I) *a des coefficients du e* $o(n^{-\gamma})$, *est sommable* $(C, -\gamma)$ *uniformément vers zéro pour* $x \subset E$. *l'on a* O, *au lieu de* o, *dans* (5) — *la série* (7) *est uniformément ie* $(C, -\gamma)$ *pour* $x \subset E$.

Démonstration. Soit

$$S_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_n(x), \quad \text{donc:}$$

$$4 S_n(x) = \sum_{k=-n}^{+n} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\alpha_{n-p}(x) - b_p(x)\beta_{n-p}(x).$$

ons encore:

$$\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(x) = R_n(x), \qquad \sum_{k=n}^{\infty} \beta_k(x) = T_n(x) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

sque:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta_k(x) = 0, \qquad (x \subset E),$$

a, uniformément, pour $x \subset E$

$$R_n(x) = O(n^{-2}), \qquad T_n(x) = O(n^{-2}).$$

près l'égalité (8):

$$4 S_n(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) R_{-n-p}(x) - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) R_{n-p+1}(x)$$
$$- \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x) T_{-n-p}(x) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x) T_{n-p+1}(x).$$

ons la n'ième somme de Cesàro d'ordre $-\gamma$ de la série (7). En ppuyant sur les formules connues, on a:

$$4 \frac{S_n^{(-\gamma)}}{C_n^{(-\gamma)}} = 4 \frac{\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(-\gamma-1)} S_k(x)}{C_n^{(-\gamma)}}$$

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(-\gamma-1)} \left[\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) R_{-k-p}(x) - a_p(x) R_{k-p+1}(x) - b_p(x) T_{-k-p}(x) + b_p(x) T_{k-p+1}(x) \right]}{C_n^{(-\gamma)}}$$

quantités $R_n(x)$ et $T_n(x)$ étant pour $x \subset E$ uniformément $O(n^{-2})$, on réduit, d'après le lemme III (Chap. I) que les expressions

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) R_{-k-p}(x), \qquad \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) R_{k-p+1}(x),$$

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x) T_{-k-p}(x), \qquad \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x) T_{k-p+1}(x)$$

sont pour $x \subset E$ uniformément: $o(k^{-\gamma})$. Désignons par $D_k(x)$ l'une quelconque de ces expressions. Nous démontrerons que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(-\gamma-1)} D_k(x)}{C_n^{(-\gamma)}} = 0$$

pour $x \subset E$, et même uniformément.

Puisque $-1 < -\gamma < 0$, on a:

$$C_n^{(-\gamma)} \sim \frac{n^{-\gamma}}{\Gamma(-\gamma+1)}, \qquad C_n^{(-\gamma-1)} \sim \frac{n^{-\gamma-1}}{\Gamma(-\gamma)}.$$

Maintenant il suffit de s'appuyer sur le lemme III (Chap. I), en particulier sur la remarque concernant B_n.

On peut aussi sans peine démontrer le théorème suivant:

Théorème II. *La série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin nx - B_n \cos nx) \tag{11}$$

conjuguée au produit formel de deux séries trigonométriques, dont l'une la série (4), *a des coefficients vérifiant la condition* (5) *et l'autre, série* (6), *converge vers zéro pour* $x \subset E$, *est uniformément sommable* $(C, -\gamma)$ *pour* $x \subset E$. *Si* $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = O(n^{-\gamma})$ — *la série* (11) *est uniformément finie* $(C, -\gamma)$ *pour* $x \subset E$.

Démonstration. Désignons par $u_n(x)$ la n'ième somme partielle de la série (11). Évidemment:

$$u_0(x) = 0, \quad u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (A_n \sin nx - B_n \cos nx) = -\sum_{k=1}^{n} B_k(x)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\beta_{k-p}(x) + b_p(x)\alpha_{k-p}(x)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) \sum_{k=1-p}^{n-p} \beta_k(x) - \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x) \sum_{k=1-p}^{n-p} \alpha_k(x)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) T_{1-p}(x) + \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) T_{n-p+1}(x)$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x) R_{1-p}(x) + \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x) R_{n-p+1}(x),$$

profitant, comme d'habitude, des notations (9). Prenons la n'ième mme de Cesàro d'ordre $-\gamma$ pour la série (11):

$$\frac{S_n^{(-\gamma)}}{C_n^{(-\gamma)}} = \frac{\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(-\gamma-1)} u_k(x)}{C_n^{(-\gamma)}} = -\frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\,T_{1-p}(x) + b_p(x)\,R_{1-p}(x)$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(-\gamma-1)}\left[\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\,T_{k-p+1}(x) + b_p(x)\,R_{k-p+1}(x)\right]}{C_n^{(-\gamma)}}.$$

signons par $D_k(x)$ l'une quelconque des expressions

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\,T_{k-p+1}(x), \qquad \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x)\,R_{k-p+1}(x)$$

sont, pour $x \subset E$, uniformément $o(k^{-\gamma})$. Comme d'après la démonstration du théorème I, pour $x \subset E$, on a uniformément·

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(-\gamma-1)} D_k(x)}{C_n^{(-\gamma)}} = 0,$$

c

$$\lim \frac{S_n^{(-\gamma)}}{C_n^{(-\gamma)}} = -\frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\,T_{1-p}(x) + b_p(x)\,R_{1-p}(x)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x)\,R_p(x) - a_p(x)\,T_p(x)$$

ormément pour $x \subset E$, la série du second membre étant évidemment vergente. Le théorème II est ainsi démontré [24]).

Passons maintenant à la démonstration des théorèmes analogues sur ultiplication des séries dans le cas des coefficients non tendant vers . Les démonstrations auront le caractère un peu différent des démonstions précédentes, car, étant donnée une série

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx),$$

converge vers zéro dans un ensemble E, nous sommes obligés de faire ques hypothèses supplémentaires, notamment que pour $x \subset E$ la somme ette série possède un certain nombre des dérivées nulles. Désignons

[24]) Les théorèmes analogues aux théorèmes I et II subsistent aussi dans le cas: -1. Mais nous nous bornons au cas $\gamma > -1$, car, d'après un théorème enoncé M. Chapman, Proc. London Math. Society 9 (1911), p. 406 — toute série $\sum_0^\infty u_n$ ommable (C, γ) pourvu que l'on ait $u_n = o(n^\gamma)$ $(\gamma < -1,\ \gamma \neq -2, -3, \ldots)$.

par $\langle\gamma\rangle$ le plus petit entier $\geqq\gamma$; c'est-à-dire pour γ entier: $\langle\gamma\rangle=\gamma$ et pour γ non entier: $\langle\gamma\rangle=[\gamma]+1$.[25])

Théorème III. *Supposons que les coefficients de la série* (4) *sont* $o(n^\gamma)$ $(\gamma>0)$ *et que la série*

$$(12)\qquad \frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx),\quad \sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}=O(n^{-(2\gamma+3)})$$

converge avec toutes dérivées d'ordre $\leqq\langle\gamma\rangle$ *pour* $x\subset E$ *vers zéro. Alors le produit formel des séries* (4) *et* (12) *est sommable* (C,γ) *uniformément vers zéro pour* $x\subset E$.

Si les coefficients de la série (4) *sont* $O(n^\gamma)$ — *le produit considéré est uniformément fini* (C,γ) *pour* $x\subset E$.

Démonstration. Supposons d'abord que les α_n et β_n ne dépendent pas de x. Dans ce cas on peut écrire les égalités suivantes:

$$(13)\quad x\subset E\begin{cases}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)=0 & \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}(\beta_n\cos nx-\alpha_n\sin nx)=0\\ \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}n(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)=0 & \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}n(\beta_n\cos nx-\alpha_n\sin nx)=0\\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\\ \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}n^{\langle\gamma\rangle}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)=0 & \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}n^{\langle\gamma\rangle}(\beta_n\cos nx-\alpha_n\sin nx)=0\end{cases}$$

Les unes de ces égalités résultent des hypothèses faites sur les dérivées de la série (12), les autres sont des conséquences du fait que les termes des séries considérées sont des fonctions impaires de n. En employant les notations introduites dans le chapitre I, les égalités (13) peuvent être écrites dans la forme

$$(13')\quad x\subset E\begin{cases}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_n(x)=0 & \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\beta_n(x)=0\\ \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}n\alpha_n(x)=0 & \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}n\beta_n(x)=0\\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\\ \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}n^{\langle\gamma\rangle}\alpha_n(x)=0 & \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}n^{\langle\gamma\rangle}\beta_n(x)=0.\end{cases}$$

---

[25]) Par $[\gamma]$ nous désignons, comme d'habitude, le plus grand entier ne dépassant pas γ.

ons de plus

) $\sum_{p=n}^{\infty} \alpha_p(x) = R_n^{(1)}(x) \qquad \sum_{p=n}^{\infty} \beta_p(x) = T_n^{(1)}(x)$

$\sum_{p=n}^{\infty} R_p^{(i)}(x) = R_n^{(i+1)}(x) \quad \sum_{p=n}^{\infty} T_p^{(i)}(x) = T_n^{(i+1)}(x) \qquad i = 1, \ldots, \langle\gamma\rangle.$

s'appuyant sur les égalités (13′) on déduit, d'après le lemme IV ap. I), que

) $\sum_{p=-\infty}^{\infty} R_p^{(j)}(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} T_p^{(j)}(x) = 0, \qquad (x \subset E,\ j = 1, 2, \ldots, \langle\gamma\rangle),$

c:

$$x \subset E \begin{cases} R_n^{(1)}(x) = O(n^{-(2\gamma+2)}) & T_n^{(1)}(x) = O(n^{-(2\gamma+2)}) \\ R_n^{(2)}(x) = O(n^{-(2\gamma+1)}) & T_n^{(2)}(x) = O(n^{-(2\gamma+1)}) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ R_n^{j}(x) = O(n^{-(2\gamma+3-j)}) & T_n^{(j)}(x) = O(n^{-(2\gamma+3-j)}) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ R_n^{\langle\gamma+1\rangle}(x) = O(n^{-(2\gamma+2-\langle\gamma\rangle)}) & T_n^{\langle\gamma+1\rangle}(x) = O(n^{-(2\gamma+2-\langle\gamma\rangle)}). \end{cases}$$

ignons par $S_n(x)$ la somme partielle du produit formel:

$$S_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k(x),$$

$$4\,S_n(x) = 2\sum_{k=-n}^{+\infty} A_k(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\,R_{-n-p}^{(1)}(x) - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\,R_{n-p+1}^{(1)}(x)$$
$$- \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x)\,T_{-n-p}^{(1)}(x) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x)\,T_{n-p+1}(x)$$
$$= D_n(x) + E_n(x) + F_n(x) + G_n(x).$$

ons la n'ième somme de Cesàro d'ordre γ pour le produit considéré.

$$\frac{S_n^{(\gamma)}}{C_n^{(\gamma)}} = \frac{4\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-1)} S_k(x)}{C_n^{(\gamma)}} = \frac{\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-1)} [D_k(x) + E_k(x) + F_k(x) + G_k(x)]}{C_n^{(\gamma)}}.$$

econd membre de cette égalité peut être décomposé en somme de re expressions tout-à-fait analogues l'une à l'autre et il suffit de ne dérer que l'une d'elles, par exemple, la première.

Nous démontrerons que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-1)} D_k(x)}{C_n^{(\gamma)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-1)} \left[\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\,R_{-k-p}^{(1)}(x)\right]}{C_n^{(\gamma)}} = 0$$

rmément pour $x \subset E$.

Supposons d'abord γ entier: $\langle\gamma\rangle = \gamma$. Nous allons montrer plus tar que des légères modifications de la démonstration peuvent la faire étendr pour tout γ positif.

Des hypothèses faites sur l'ordre de grandeur des coefficients a_n e des $R_n^{(1)}(x)$ pour $x \subset E$, résulte la convergence des séries

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) R_{-k-p}^{(1)}(x) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

on peut donc dans l'expression

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-1)} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) R_{-k-p}^{(1)}(x)$$

changer l'ordre de sommation, d'où

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-1)} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) R_{-k-p}(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) \sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-1)} R_{-k-p}^{(1)}(x).$$

L'idée directrice de la démonstration consiste en application itérée de transformation d'Abel à la somme

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-1)} R_{-k-p}^{(1)}(x). \tag{17}$$

Nous pouvons ainsi introduire les restes $R_n^{(j)}$ d'ordre de plus en plus éle et les différences des coefficients $C_n^{(j)}$; γ étant, selon l'hypothèse proviso un entier, on voit que les coefficients $C_n^{(j)}$ disparaissent après un certa nombre de transformations. En posant $C_{-1}^{(j)} = 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-1)} R_{-k-p}^{(1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-1)} [R_{-k-p}^{(2)}(x) - R_{-k-p+1}^{(2)}(x)]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} [C_{n-k}^{(\gamma-1)} - C_{n-k-1}^{(\gamma-1)}] R_{-k-p}^{(2)} - C_n^{(\gamma-1)} R_{-p+1}^{(2)}($$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-2)} R_{-k-p}^{(2)} - C_n^{(\gamma-1)} R_{-p+1}^{(2)}(x).$$

Je dis que le dernier terme peut être négligé. En effet, en subs tuant cette égalité dans l'égalité (16), on obtient que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) \sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-1)} R_{-k-p}^{(1)}(x)}{C_n^{(\gamma)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) \sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-2)} R_{-k-p}^{(2)}(x)}{C_n^{(\gamma)}} - \lim_{n\to\infty} \frac{C_n^{(\gamma-1)}}{C_n^{(\gamma)}} \cdot \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) R_{-p+1}^{(1)}($$

e dernier terme du droit est uniformément $o(1)$ pour $x \subset E$, car la e $\Sigma a_p(x) R^{(1)}_{-p+1}$ converge pour $x \subset E$ et $\frac{C_n^{(\gamma-1)}}{C_n^{(\gamma)}} \leqq \frac{K}{n}$ (K — une constante épendante de n).

En appliquant plusieurs fois la transformation d'Abel à l'expression), on déduit aisément que la limite de (16) est égale à

$$\lim \frac{\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) \sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-j)} R^{(j)}_{-k-p}(x)}{C_n^{(\gamma)}} \qquad (j=1, 2, \ldots, \langle\gamma\rangle=\gamma).$$

posant dans (18) $j=\gamma$, on a:

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-j)} R^{(j)}_{-k-p}(x) = \sum_{k=0}^{n} R^{(\gamma)}_{-k-p}(x) = R^{(\gamma+1)}_{-n-p} - R^{(\gamma+1)}_{-p-1},$$

$$\frac{a_p(x) \sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-1)} R^{(1)}_{-k-p}(x)}{C_n^{(\gamma)}} = \frac{\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) R^{(\gamma+1)}_{-n-p}(x) - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) R^{(\gamma+1)}_{-p+1}(x)}{C_n^{(\gamma)}}$$

$$= \frac{\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) R^{(\gamma+1)}_{-n-p}(x)}{C_n^{(\gamma)}} + o(1).$$

que $a_p(x) = o(p^\gamma)$, $R_p^{(\gamma+1)} = O(p^{-\gamma-2})$ [26]) (uniformément pour $x \subset E$) et $\sim \frac{n^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)}$, on a, d'après le lemme II (Chap. I):

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-1)} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) R^{(1)}_{-k-p}(x)}{C_n^{(\gamma)}} = o(1)$$

formément pour $x \subset E$), ce qui démontre le théorème pour γ positif ntier.

Supposons maintenant que $\gamma \neq \langle\gamma\rangle$. Posons $\langle\gamma\rangle - \gamma = \xi$. Évidemment $\xi < 1$. Avant d'avoir établi l'égalité (18) nous n'avons fait aucun e de l'hypothèse que γ est entier. En appliquant plusieurs fois la sformation d'Abel, nous démontrons que la limite de (16) est égale limite de (18) pour $j = 1, 2, \ldots, \langle\gamma\rangle$, donc égale à

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) \sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(-\xi)} R^{\langle\gamma\rangle}_{-k-p}}{C_n^{(\gamma)}}.$$

[26]) Cf. les égalités (15′).

En appliquant une fois encore la transformation d'Abel, on trouve qu cette dernière limite est égale à

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) \sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(-\xi-1)} R_{-k-p}^{(\gamma+1)}(x)}{C_n^{(\gamma)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(-\xi-1)} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) R_{-k-p}^{(\gamma+1)}}{C_n^{(\gamma)}}$$

Puisque $a_p(x) = o(p^\gamma)$, $R_p^{(\gamma+1)} = O(p^{-(\gamma+2-\xi)})$, on a, d'après le lemme (Chap. I),

$$\left| \frac{\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) R_{-k-p}^{(\gamma+1)}(x)}{C_n^{(\gamma)}} \right| \leqq \varepsilon_k(x)$$

où $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$ (uniformément pour $x \subset E$). La série $\Sigma C_k^{(-\xi-1)}$ étant a solument convergente, on déduit du lemme I la conclusion suivant pour $x \subset E$, on a uniformément: $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(-\xi-1)} \varepsilon_k(x) = 0$, ce qui prouve première partie du théorème pour tout $\gamma > 0$. Si $a_p(x) = O(p^\gamma)$, quantités $\varepsilon_k(x)$ sont uniformément bornées pour $x \subset E$, donc $\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(-\xi-1)} \varepsilon_k(x)$ sont uniformément bornées pour $x \subset E$. Cela prouve deuxième partie du théorème.

Remarque. Cette démonstration est valable même dans les cas d α_n et β_n dépendant de x, pourvu que les conditions (13) soient rempli Cela a lieu toujours, si c'est ne que le premier coefficient (c'est-à-dire de la série (12) qui dépend de x et si les premières dérivées de cet série et de α_0 sont égales à zéro pour $x \subset E$.

Évidemment, dans le théorème V, la sommabilité (C, γ) du produit le résultat le plus fort que l'on puisse obtenir, car les coefficients produit sont d'ordre $o(n^\gamma)$ et dans le cas général *précisement* $o(n$ Donc la sommabilité du produit (C, γ') $(\gamma' < \gamma)$ est *en général* imp sible [27]).

Les remarques analogues concernent aussi les théorèmes I et III.

Théorème IV. *La série trigonométrique conjuguée au produit for des séries* (4) *et* (12), *dont la première a les coefficients d'ordre* $o(n^\gamma)$ $(\gamma >$ *et la seconde converge avec ses* $\langle\gamma\rangle$ *premières dérivées vers zéro pour* $x \subset$ *est sommable* (C, γ) *uniformément pour* $x \subset E$. *Si les coefficients de série* (4) *sont* $O(n^\gamma)$ — *le produit est uniformément fini* (C, γ) *p* $x \subset E$.

---

[27]) On voit sans peine que les n'ièmes sommes de Cesàro, d'ordre $(\gamma' < \gamma)$, produit considéré sont $o(n^{\gamma-\gamma'})$.

Démonstration. En désignant, comme d'habitude, par $t_n(x)$ la
ne somme partielle de la série:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n \sin n x - B_n \cos n x),$$

guée au produit formel, on a

$$-2t_n(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\,T_{1-p}(x) - a_p(x)\,T_{n-p+1}(x) + b_p(x)\,R_{1-p}(x) - b_p(x)\,R_{n-p+1}(x),$$

$$R_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(x), \quad T_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty}\beta_k(x).$$

désignant par $\frac{S_n^{(\gamma)}}{C_n^{(\gamma)}}$ la n'ième somme de Cesàro d'ordre γ pour la
(19), on obtient

$$-2\frac{S_n^{(\gamma)}}{C_n^{(\gamma)}} = -2\frac{\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-1)}\,t_k(x)}{C_n^{(\gamma)}} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\,T_{1-p}(x) + b_p(x)\,R_{1-p}(x) - \frac{\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-1)}[\Sigma\, a_p(x)\,T_{k-p+1}(x) + b_p(x)\,R_{k-p+1}(x)]}{C_n^{(\gamma)}}.$$

Des raisonnements analogues à ceux que nous avons appliqués dans
émonstration du théorème V, donnent que, pour $x \subset E$, on a uni-
ément

$$-2\frac{S_n^{(\gamma)}}{C_n^{(\gamma)}} = \frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\,T_{1-p}(x) + b_p(x)\,R_{1-p}(x) + o(1),$$

après un calcul facil:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^{(\gamma)}}{C_n^{(\gamma)}} = \frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x)\,R_p(x) - a_p(x)\,T_p(x)$$

ormément pour $x \subset E$).

La série du seconde membre converge, $R_n(x)$ et $T_n(x)$ étant d'ordre
$\left(-\frac{1}{2\gamma+2}\right)$ pour $x \subset E$.

Passons maintenant aux conséquences des théorèmes I—VI. Généra-
d'abord quelques notions, dont nous avons fait usage dans le cha-
précédent. Soit γ un nombre réel quelconque > -1. Nous dirons
e méthode de sommation est du type K_γ (ou tout court — est K_γ),
le remplit les trois conditions suivantes (si l'on tient compte de
ormité, il faut le faire dans toutes les trois conditions).

1°. La sommabilité (uniforme) (C, γ) de la série Σa_n entraine sommabilité (uniforme) de cette série par une méthode quelconque K_γ v la même somme.

2°. La sommabilité (uniforme) K_γ des séries Σa_n et Σb_n entrai la sommabilité (uniforme) de la série $\Sigma(a_n + b_n)$ et on a: $\Sigma(a_n + b_n) = \Sigma a_n + \Sigma b_n$.

3°. La sommabilité (uniforme) K_γ de la série Σa_n entraine la so mabilité (uniforme) de la série $\Sigma c a_n$ vers la somme $c\Sigma a_n$, c-étant nombre constant ou une quantité variable, mais bornée en valeur absol

D'une manière analogue on peut définir L_γ, une classe des somm tions vérifiant les trois conditions analogues, que l'on obtient en remplaç le terme «sommable» par «fini». Pour $\gamma = 0$ les notions K_0 et L_0 finies par ces conditions sont, évidemment, identiques aux notions K_0 et définies antérieurement.

Théorème V. *Désignons par*

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \tag{20}$$

le produit formel des deux séries trigonométriques

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = o(n^{-\gamma}) \ (o < \gamma < \tag{21}$$

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx), \quad \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} = O(n^{-3}) \tag{22}$$

et soit $\sigma(x)$ la somme de la série (22). *Alors les deux différences*

$$\frac{A_0}{2} - \sigma(x)\,\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{(A_n \cos nx + B_n \sin nx) - \sigma(x)(a_n \cos nx + b_n \sin \tag{23}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{(A_n \sin nx - B_n \cos nx) - \sigma(x)(a_n \sin nx - b_n \cos$$

sont sommables $(C, -\gamma)$ uniformément sur $(0, 2\pi)$ et de plus la prem vers zéro.

Théorème VI. *Soit* (20) *le produit formel des séries*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = o\,(n^\gamma) (\gamma > 0) \tag{24}$$

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx), \quad \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} = O(n^{-(2\gamma+3)}). \tag{25}$$

gnons par $\sigma(x)$ *la somme de la série* (25) *et supposons que pour* E *on a:* $\sigma'(x) = \sigma''(x) = \ldots = \sigma^{(\gamma)}(x) = 0$. *Alors les deux séries* (23) *pour* $x \subset E$ *sommables uniformément* (C, γ), *la somme de la première zéro.*

Si l'on remplace dans (21) et (24) le symbole o par O — on obtient les séries (23) sont *finies* uniformément.

Démonstration du théorème V. Désignons par

$$\frac{A_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n' \cos nx + B_n' \sin nx)$$

oduit formel des séries: (21) et

$$\frac{\alpha_0}{2} - \sigma(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx).$$

btient alors, en vertu des théorèmes I et III de ce chapitre que éries

$$\frac{A_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n' \cos nx + B_n' \sin nx) \text{ et } (28)\ \sum_{n=1}^{\infty}(A_n' \sin nx - B_n' \cos nx)$$

sommables uniformément $(C, -\gamma)$ sur $(0, 2\pi)$, la somme de la (26) étant zéro. Maintenant il suffit de remarquer que $A_n' = A_n - \sigma(x)a_n$ $_n' = B_n - \sigma(x)b_n$.

Démonstration du théorème VI. Cette démonstration ne diffère ssentiellement de celle du théorème VII. Pour démontrer, par exemple, le produit des séries (24) et (27) est sommable uniformément (C, γ) zéro pour $x \subset E$, on n'a que s'appuyer sur la remarque finale con- nt la démonstration du théorème V.

Des théorèmes V et VI on peut déduire, comme conséquences, les èmes suivants (les démonstrations étant immédiates, nous les omettons).

Théorème V'. *Supposons que pour* $x \subset E$ *on a:* $\sigma(x) \geqq k > 0$ *une constante), alors la condition nécessaire et suffisante de la somma- (uniforme) de la série* (20) *pour* $x \subset E$ *par une quelconque des odes* $K_{-\gamma}$, *est la sommabilité (uniforme) par la même méthode de la* (21)[28]. *Une remarque analogue pour les séries conjuguées.*

Théorème VI. *Supposons que pour* $x \subset E$ *on a:* $\sigma(x) \geqq k > 0$, $= \sigma''(x) = \ldots = \sigma^{(\gamma)}(x) = 0$. *Alors, pour que la série* (20) *soit nable (uniformément)* K_γ *pour* $x \subset E$, *il faut et il suffit que la série le soit aussi*[28]. *De même pour les séries conjuguées.*

[28]) Si l'on désigne respectivement par $S(x)$ et $s(x)$ les sommes généralisées es existent) des séries (20) et (21) (ou (24)), on a pour $x \subset E$: $S(x) = \sigma(x)s(x)$.

Si l'on remplace dans (21) et (24) o par O, on peut énoncer l théorèmes analogues en substituant au lieu «sommable» le mot «fin Nous n'insistons pas sur ce point.

En rapprochant les démonstrations des théorèmes I—VIII on peut rendre compte des différences qu'il y a entre les deux cas: $\gamma < 0$ et $\gamma >$ Dans le premier cas, pour la sommabilité vers zéro du produit des de séries il suffisait que la série $\frac{\alpha_0}{2} + \sum(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$ possédâ les coëfficients suffisammement petits et la somme égale à zéro. Da le cas $\gamma > 0$, ces conditions, tout en restant nécessaires, ne sont pl suffisantes et il faut supposer qu'un certain nombre des dérivées premiè de la fonction $\sigma(x)$ s'évanouisse dans l'ensemble considéré E.

Cette condition supplémentaire, concernant les dérivées de la série, essentielle dans le cas $\gamma > 0$. Cela peut être mis en évidence par l'exem très simple que je dois à M. Rajchman. Considérons le produit form des séries

$$1°. \quad \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx + \ldots \qquad 2°. \quad \sin x.$$

La première de ces séries a les coefficients bornés [29]), la deuxiè peut être traitée, évidemment comme une série trigonométrique à coe cients du type $O(n^{-\gamma})$ quelque soit γ positif. La valeur de 1° et pour $x = 0$ est égale à zéro. Cependant, le calcul facil montre que produit formel de 1° et 2° est

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x, \text{ [30])}$$

c'est-à-dire est égale à 1 pour $x = 0$.

Donc, si les conditions concernant les dérivées de la fonction σ ne sont pas remplies, les théorèmes sur la multiplication formelle, d le cas des coefficients non tendant vers zéro, peuvent être en défa Ainsi dans ce cas il y a d'autres circonstances, qui peuvent avoir influe sur la sommabilité et la valeur du produit. Nous allons essayer de connaître et les étudier.

Considérons le produit formel des séries

$$(29) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = o(n^\gamma) \quad (\gamma > 0$$

[29]) C'est le cas le plus simple parmis tous les cas où les coefficients ne tend pas vers zéro.

[30]) On peut comprendre cela facilement, en tenant compte que la série 1° sommable (C, γ) $(\gamma > 0)$ vers la somme $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ et que $\left[\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} \cdot \sin x\right]$ $= \left[\frac{1+\cos x}{2}\right]_{x=0} = 1$.

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx),\quad \sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}=O\left(n^{-(2\gamma+3)}\right),$$

nous ne faisons aucune hypothèse sur la valeur de la somme et des vées de la deuxième de ces séries. Considérons aussi un polynôme nométrique

$$P(x)=\frac{\lambda_0}{2}+\sum_{(k)}(\lambda_k\cos kx+\mu_k\sin kx)$$

que

$$P(x_0)=\sigma(x_0),\quad P^{(j)}(x_0)=\sigma^{(j)}(x_0)\quad (j=1,2,\ldots,\langle\gamma\rangle).$$

La multiplication formelle est distributive. On peut donc traîter le uit de séries (29) et (30) comme la somme des produits: 1° de la (29) par $P(x)$ et 2° de la série (29) par

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)-P(x).$$

rès le théorème V, le dernier produit est sommable (C,γ) vers zéro $x=x_0$. Il suffit donc d'étudier le produit de la série (29) par le nôme trigonométrique, ou, même, par le binôme

$$\lambda_k\cos kx+\mu_k\sin kx.$$

peut, sans que les raisonnements cessent être générales, se restreindre considération du point $x=0$. Désignons par

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx)$$

oduit formel des séries (29) et (31). Considérons les sommes de son[31]) de la série (32) pour $x=0$:

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_nr^n=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}A_nr^{|n|},$$

$$A_n=\frac{1}{2}(a_{n-k}\lambda_k-b_{n-k}\mu_k+a_{n+k}\lambda_k+b_{n+k}\mu_k).$$

ons la différence

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_nr^n-\lambda_k\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nr^n\right)=\frac{1}{4}\lambda_k\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_{n-k}r^{|n|}$$

$$+\frac{1}{4}\lambda_k\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_{n+k}r^{|n|}-\frac{\mu_k}{4}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}b_{n-k}r^{|n|}+\frac{\mu_k}{4}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}b_{n+k}r^{|n|}$$

$$-\frac{\lambda_k}{4}\left[2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_nr^{|n|}\right].$$

[31]) Pour le procédé de Cesàro subsistent les résultats analogues.

Examinons les différences

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{n-k} r^{|n|} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n r^{|n|} = D_1(r), \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{n+k} r^{|n|} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n r^{|n|} = D_2(r),$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_{n+k} r^{|n|} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_{n-k} r^{|n|} = D_3(r).$$

On voit sans peine que

$$D_1(r) + D_2(r) = 2 \cdot \frac{(1-r^k)^2}{r^k} \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n + o(1) \quad [32])$$

$$D_3(r) = 2 \cdot \frac{(1-r^{2k})}{r^k} \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n + o(1).$$

Donc la différence (33) peut être écrite sous la forme

$$\lambda_k \frac{(1-r^k)^2}{2r^k} \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n + \mu_k \frac{(1-r^{2k})}{2r^k} \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n + o(1).$$

Si l'on suppose que: 1° la série (29) est sommable ou finie par le pro cédé de Poisson [33]) pour $x = 0$, 2° les coefficients b_n (c'est-à-dire le termes de la série conjuguée à (29) pour $x = 0$) *tendent vers zéro pa le procédé de Poisson*, on obtient que la différence (33) tend vers zér pour $x = 0$. En passant des binômes (31) aux polynômes $P(x)$ et e tenant compte des remarques faites tout-à-l'heure, on obtient le théorèm suivant:

Théorème VII. *Si la série trigonométrique* (29) *est sommable o finie par le procédé de Poisson pour* $x = x_0$ *et si les termes de la sér conjuguée tendent vers zéro par le procédé de Poisson pour* $x = x_0$, *différence*

$$(34) \quad \frac{A_0}{2} - \sigma(x_0)\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{(A_n \cos nx - B_n \sin nx) - \sigma(x_0)(a_n \cos nx + b_n \sin$$

est sommable vers zéro par la même méthode pour $x = x_0$.

---

[32]) Par exemple

$$D_1(r) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (r^{|n+k|} - r^{|n|}) = \sum_{n=k}^{\infty} + \sum_{n=-\infty}^{-k} + o(1) = (r^k - 1) \sum_{n=k}^{\infty} a_n r^n$$

$$+ \sum_{n=k}^{\infty} a_n (r^{n-k} - r^n) + o(1) = \left(r^k + \frac{1}{r^k} - 2\right) \sum_{n=k}^{\infty} a_n r^n + o(1) = \frac{(1-r^k)^2}{r^k} \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n + o($$

De même pour $D_2(x)$ et $D_3(x)$.

[33]) Il suffit, évidemment, de supposer que les sommes de Poisson de la sé (29) sont $o\left(\frac{1}{(1-r)^2}\right)$ pour $x = 0$.

Remarque. Évidemment, si la série (30) se réduit à un polynôme si les hypothèses concernant la série (29) sont remplies *uniformément* ur $x_0 \subset E$, la série (34) est sommable *uniformément* vers zéro pour $x_0 \subset E$.

Chapitre IV.

Sur la dérivation du produit formel.

Supposons données deux séries trigonométriques

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = o(n^\gamma) \qquad (\gamma \geqq 0)$$

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx).$$

En examinant les démonstrations des théorèmes du chapitre précét, on peut prouver, que si les coefficients de la série (2) sont suffinment petits et si pour $x = x_0$ $(x_0 \subset E)$, un nombre suffisamment nd des dérivées de la série (2) s'évanouit, alors, ce n'est pas seulent le produit formel des séries (1) et (2), mais aussi le produit formel férentié terme à terme m-fois, qui est sommable vers zéro (pour $x = x_0$), ns ce cas sommable $(C, \gamma + m)$. En précisant, on peut énoncer:

Théorème I. 1°. *Si les coefficients de la série* (2) *sont* $O(n^{-2(\gamma+m)+3})$ *i l'on a pour* $x \subset E$: $\sigma(x) = \sigma'(x) = \sigma''(x) = \ldots = \sigma^{(\gamma+m)}(x) = 0$ [34]), *rs le produit formel*

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

séries (1) *et* (2), *différentié terme-à-terme m-fois, est uniformément mable vers zéro* $(C, \gamma + m)$ *pour* $x \subset E$.

2°. *La série conjuguée au produit différentié, est uniformément mable* $(C, \gamma + m)$ *pour* $x \subset E$.

Démonstration. Supposons, pour fixer les idées, que m est un entier . En désignant par $S_n(x)$ la n'ième somme partielle de la série (3), érentiée formellement m-fois

$$S_n(x) = (-1)^{\frac{m}{2}} \sum_{k=0}^{n} k^m A_k(x), \text{ [35]}$$

[34]) $\sigma(x)$ désigne, comme auparavant, la somme de la série (2).

[35]) Dans le cas de m impair on a: $S_n(x) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sum_{k=1}^{n} B_k(x)$ et la démonion du théorème reste la même.

on a:

$$4S_n(x) = (-1)^{\frac{m}{2}} \Big[\sum_{k=-n}^{+n} k^m \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\,\alpha_{k-p}(x) - b_p(x)\beta_{k-p}(x) \Big]$$

$$= (-1)^{\frac{m}{2}} \Big[\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) \sum_{k=-n-p}^{n-1} \alpha_n(x)(k+p)^m$$

$$- \sum_{p=-n}^{+\infty} b_p(x) \sum_{k=-n-p}^{n-p} \beta_k(x)(k-p)^m \Big]$$

En décomposant $(k+p)^m$ suivant la formule de Newton

$$(k+p)^m = k^m + \binom{m}{1} k^{m-1} p + \ldots + \binom{m}{m} p^m ,$$

on peut représenter $4s_n(x)$ sous la forme d'une somme de $m+1$ termes du type

$$(5) \quad (-1)^{\frac{m}{2}} \binom{m}{j} \Big[\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\, p^j \sum_{k=-n-p}^{n-p} \alpha_k(x)\, k^{m-j}$$

$$- \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x)\, p^j \sum_{k=-n-p}^{n-p} \beta_k(x)\, k^{m-j} \Big] \qquad (0 \leqq j \leqq m)$$

On voit sans peine que chacune des expressions (5), pour j (donc $m-j$) pair, peut être considérée (à un facteur constant près) comme la n'ième somme partielle du produit formel de la série (1), différentiée formellement j fois et de la série (2), différentiée $m-j$ fois[36]). Il en est de même pour j (donc $m-j$) impair. On voit donc, en vertu de l'hypothèse faites sur les séries (1) et (2) et en s'appuyant sur le théorème III du chapitre précédent que les expressions (5) sont uniformément sommables vers zéro $(C, \gamma+j)$ $(0 \leqq j \leqq m)$ pour $x \subset E$. Donc $S_n(x)$ est uniformément sommable vers zéro $(C, \gamma+m)$ pour $x \subset E$.

2°. Supposons, comme auparavant, m pair, et désignons par $u_n(x)$ la n'iéme somme partielle de la série conjuguée à la série (3), différentiée terme-à-terme m-fois, on a

$$u_n(x) = (-1)^{\frac{m}{2}-1} \sum_{k=0}^{n} B_k(x)$$

ou

$$2u_n(x) = (-1)^{\frac{m}{2}-1} \Big[\sum_{k=0}^{n} k^m \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\,\beta_{k-p}(x) + b_p(x)\,\alpha_{k-p}(x) \Big] .$$

---

[36]) La décomposition de $S_n(x)$ en somme de $(m+1)$ termes (5) peut être traitée comme l'application *formelle* de la formule de Leibniz (concernant la n'ième dérivée du produit des deux fonctions) au produit des deux séries trigonométriques.

peut, donc, décomposer $2u_n(x)$ en somme de $m+1$ termes de la forme

$$-1)^{\frac{m}{2}}\binom{m}{j}\Big[\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\,p^j \sum_{k=-p}^{n-p} \beta_k(x)\,k^{m-j} + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x)\,p^j \sum_{k=-p}^{n-p} \alpha_k(x)\,k^{m-j}\Big].$$

raisonnement analogue au précédent montre que les expressions (6) vent être considérées (à un facteur constant près), comme les n'ièmes mes partielles de la série *conjuguée* au produit formel: de la série (1) érentiée j fois et de la série (2) différentiée $m-j$ fois. En s'appu- t donc sur le théorème IV du chapitre précédent, on voit sans peine $u_n(x)$ est uniformément sommable $(C, \gamma+m)$ pour $x \subset E$.

Théorème II. *Considérons le produit formel* (3) *des séries trigo- étriques*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \quad \sqrt{a_n^2+b_n^2}=o(n^{-\gamma}) \quad (\gamma \geqq 0)$$

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx), \quad \sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}=O(n^{-\xi}),$$

est égale à $m+3$ *pour*: $-\gamma+m \leqq 0$ *et égale à*

$$\mathrm{Max}\,[m+3, 2(-\gamma+m)+3]$$

: $-\gamma+m>0$. *Supposons que* $\sigma(x)=\sigma'(x)=\sigma''(x)=\ldots=\sigma^{(m)}(x)=0$ $x \subset E$ (m — *nombre entier et* >0). *Alors*

1°. *La série* (3), *différentiée terme à terme m-fois, est uniformément nable* $(C, -\gamma+m)$ *vers zéro* $(x \subset E)$.

2°. *La série conjuguée à cette dernière série est uniformément som- le* $(C, -\gamma+m)$ *pour* $x \subset E$.

Évidemment ce théorème n'est intéressant que pour $-\gamma+m>-1$; pouvons donc nous borner à ce dernier cas[37]). En désignant par) la n'ième somme partielle de la série (3), différentiée m-fois (nous osons, pour fixer les idées, m pair), on voit sans peine que $4S_n(x)$ se mpose en somme de $m+1$ termes (5). Il suffit de démontrer que ne de ces expressions (pour $j=0, 1, 2, \ldots, m$) est uniformément nable $(C, -\gamma+m)$ vers zéro pour $x \subset E$. Distinguons 3 cas: $\gamma+j \leqq -1$, b) $-1<\gamma+j \leqq 0$, c) $0<\gamma+j$.

a) On peut démontrer sans peine que les termes du premier groupe sont

[37]) Supposons $-\gamma+m<-1$. On peut démontrer, à l'aide du lemme III Chap. I, s coefficients de la série différentiée sont $o(n^{-\gamma+m})$, donc en vertu du théo- M. Chapman, la série différentiée est sommable $(C, -\gamma+m)$.

uniformément $o\left(\frac{1}{n}\right)$ pour $x \subset E$. En effet, on a: $a_p(x)\, p^j = o\left(\frac{1}{p}\right)$, $b_p(x) p^j = o\left(\frac{1}{n}\right)$. En s'appuyant sur la convergence vers zéro, pour $x \subset E$, des séries

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \alpha_p(x)\, p^{m-j}, \qquad \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \beta_p(x)\, p^{m-j}$$

(ce qui résulte des hypothèses faites sur $\sigma(x)$) et en introduisant, comme d'habitude, les restes de ces séries, qui sont certainement $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ pour $x \subset E$, on obtient, en vertu du lemme III (chap. 1), que les expressions (5) pour $-\gamma + j \leqq -1$ sont uniformément $o\left(\frac{1}{n}\right)$ pour $x \subset E$. On déduit d'après un théorème connu[38]), qu'elles sont uniformément sommables $(C, -1+\varepsilon)$ vers zéro pour $x \subset E$ (ε arbitraire positif).

b) Supposons $-1 < -\gamma + j \leqq 0$. Considérons un terme correspondant de (5). Je dis qu'il est sommable $(C, -\gamma + j)$ uniformément vers zéro pour $x \subset E$. Ce terme représente, à un facteur constant près, la n'ième somme partielle du produit de la série (7), différentiée j fois et de la série (8), différentiée $m - j$ fois. Comme les coefficients du premier multiplicateur sont $o(n^{-\gamma+j})$ $(-1 < -\gamma + j \leqq 0)$ et du second sont certainement $O(n^{-3})$ — il suffit de s'appuyer sur le théorème I du Chapitre précédent[39]).

c) Soit $0 < -\gamma + j$. Les termes (5) sont, en négligeant un facteur constant, les sommes partielles du produit des séries (7) et (8), différentiées respectivement j et $m - j$ fois. Les coefficients du premier multiplicateur sont $o(n^{-\gamma+j})$, et du second: $O\left(\frac{1}{n^{2(-\gamma+m)+3}} \cdot n^{m-j}\right) = O\left(\frac{1}{n^{-2\gamma+m+j+}}\right.$ $= O\left(\frac{1}{n^{2(-\gamma+j)+3}}\right)$. On voit donc, en vertu du théorème III (Chap. précédent), qu'aussi dans ce cas les termes de (5) sont uniformément sommables $(C, -\gamma + j)$ vers zéro pour $x \subset E$. La démonstration de la proposition 2, ne différant essentiellement de celle du 1°, nous l'omettrons.

Théorème III. *Supposons que pour $x \subset E$, la somme $\sigma(x)$ de la série* (2) $\left(\text{où } \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} = O\left(n^{-2(\gamma+m)+3}\right)\right)$, *vérifie les conditions*

---

[38]) Toute série convergente Σu_n à coefficients $O\left(\frac{1}{n}\right)$ est sommable $(C, -1+\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$. Il en est de même pour les suites s_n convergentes pourvu que l'on ait $S_n - S_{n-1} = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Cf. Hardy and Littlewood, Proc. Lond. Math. Soc. 2 (1914), p. 462.

[39]) Si $-\gamma + m \leqq 0$ c'est-à-dire, si le cas c) ne pas lieu, la démonstration de 1° est finie.

$(x) = \sigma''(x) = \ldots = \sigma^{((\gamma+m))}(x) = 0$ et $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = o(n^\gamma)(\gamma \geqq 0)$. *Alors, ur* $x \subset E$, *les différences des séries* [40])

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx\Big)^{(m)} \quad \text{et} \quad \sigma(x)\Big(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\Big)^{(m)},$$

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx - B_n \cos nx\Big)^{(m)} \quad \text{et} \quad \sigma(x)\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx - b_n \cos nx\Big)^{(m)}$$

t uniformément sommables $(C, \gamma + m)$, *la valeur de la première différence étant zéro.*

Théorème IV. *Si la série* (3) *est le produit formel des séries* (7) (8), *et si l'on a pour* $x \subset E$: $\sigma'(x) = \sigma''(x) = \ldots = \sigma^{(m)}(x) = 0$, *les férences* (9) *sont uniformément sommables* $(C, -\gamma + m)$ *pour* $x \subset E$. *valeur de la première différence est zéro.*

Les démonstrations de ces théorèmes ne présentent aucune difficulté. exemple, pour démontrer le théorème III, il suffit de différentier me-à-terme m-fois le produit formel des séries

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\frac{\alpha_0}{2} - \sigma(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx).$$

effet, désignons par

$$\frac{A_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n' \cos nx + B_n' \sin nx)$$

$A_n' = A_n - \sigma(x)\, a_n$, $B_n' = B_n - \sigma(x)\, b_n$) le produit formel des séries (3). n que les coefficients des séries (11) et donc (12), dépendent de x, voit sans peine que les théorèmes I et II subsistent aussi dans ce pourvu que l'on comprenne par $(A_n \cos nx + B_n \sin nx)^{(m)}$ l'expression: $\cos nx)^{(m)} + B_n (\sin nx)^{(m)}$, c'est-à-dire, si l'on traite les coefficients me constants [41]). «Différentions» donc dans ce sens la série (12); la obtenue sera la première des différences (9) [42]).

---

[40]) Nous désignons par $(\sum u_n(x))^{(p)}$ la série $\sum u_n(x)$, différentiée terme-à-terme is, c'est-à-dire: $(\sum u_n(x))^{(p)} = \sum u_n^{(p)}(x)$.

[41]) Cf. une remarque analogue concernant la démonstration du théorème III du itre précédent.

[42]) Si nous résignons de l'uniformité (c'est-à-dire, si nous supposons que l'en- le E se compose d'un seul point $x = x_0$), les démonstrations des théorèmes III V se simplifient encore, puisque au lieu de la série (11) on peut considérer la

Il est aisé de voir comment les énoncés des théorèmes I—IV doivent être modifiées si l'on remplace dans (1) et (7) le symbole o par O.

Chapitre V.

Théorèmes sur la localisation. Applications immédiates des théorèmes sur la multiplication formelle.

Avant de passer à la démonstration des théorèmes, nous introduirons quelques termes qui nous permettent de simplifier nos énoncés. Nous dirons qu'une fonction $\lambda(x)$ de période 2π est une *fonction localisante* sur l'intervalle (a, b), si: 1° $\lambda(x) \neq 0$ à l'intérieur de l'intervalle (a, b) 2° $\lambda(x) = 0$ en dehors[43]) de (a, b), 3° $\lambda(x)$, ainsi qu'un certain nombre des dérivées premières, est partout continue. Dans chaque cas particulier ce nombre des dérivées sera précisé. La condition 3° est nécessaire pour que la fonction

$$(1) \qquad \lambda(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

possède les coefficients de Fourier suffisamment petits, c'est-à-dire pour que $\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} = O(n^{-k})$, k étant un nombre positif arbitrairement donné[44]). Mais dans la plupart des cas, les propriétés de la fonction $\lambda(x)$ énoncées tout à l'heure, ne suffisent plus. Il faut souvent demander que dans un point x_0, ou même dans un intervalle (a', b') intérieur à (a, b) la fonction $\lambda(x)$, tout en étant différente de zéro, possède un certain nombre des dérivées premières égales à zéro. Dans certains cas il est avantageux de supposer que sur (a, a') (et sur (b', b)) la fonction est égale

---

série $\frac{\alpha_0}{2} - \sigma(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$ dont les coefficients ne dépendent pas de x. Il tant alors appliquer le théorème I au produit de cette dernière série et de la série (10).

[43]) Autant que la périodicité le permet.

[44]) On peut aisément construire des fonctions de ce type. Il suffit par exemple de poser (si $0 < b - a \leqq \pi$):

$$\lambda(x) = [\sin(x-a)\sin(b-x)]^{m+1} \quad \text{pour } x \subset (a, b) \quad (m \text{ entier positif}),$$
$$\lambda(x) = 0 \quad \text{pour } x \text{ non appartenant à } (a, b).$$

Cette fonction est continue avec ses dérivées d'ordre $\leqq m$. Évidemment pour $x \subset (a,$

elle est égale à un polynôme trigonométrique. Il est bien connu que la fonction ϵ possède les dérivées de tous les ordres (x réel). En profitant de cette fonction, est aisé de construire une fonction localisante, dont les coefficients sont $O(n^{-}$ quelque soit k-positif.

polynôme trigonométrique. La construction des fonctions $\lambda(x)$ de ce pe ne présente aucune difficulté [45]).

Théorème I. *Si la série trigonométrique*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

sommable P [46]) *vers zéro partout* [47]) *pour* $a < x < b$, *alors*

1°. *Cette série converge vers zéro à l'intérieur de* (a, b) *et même iformément dans* $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$.

---

[45]) On peut par exemple poser

1°. $\lambda(x) = 0$ en déhors de (a, b) sur $(0, 2\pi)$,
2°. $\lambda(x) = k \sin^m (x - a) [\sin^m (x - a') + 1]$ dans (a, a'),
3°. $\lambda(x) = l \sin^m (x - b) [\sin^m (x - b') + 1]$ dans (b, b'),
4°. $\lambda(x) = 1$ dans (a', b').

peut choisir k et l de tel façon que la fonction $\lambda(x)$, définie tout-à-l'heure, soit tinue. Cela étant remplie, cette fonction possède, évidemment, toutes ses dérivées rdre $\leqq m - 1$, continues.

[46]) C'est-à-dire par le procédé de Poisson. On voit de la démonstration du orème que ce procédé peut être remplacé par toute méthode de sommation du e K_0 pour laquelle subsistent les plus simples théorèmes sur l'unicité (par exemple le procédé de Cesàro, celle de Riemann etc. Dans ce dernier cas nous obtes l'énoncé classique de Riemann); cf. aussi l. c.[2]).

[47]) Ou, plus généralement, partout sauf peut-être d'un ensemble d'unicité. On qu'un ensemble E est un ensemble d'unicité rélatif à une méthode (M) de mation, si toute série trigonométrique, *à coefficients tendant vers zéro*, sommable) vers zéro partout, sauf peut-être dans E, a tous ses coefficients nuls. En ce qui cerne les ensembles d'unicité, M. Rajchman a démontré que tous les ensembles ombrables (Prace Matematyczno-Fizyczne **30**) et certains ensembles non denombles (Fundamenta Mathematicae **3**, Comptes Rendus 1923, 3 septembre), qu'il a mé les ensembles H, sont des ensembles d'unicité pour le procédé de Poisson. Bary a généralisé ce résultat (C. R., 3. XII. 1923) en démontrant que les embles H_σ (c'est-à-dire les ensembles obtenus par la réunion d'une infinite dénomble des ensembles H) sont aussi les ensembles d'unicité pour le procédé Poisson. Bary a démontré cela pour la convergence ordinaire, mais la démonstration reste même pour le procédé P. Il suffit de s'appuyer sur un théorème de M. Rajchman ace Mat. Fiz. loc. cit.). On voit de la démonstration de M^lle Bary (loc. cit.) on peut supposer la sommabilité vers zéro de la série (2) *presque partout*, pourvu les limites d'indétermination de cette série sont finies, sauf peut-être dans un emble du type H_σ.

Soit (M) une méthode quelconque de sommation du type K_0. Supposons que e série trigonométrique à coefficients tendant vers zéro, sommable (M) vers zéro *tout*, ait tous ses coefficients nuls. Alors les ensembles H sont des ensembles d'unicité tifs à (M). Cela résulte immédiatemment du raisonnement de M. Rajchman R., 3. IX. 1923). Probablement cette proposition subsiste si l'on remplace les enbles H par H_σ, mais je ne connais pas la démonstration de ce théorème hypothique.

2°. *La série conjuguée à* (2) *converge uniformément dans* $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ (ε *positif arbitraire*).

Démonstration. Considérons la fonction localisante $\lambda(x)$, s'évanouissant en dehors de (a, b) et possédant trois dérivées successives continues. D'après les théorèmes I et III (Chap. II) le produit des séries (1) et (2) est une série trigonométrique à coefficients tendant vers zéro et sommable P vers zéro *partout*. On en déduit que tous les coefficients du produit sont nuls[48]), donc le produit, ainsi que la série conjuguée, *convergent uniformément partout*. Comme, par définition de la fonction localisante $\lambda(x)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $k = k(\varepsilon)$ telle, que pour x appartenant à $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$, on a $|\lambda(x)| \geqq k$, on voit, en vertu des théorèmes III et IV (du Chap. II) que la série (2), ainsi que la série conjuguée, convergent uniformément dans $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$, la somme de la prémière étant zéro.

Théorème I'. *Si deux séries trigonométriques*

$$(3)\quad \frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n'\cos nx+b_n'\sin nx),\qquad \frac{a_0''}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n''\cos nx+b_n''\sin nx)$$

à coefficients tendant vers zéro, sont sommables P partout[49]) *dans* (a, b) *vers les mêmes sommes, alors*: 1° *la condition nécessaire et suffisante de la sommabilité* (*uniforme*) K_0 *d'une de ces séries pour* $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$, *est la sommabilité* (*uniforme*) *de l'autre par la même méthode et vers la même somme*, 2° *les séries conjuguées aux* (3) *sont sommables* K_0 (*uniformément ou non — simultanément*.

La démonstration consiste en l'application du théorème précédent à la différence des séries (3).

Passons maintenant au cas des séries à coefficients $o(n^{-\gamma})$ $(0<\gamma<1)$.

Théorème II. *Si la série trigonométrique*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\qquad \sqrt{a_n^2+b_n^2}=o(n^{-\gamma})\qquad (0<\gamma<1$$

est sommable P vers zéro partout[50]) *dans* (a, b), *cette série, ainsi*

---

[48]) A. Rajchman, Prace Mat. Fiz. **30**.

[49]) Ou plus généralement, partout sauf dans un ensemble d'unicité. On peut supposer que les sommabilités en question ont lieu *presque partout* dans (a, b), pourvu que les limites d'indétermination des séries (3) soient partout (ou plus généralement partout, sauf peut-être dans un ensemble du type H_σ) finies sur (a, b).

[50]) Désignons par U_γ $(0<\gamma\leq 1)$ tout ensemble E de points, situé sur $(0, 2\pi)$ vérifiant la condition suivante: toute série trigonométrique à coeficients $o(n^{-\gamma})$ convergente (ou sommable P) vers zéro partout, sauf peut-être dans E, a tous ses coefficients nuls. Évidemment, les ensembles du type H où H_σ sont aussi U_γ, mais

la série conjuguée, sont uniformément sommables $(C, -\gamma)$ *dans* $+\varepsilon, b-\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$, *la somme de la première étant zéro.*

La démonstration ne diffère pas essentiellement de celle du théorème I. aut s'appuyer sur les théorèmes I, II, V du Chap. III. On en déduit le

Théorème II′. *Si deux séries trigonométriques* (3) *à coefficients* $^{-\gamma})$ $(0 < \gamma < 1)$ *sont sommables P partout sur* (a, b) *vers les mêmes mes, les séries* (3) *sont simultanément — sommables (uniformément) non, par une méthode quelconque de* $K_{-\gamma}$ *dans* $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$.

De même pour les séries conjuguées à (3).

On peut énoncer les théorèmes analogues aux II et II′ pour le cas coefficients de $O(n^{-\gamma})$. On n'a qu'à remplacer dans II et II′ les mots *mable* $(C, -\gamma)$ *ou* $K_{-\gamma}$, par *finie* $(C, -\gamma)$ *ou* $(L, -\gamma)$.

Passons maintenant au cas des coefficients $o(n^{\gamma})$ $(\gamma > 0)$. Les démonstrations dans ce cas seront un peu plus compliquées, mais l'idée des onstrations reste la même.

Théorème III. *Si la série trigonométrique*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = o(n^{\gamma}) \qquad (0 < \gamma < 1)$$

sommable P vers zéro partout sur (a, b), *cette série, ainsi que la série uguée, sont sommables* (C, γ) *uniformément sur* $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$, *la me de la première série étant, évidemment, égale à zéro. Si l'on rem- e dans* (4) *o par O, les séries en question sont uniformément finies*[51]).

La démonstration est basée sur le théorème concernant les relations e les limites d'indétermination de la série, données par les procédés Riemann et de Poisson[52]) et dont la démonstration sera donnée

---

eut démontrer que pour tout $\gamma > 0$ existent des ensembles U_γ de mesure posi- et aussi voisine de 2π que l'on veut. Cf. A. Zygmund, Contribution à l'unicité développement trigonométrique. Math. Ztschr., ce volume. Le mot «partout» dans théorèmes II et II′ peut être remplacé par: «partout, sauf peut-être dans un ble du type U_γ».

[51]) La condition $\gamma < 1$ peut être remplacée par la condition plus faible, notam- par la condition que la série (4) integrée terme à terme deux fois, est une de Fourier (en négligeant un polynôme en x) d'une fonction intégrable L et nue sur (a, b).

On peut supposer que la série (4) est sommable vers zéro presque partout sur), pourvu que partout les limites d'indétermination de Poisson soient finies. La dernière restriction peut-être omise dans un ensemble au plus dénombrable, ur x appartenant à cet ensemble, on a

$$\lim_{r \to 1} (1-r) \left| \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n \right| = 0 .$$

[52]) Cf. A. Rajchman, C. R. 3. IX. 24 (pour le cas des coefficients tendant vers et A. Zygmund, C.R . 17. IX. 1923.

ailleurs. Désignons par $R_1(x)$, $R_2(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ respectivement l sommes inférieures et supérieures de Riemann et de Poisson de série (4). En vertu du théorème mentionné, les intervalles $(R_1(x), R_2(x$ et $(P_1(x), P(x))$ ont des points communs. Comme dans les conditio du théorème III on a: (pour $a < x < b$) $P_1(x) = P_2(x) = 0$, do $R_1(x) \leqq 0 \leqq R_2(x)$; on en déduit, d'après un théorème connu de Schwar que la série

$$\frac{a_0}{2} x^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}$$

représente une fonction linéaire sur (a, b).

Maintenant il est aisé de prouver que la série (4) et la série co juguée sont *uniformément* sommables P dans $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$.[53])

Soit $\lambda(x)$ une fonction de période 2π, égale à zéro en dehors $\left(a+\frac{\varepsilon}{2}, b-\frac{\varepsilon}{2}\right)$, égale à 1 dans $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ et égale aux polynôm trigonométriques dans $\left(a+\frac{\varepsilon}{2}, a+\varepsilon\right)$ et $\left(b-\varepsilon, b-\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Supposons,

---

[53]) En effet, soit $f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ une fonction intégrable L et soit

(A) $$f(x) \sim \frac{\mu_0}{2} + \sum (\mu_n \cos nx + \nu_n \sin nx).$$

Posons

(B) $$f(r, x) = \frac{\mu_0}{2} + \sum (\mu_n \cos nx + \nu_n \sin nx) r^n$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2}\, dt.$$

Supposons que dans l'intervalle (a, b) on a $f(x) = 0$. Alors on voit sans pe que la série (A), différentiée terme à terme k-fois (k entier positif), est uniformém sommable P vers zéro sur $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$. À cet effet il suffit de différentier l'égal (B) par rapport à x et de tenir compte que

$$\lim_{r \to 1} \frac{d^k}{dt^k} \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} = 0 \quad \text{pour: } 0 < \varepsilon \leqq t \leqq \pi.$$

On en déduit, également, la sommabilité uniforme des séries conjuguées aux sé différentiées, car la sommabilité uniforme P de la série Σa_n entraîne la sommabi uniforme de la série

$$\sum \frac{a_n}{n} \left(\text{on a } \sum \frac{a_n}{n} r^n = \int_0^r \left(\sum a_n r^{n-1}\right) dr\right).$$

Si $f(x)$ est égale dans (a, b), par exemple, à un polynôme, on peut p $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, où $f_1(x)$ est égale à zéro dans (a, b) et $f_2(x)$ est une fonct de période 2π, possédant partout un nombre des premières dérivées continues a grand que l'on veut. La dérivation terme à terme de la série de Fourier de f_2 ne présente aucune difficulté.

, que $\lambda(x)$ possède cinq dérivées successives continues. En vertu des rèmes (III et VI du Chap. III) le produit formel des séries (2) et (4) *uniformément* sommable P vers zéro en dehors de $\left(a+\frac{\varepsilon}{2}, b-\frac{\pi}{2}\right)$ dans $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$. La série conjuguée à (4) étant uniformément mable P dans $\left(a+\frac{\varepsilon}{2}, b-\frac{\varepsilon}{2}\right)$, les termes de cette série tendent P ormément vers zéro dans $\left(a+\frac{\varepsilon}{2}, b-\frac{\varepsilon}{2}\right)$. On voit donc sans peine, vertu de la remarque finale dans le Chap. III, que le produit conré est aussi dans $\left(a+\frac{\varepsilon}{2}, a+\varepsilon\right)$ et $\left(b-\varepsilon, b-\frac{\varepsilon}{2}\right)$ uniformément mable P vers zéro. Mais la série trigonométrique uniformément somle P partout vers zéro a tous ses coefficients nuls, donc converge, ainsi la série conjuguée, vers zéro. Maintenant il suffit de s'appuyer sur le théoe VI du Chap. III. En examinant cette démonstration, on voit sans peine les relations entre $R_1(x)$, $R_2(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ n'étaient nécessaires que r la démonstration de ce que la série (4) et par conséquent le terme ral de la série conjuguée, est uniformément sommable P vers zéro dans $-\frac{\varepsilon}{2}, b-\frac{\varepsilon}{2}\Big)$. Si l'on *suppose* donc, que la série (4) ($\gamma \geqq 0$ — quelue) est uniformément sommable vers zéro sur $\left(a+\frac{\varepsilon}{2}, b-\frac{\varepsilon}{2}\right)$, on en lut, que la série (4), ainsi que la série conjuguée sont uniformément mables (C, γ) dans l'intervalle $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$.

Du théorème III on déduit aisément le

Théorème III′. *Si deux séries trigonométriques* (3) *à coefficients* ′) $(0<\gamma<1)$ *sont uniformément sommables P vers la même somme* e) *sur* (a, b), *la condition nécessaire et suffisante de la sommabilité* forme) K_γ *sur* (a, b) *de l'une d'elles, est la sommabilité* (*uniforme*) *autre. De même pour les séries conjuguées.*

L'énoncé analogue subsiste si les coefficients des séries considérées $O(n^\gamma)$ $(\gamma<1)$.

En se servant des théorèmes sur la multiplication formelle, on démontre peine des théorèmes, déjà classiques, de MM. Fatou et M. Riesz.

Théorème IV (de M. Fatou). *La série de puissances*

$$F(z)=\sum \alpha_n z^n$$

efficients tendant vers zéro converge uniformément dans tout interfermé, situé sur le cercle de convergence, dont tous les points sont iers. Si $\alpha_n = O(1)$, *les sommes partielles de la série* (5) *sont uniément bornées dans l'intervalle considéré.*

Théorème IV (de M. M. Riesz). *La série de puissances* (5) *à coeffis* $O(n^\gamma)$ $(\gamma>-1)$ *est uniformément sommable* (C, γ) *dans tout*

intervalle fermé, situé sur le cercle de convergence, dont tous les point sont réguliers. Ou même:

2°. *Si* $F(z)=F(re^{i\theta})$ $(0\leqq r<1)$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ *tend (pour* $r\to 1$ *uniformément vers une limite continue*:

$$f(\theta)=\lim_{r\to 1}F(re^{i\theta}) \qquad (a<\theta<$$

et, si $a_n=o(n^\gamma)$ $(\gamma>0)$, *la série* (5) *est uniformément sommable* $(C,\gamma$ *dans* $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ *vers la somme* $f(0)$.

La démonstration du théorème M. Fatou est immédiate. Soit $(a,$ un intervalle considéré, dont tous les points sont réguliers et soit $(a', b'$ un intervalle plus vaste que (a, b), dont tous les points sont encore régulier La série (5) est pour $z=e^{i\theta}$ une série trigonométrique. Multiplions par la série de Fourier d'une fonction localisante $\lambda(x)$ rélative à $(a', b'$ Le produit formel est une série trigonométrique à coefficients tendant ve zéro, sommable P *uniformément* sur $(0, 2\pi)$ vers une fonction possédan un certain nombre des dérivées continues. Évidemment, cette dernière sér est une série de Fourier et converge uniformément partout. Donc, d'apr le théorème III′ du Chap. II, la série $\sum a_n e^{inx}$ converge uniformémen pour $a\leqq x\leqq b$. On voit sans peine que dans le cas considéré, la rég larité n'est aucunement une condition nécessaire. Il suffit que la fonctio $F(z)$ admette uniformément sur (a', b') les valeurs limites à variation borné

La démonstration des théorèmes de M. M. Riesz ne diffère pas esse tiellement de la démonstration précédente. Plaçons nous, par exemple, s conditions 1°. On considère le produit formel de la série trigonométriq $F(e^{i\theta})$ et de la fonction localisante rélative à (a', b').[54])

Ce produit (à coefficients $o(n^\gamma)$) est partout uniformément sommable vers une fonction, possédant un certain nombre de dérivées premières co tinues. Le produit est donc sommable uniformément (C, γ). En ver des théorèmes du Chap. III, on en déduit la sommabilité uniforme (C, γ) la série (5) dans (a, b). On voit, qu'aussi dans le cas considéré, la régulari peut être remplacée par la condition que les valeurs limites de $F(re^{i\theta})$ s (a, b) existent uniformément et sont à variation bornée. Pour $\gamma>0$, s'appuyant sur le théorème connu de M. M. Riesz et Chapman[55]), on v

---

[54]) Pour $\gamma>0$, les fonctions localisantes doivent être égales à 1, dans (a, b) égales aux polynômes, trigonométriques dans (a', a) et (b, b'). Dans le c $-1<\gamma<0$ nous nous appuyons sur un théorème de MM. Hardy et Littlewood, cf.

Rappelons encore que la série conjuguée à $\sum a_n e^{inx}$, est la même série, à facteur constant près.

[55]) D'après lequel la série de Fourier est sommable (C, ε) $(\varepsilon>0)$ dans t point de continuité de la fonction.

Cf. M. Riesz, Sur les séries de Dirichlet et les séries entières, C. R. 1909

la démonstration, que nous avons donné tout à l'heure, subsiste dans
s de $f(\theta)$ *continue* sur (a', b'). La partie 2° est donc démontrée[56]).
Les relations entre les d'indétermination limites de Poisson et de
mann nous permettent de généraliser un peu les théorèmes IV et IV′
le cas de $-1 < \gamma < 1$.

Théorème V. *Soit* (5) *une série de puissances à coefficients du*
$o(n^\gamma)$ $(-1 < \gamma < 1)$ *et supposons que pour* $a < \theta < b$ *les limites*
iales de $F(re^{i\theta})$ *existent et forment une fonction* $f(\theta)$ *à varia-*
bornée, alors la série (5) *est uniformément sommable* (C, γ) *dans*
$-\varepsilon, b-\varepsilon)$. *Si* $f(\theta)$ *est une fonction continue (on ne suppose rien*
lus), la série (5) *est sommable* (C, γ) *dans* $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$, *pourvu*
$0 < \gamma < 1$.

On peut même démontrer le théorème plus général que voici:

Théorème VI. *Supposons que pour* $a \leqq x \leqq b$ *les limites d'indéter-*
ation

$$\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n\right], \quad \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = o(n^\gamma) \quad (-1 < \gamma < 1)$$

finies[57]) *et intégrables L. Soit* $f(x)$ *une fonction quelconque com-*
e entre ces limites. Complétons cette fonction, en la posant égale à
en dehors de (a, b) *sur* $(0, 2\pi)$. *Alors la différence de la série*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

e la série de Fourier de $f(x)$, *ainsi que la série conjuguée à cette*
érence, sont uniformément sommables (C, γ) *dans* $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$, *la*
ur de la différence étant zéro.

---

même auteur: Sur la sommation des séries de Fourier, Acta Litterarum ac
atiarum Regiae Universitatis Hungaricae 1 (1922); S. Chapman, On non integral
s of summability, Proc. Lond. Math. Soc. 1911.

[56]) Nous avons, au fond, démontré le théorème suivant (due à M. M. Riesz): Si
rie trigonométrique à coefficients $o(n^\gamma)$ $(\gamma > 0)$ est uniformément sommable P
$a, b)$ vers une fonction continue, cette série est sommable (C, γ) uniformément
$(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$. Pour la démonstration il faut tenir compte que les coefficients
série conjuguée sont uniformément sommables P vers zéro dans $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$.
iesz énonce un théorème plus général (Sur les séries de Dirichlet, Théorème III),
ce théorème peut être aisément réduit au cas traité tout à l'heure. (Cf.
ygmund, C. R. 7. I. 1924.) Si les valeurs limites sont à variation bornée — on
supposer que $\gamma > -1$.

[57]) Nous nous bornons au cas le plus simple. Les prémisses de ces théorèmes
ent être remplacées par des moins restrictives (en particulier dans le cas de
).

En s'appuyant sur les rélations mentionnées entre les limites d'indétermination de Poisson et de Riemann, on démontre[58]) que pour $a \leqq x \leqq b$ on a

$$\frac{a_0 x^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2} = \int_a^x dy \int_a^y f(t)\,dt + Ax + B.$$

Soit

$$(7) \qquad f(x) \sim \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1} a_n' \cos nx + b_n' \sin nx.$$

Évidemment

$$\frac{a_0' x^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n' \cos nx + b_n' \sin nx}{n^2} = \int_a^x dy \int_a^y f(t)\,dt + A'x + B'$$

(A, B, A', B' étant des constants). Donc la différence des séries (6) et (7) intégrée terme-à-terme deux fois, représente une fonction linéaire dans (a, b). On en déduit, en se servant d'un raisonnement tout à fait analogue au celui du théorème III, que cette différence, ainsi que la série conjuguée, sont sommables (C, γ) uniformément pour $a + \varepsilon \leqq x \leqq b - \varepsilon$.[59, 60]

---

[58]) En se servant des théorèmes connus de M. De la Vallée-Poussin sur la dérivée deuxième généralisée (Cours d'Analyse 1, 3-ième édition).

[59]) Comme une des conséquences de ce théorème, on déduit que la série (6) est sommable (C, γ) $(\gamma > 0)$, dans tout point de continuité de $f(x)$. Cela résulte du théorème mentionné de MM. Riesz et Chapman.

Supposons $\gamma = 0$. Désignons par $s_n(x_0)$ les sommes partielles de la série (6) dans un point x_0 de continuité de f. En s'appuyant sur un théorème de MM. Hardy et Littlewood («Sur la sommation de la série de Fourier d'une fonction à carré sommable». C. R. **156**, pp. 1307–1309) on peut démontrer que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} |s_k(x_0) - f(x_0)|}{n+1} = 0.$$

Il suffit de décomposer la série (6) en somme de deux séries: 1° de la série de Fourier de la fonction $f(x)$ bornée et continue pour $x = x_0$, et 2° de la série trigonométrique à coefficients tendant vers zéro, *convergente* vers zéro dans certain voisinage du point $x = x_0$.

[60]) Soit E un ensemble fermé de mesure nulle, situé sur $(0, 2\pi)$. Supposons que la série trigonométrique (4) est sommable *partout*, sauf peut-être dans E, vers une fonction finie $f(x)$, intégrable L. Alors la différence de la série (4) et de la série de Fourier de $f(x)$ est sommable vers zéro partout, sauf peut-être dans E, la sommabilité étant uniforme dans tout intervalle fermé ne contenant pas des points de E.

En particulier, si $\gamma = 0$ et E est un ensemble fermé *d'unicité*, on a: *série trigonométrique à coefficients tendant vers zéro, sommable P partout, sauf peut être dans un ensemble fermé d'unicité, vers une fonction finie et intégrable L — est une série de Fourier de cette fonction.* Ce dernier théorème était aussi démontré indépendamment par M. Privaloff (Recueil de la Soc. Math. de Moscou, 1923).

Il est très probable que le théorème V subsiste aussi dans le cas de
, mais je n'en connais pas la démonstration. La démonstration de
héorème que nous avons donné, repose sur la localisation dans le
es *séries trigonométriques* à coefficients du type $o(n^\gamma)$ $(\gamma < 1)$, mais,
ne le montre l'exemple de la série $\sum_1^\infty n \sin nx$ (sommable $(C, 1+\varepsilon)$ vers
partout et non uniformément dans le voisinage du point $x = 0$; dans ce
la série conjuguée $\sum n \cos nx$ n'est pas sommable) le théorème VI
bsiste pas dans le cas $\gamma > 1$. Cependant, il est probable que si l'on
dère simultanément avec la série donnée la série *conjuguée* (par
ple, si l'on suppose la sommabilité P de la série conjuguée dans (a, b)),
éorème VI sur la localisation reste vrai pour $\gamma \geqq 1$. Donnons encore
ues applications de la multiplication des séries trigonométriques.

M. Fejér a démontré les deux théorèmes suivants:

1°. *Si la série de puissances*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

rge pour $|z| < 1$ *et représente une fonction continue pour* $|z| \leqq 1$,
nvergence uniforme de la partie réelle de cette série sur $(0, 2\pi)$
ne la convergence de la partie imaginaire, et réciproquement.

2°. *Si la partie réelle de la série* (8) *converge uniformément sur*
π), *la partie imaginaire converge presque partout sur* $(0, 2\pi)$.

Ces théorèmes étaient généralisés: 1° par M. M. Riesz et 2° par
rivaloff[61]). On peut démontrer sans peine que ces généralisations
des conséquences immédiates des théorèmes mentionnés de M. Fejér
s théorèmes sur la multiplication.

Théorème VII (de M. M. Riesz). *Si la série de puissances* (8)
rge pour $|z| < 1$ $(z = re^{i\theta})$ *et représente dans le secteur*
$r \leqq 1$, $a \leqq \theta \leqq b$) *une fonction continue, la convergence uniforme de*
rtie réelle de la série (8) *pour* $a \leqq \theta \leqq b$, *entraîne la convergence*
rme de la partie imaginaire dans $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$, *quelque soit* $\varepsilon > 0$.

Théorème VII′ (de M. Privaloff). *Si la composante réelle de la*
(8) *converge uniformément dans* (a, b) — *la composante imaginaire*
rge presque partout dans (a, b).

Les démonstrations étant presque identiques, nous ne prouvons que
emier de ces théorèmes. Soient

[61]) M. Riesz, Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichen für Polynome. Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. 1914. — Privaloff, L'intégrale de Cauchy. Saratoff, 1918 (en russe), Voir aussi: Recueil de la Société Mathématique de Moscou, 1923.

$$U(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b \sin n\theta), \tag{9}$$

$$V(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta) \tag{10}$$

les composantes réelle et imaginaire de la série (8). Soit $\lambda(\theta)$ un fonction localisante relative à l'intervalle (a, b). Des hypothèses faite sur $U(\theta)$ et $\lambda(\theta)$ résulte que le produit formel de $U(\theta)$ et de la séri de Fourier de $\lambda(\theta)$ converge uniformément sur $(0, 2\pi)$, donc la fonctio harmonique $H(r, \theta)$, rélative au produit, est continue pour $0 \leqq r \leqq 1$ $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$. Je dis qu'il en est de même de la fonction harmoniqu $H_1(r, \theta)$ rélative à la série conjuguée au produit considéré. Pour $a \leqq \theta \leqq$ cela résulte de nos hypothèses et du théorème VI (Chap. II) et pour non appartenant à (a, b): du théorème V (Chap. I). D'après le théorème I de M. Fejér, on en déduit, que la série conjuguée au produit, converg partout sur $(0, 2\pi)$, donc, d'après le théorème VI (Chap. I), la série $V(\theta$ converge uniformément dans $(a + \varepsilon,\ b - \varepsilon)$ [62]).

---

[62]) Dans le cas des coefficients non tendant vers zéro a lieu le théorème ana logue à celui de M. Privaloff.

Théorème. *Si la série trigonométrique* (9), *à coefficients du type* $o(n^\gamma)$ $(\gamma > 0$ *est uniformément sommable* P *pour* $a \leqq \theta \leqq b$, *la série conjuguée* (10) *est presque partou sommable* (C, γ) *dans* (a, b). *Pour* $0 < \gamma < 1$ *la condition de l'uniformité peut être omis*

La démonstration est très simple. Des hypothèses faites sur la série (9), résulte qu'elle peut être décomposée en somme de deux séries: 1° de la série d Fourier d'une fonction continue et 2° de la série trigonométrique à coefficien $o(n^\gamma)$ qui est sommable (C, γ) uniformément vers zéro dans $\left(a + \frac{\varepsilon}{2},\ b - \frac{\varepsilon}{2}\right)$. La sér conjuguée à 2° est uniformément sommable (C, γ) dans $(a + \varepsilon,\ b - \varepsilon)$, et la sér conjuguée à la série de Fourier de 1° est sommable presque partout (C, δ) quelq soit $\delta > 0$, car toute série conjuguée à la série de Fourier d'une fonction de car sommable est elle même la série de Fourier. Ce théorème peut être généralis Nous y reviendrons à une autre occasion.

L'idée de la décomposition d'une série trigonométrique possédant une propriét donnée sur un arc (a, b) en somme de deux séries: 1° de la série trigonométriq sommable uniformément vers zéro dans (a, b) et 2° de la série de Fourier d'u fonction possédant partout sur $(0, 2\pi)$ la propriété considérée, est souvent fort uti Comme un exemple nous donnons une généralisation du théorème de M. Privalo M. Privaloff a démontré (Bull. de la Soc. Math. de France, 1915) que si la fonct $f(x)$ de période 2π vérifie partout la condition de Lipschitz d'ordre α: $0 < \alpha <$ la fonction $g(x)$, conjuguée à $f(x)$ (c'est-à-dire la somme de la série conjuguée la série de Fourier de $f(x)$), la vérifie aussi. En s'appuyant sur ce théorème, démontre sans peine que si la série trigonométrique (9) à coefficients $o(n^\gamma)$ est u formément sommable P sur (a, b) vers une fonction continue, vérifiant la condition Lipschitz d'ordre $0 < \alpha < 1$, la série (10) est également sommable P sur $(a + \varepsilon, b -$

En terminant ce chapitre, nous donnons quelques applications de la tiplication aux séries trigonométriques ou à celles de puissances, préant quelques singularités concernant la convergence ou sommabilité.

Le théorème VIII, que je donne ici, n'est pas nouveau, mais la conction qui s'y rattache est très simple et mérite, peut-être, quelque ntion. Elle s'appuye sur l'existence des séries, présentant les singutés considérées *partout*.

Les premiers exemples des séries de puissances et des séries trigonoriques (à coefficients tendant vers zéro) partout (pour les séries de sances partout sur la circonférence $|z|=1$) divergentes, étaient donnés ectivement par MM. N. Lusin et H. Steinhaus[63]). On sait que emble de points, où la série trigonométrique (ou, plus généralement, suite de fonctions continues) converge ou diverge, est respectivement et $G_{\delta\sigma}$ (suivant la terminologie de M. Hausdorff[64])). Il est donc rel de se demander, si chaque ensemble $F_{\sigma\delta}$ situé sur $(0, 2\pi)$ peut être idéré comme l'ensemble des points de convergence d'une série trigonoique ou d'une série de puissances.

Le problème n'est résolu que dans des cas particuliers.

Théorème VIII[65]). *Pour tout ensemble fermé E, situé sur la cirérence* $|z|=1$, *on peut construire une série de puissances à coeffis tendant vers zéro, convergente dans E et divergente en dehors de E.*

---

une fonction lipschitzienne d'ordre α. Il suffit de s'appuyer sur le théorème nné de M. Privaloff et sur le fait que, si la série (9) est sommable P uniment vers zéro sur (a, b), la série (10) est uniformément sommable P sur $b-\varepsilon)$ vers une fonction possédant les dérivées de tous les ordres, donc cerment vérifiant la condition de Lipschitz d'ordre α (cf. la remarque [53])).

[63]) N. Lusin, Über eine Potenzreihe. Rend. del Circolo Mat. di Palermo 32, 6–390. — H. Steinhaus, Sur une série trigonométrique partout divergente. tes Rendus de la Soc. Scientif. de Varsovie 1912, p. 219–223.

[64]) Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, p. 305–306. M. Hausdorff ne par F et G, respectivement, des ensembles fermés et ouverts, par F_σ la somme infinité au plus dénombrable des ensembles F, par G_δ le produit d'une infinité us dénombrable des ensembles G. Les ensembles $F_{\sigma\delta}$ sont des produits d'une é au plus dénombrable des ensembles F_σ et les $G_{\delta\sigma}$ sont des ensembles comntaires aux $F_{\sigma\delta}$.

[65]) Ce théorème était démontré, pour la première fois, par M. Rajchman. monstration (qui s'appuye sur l'existence de la série *trigonométrique* à coeffitendant vers zéro partout divergente) n'était pas publiée. M. Mazurkiewicz l. Math. III) a donné une autre démonstration de ce théorème, en s'appuyant exemple de M. Neder. (Inauguraldissertation, Göttingen 1919).

Un théorème analogue à VIII et concernant des séries trigonométriques était tré par M. Rajchman (loc. cit.) à l'aide de la série trigonométrique diverpartout.

Démonstration. Soit $L(z)$ une série de puissances à coefficients tendant vers zéro, divergente partout pour $|z|=1$. Posons $L(e^{i\theta}) = U(\theta)+iV(\theta)$, $U(\theta)$ et $V(\theta)$ étant des séries trigonométriques à coefficients réels et tendant vers zéro. Soit $\lambda(\theta)$ une fonction de période 2π continue avec ses dérivées de trois premiers ordres qui s'annule dans E et est différente de zéro ailleurs. Désignons par $(U\lambda)$ le produit formel de la série $U(\theta)$ et de la série de Fourier de $\lambda(\theta)$, et par $(\overline{U\lambda})$ la série conjuguée à $(U\lambda)$. Je dis que la série

$$R(e^{i\theta}) = (U\lambda) + i(\overline{U\lambda})$$

présente les propriétés démandées. Il s'agit donc de démontrer que $R(e^{i\theta})$ 1° converge dans E, et 2° diverge dans $(0, 2\pi) - E$. Le 1° est évident en vertu des théorèmes I et V (du Chap. II). Supposons maintenant que θ_0 n'appartient pas à E. Deux cas peuvent se présenter: α) la série $U(\theta)$ diverge pour $\theta=\theta_0$, donc il est de même de la série $(U\lambda)$ (th. III Chap. I), donc de la série $R(e^{i\theta})$. β) La série $U(\theta)$ converge, donc la série $V(\theta)$ diverge pour $\theta=\theta_0$; d'après la théorème VI (Chap. I) la série $(U\lambda)$ diverge aussi pour $\theta=\theta_0$, donc la série $R(e^{i\theta})$ pareillement.

Dans une de ses notes M. Mazurkiewicz[66]) a démontré que pour tout procédé linéaire[67]) de sommation qui n'est pas moins puissant que la convergence ordinaire, on une peut construire série de puissances à coefficients tendant vers zéro, non sommable partout sur la circonférence $|z|=1$ par le procédé considéré. Les méthodes linéaires étant toutes du type K_0, on démontre aisément le théorème suivant[68]).

Théorème IX. *Étant donnée une méthode linéaire de sommation qui n'est pas moins puissante que la convergence ordinaire, on peut faire correspondre à tout ensemble E fermé et situé sur la circonférence* $|z|=1$ *une série de puissances à coefficients tendant vers zéro, sommable par cette méthode (et même convergente) dans E et non sommable en dehors de E.*

Le théorème de M. Mazurkiewicz et le théorème IX gagnent d'intérêt, si l'on tient compte qu'il existe des méthodes linéaires de sommation qui sont plus puissantes que le procédé de Poisson[69]). On peut donc, pour tout ensemble fermé E, situé sur la circonférence $|z|=1$

---

[66]) St. Mazurkiewicz, «Sur les séries de puissances et les séries trigonométriques non sommables» (en polonais, avec un résumé en français), Prace Mat. Fiz. 28 (1917), pp. 109–118.

[67]) Cf. O. Toeplitz, Über lineare Mittelbildungen. Prace Mat. Fiz. 28.

[68]) La démonstration est *tout-à-fait* analogue à celle du théorème VIII.

[69]) Une de telles méthodes était donnée par M. H. Steinhaus. Prace Mat. Fiz. 28.

struire une série de puissances (à coefficients tendant vers zéro) sommable par le procédé de Poisson dans E et non sommable ailleurs [70]).

Chapitre VI.

Quelques généralisations des formules de Riemann.

Soit

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

série trigonométrique à coefficients tendant vers zéro, et soit

$$F(x)=\frac{a_0x^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}.$$

s son mémoire classique [71]) Riemann a démontré que *la convergence 'a série* (1) *pour* $x=x_0$ *ne dépend que de la manière dont se com-e* $F(x)$ *autour de* $x=x_0$; c'est-à-dire, si deux séries trigonométriques befficients tendant vers zéro, possèdent dans un certain voisinage du t $x=x_0$ des fonctions $F(x)$ égales, alors ces séries convergent ou rgent simultanément pour $x=x_0$. [72]) Nous démontrerons le théorème ogue.

Théorème I. *Supposons que les coefficients de la série* (1) *sont* [γ]) $(\gamma>-1)$ *et soit* k *un entier positif et tel que* $k-\gamma>1$. *Désignons* $F(x)$ *la somme de la série* (1) *intégrée terme à terme* k*-fois. Alors ommabilité* (*uniforme*) (C,γ) *de la série* (1), *ainsi que de la série uguée à* (1), *ne dépend que de la manière dont se comporte* $F(x)$ $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$, *quelque soit* $\varepsilon>0$.

Démonstration. Supposons, pour fixer les idées, k pair et soit

$$F(x)=\frac{a_0}{2}\cdot\frac{x^k}{k!}+A_{k-1}x^{k-1}+\ldots+A_1x+A_0$$
$$+(-1)^{\frac{k}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^k},$$

[70]) En partant des séries de puissances qui convergent partout sur la circonpe $|z|=1$ et non uniformément dans tout intervalle, on démontre aisément que tout ensemble fermé E de cette circonférence on peut construire une série de nances, convergente uniformément dans E et non uniformément dans chaque talle contenant au moins un point appartenant au complémentaire de E. De pour les séries trigonométriques.

[71]) „Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe". anns Gesammelte Werke. Leipzig, Teubner.

[72]) Cf. aussi L. Neder: Zur Theorie der trigonometrischen Reihen, Math. Ann. 81. eder a donné quelques généralisations de ce théorème de Riemann. Le résultat Neder s'obtient comme le cas particulier (pour $\gamma=0$) du théorème II de ce re.

où $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$ sont des constantes. Soit donnée une autre série trigonométrique

$$(4)\qquad \frac{a'_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a'_n\cos nx+b'_n\sin nx), \qquad \sqrt{a'^2_n+b'^2_n}=o(n^\gamma)\ (\gamma>-1)$$

et soit

$$(5)\qquad F_1(x)=\frac{a'_0}{2}\cdot\frac{x^k}{k!}+A'_{k-1}x^{k-1}+\ldots+A'_1x+A'_0 +(-1)^{\frac{k}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a'_n\cos nx+b'_n\sin nx}{n^k}.$$

Évidemment les séries (3) et (5) convergent absolument et représentent des fonctions continues. Supposons que $F(x)=F_1(x)$ pour $a-\varepsilon\leqq x\leqq b+\varepsilon$. Nous démontrerons que: 1°, si l'une des séries trigonométriques (1) et (4) est sommable (uniformément) (C,γ) dans l'intervalle (a,b) vers une fonction $f(x)$, il est de même de l'autre de ces séries, 2°, la sommabilité (uniforme) (C,γ) dans (a,b) de la série conjuguée à l'une des séries (1) et (4), entraîne la sommabilité (uniforme) (C,γ) de la série conjuguée à l'autre. À cet effet il suffit de démontrer que la différence des séries (1) et (4), ainsi que la différence des séries conjuguées, sont uniformément sommables (C,γ) pour $a\leqq x\leqq b$, la valeur de la première différence étant zéro.

Cela ne présente aucune difficulté. La différence des séries (3) et (5) est égale à zéro dans l'intervalle $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$. On en déduit aisément (cf. la remarque [53]) que cette différence, ainsi que la différence des séries conjuguées, différentiées terme à terme k-fois, sont uniformément sommables P pour $a-\frac{\varepsilon}{2}\leqq x\leqq b+\frac{\varepsilon}{2}$, la valeur de la première différence étant zéro.

D'après la remarque [56]) ces séries sont aussi uniformément sommables (C,γ) et cela démontre le théorème.

On peut énoncer le principe de localisation sous une autre forme qui dans le cas $\gamma=0$ est due à Riemann (loc. cit.).

Théorème II. *Soit $\lambda(t)$ une fonction de période 2π, continue avec ses dérivées successives d'ordre suffisamment élevé* [73]), *égale à 1 pour $\alpha\leqq x\leqq\beta$ $(a<\alpha<\beta<b$;* [74]) *pour fixer les idées nous supposons que $0\leqq a<b\leqq 2\pi$) et égale à zéro en dehors de (a,b). Alors les deux suites*:

[73]) Pour $-1<\gamma<0$ il suffit que les coefficients de la série de Fourier de $\lambda(t)$ soient $O(n^{-k-3})$. Dans le cas de $\gamma\geqq 0$ il faut supposer que les coefficients de Fourier de la fonction $\lambda(t)$ sont $O(n^{-\alpha})$ où $\alpha=\mathrm{Max}\,(k+3, 2\gamma+3)$. (Cf. l'énoncé du théorème II, Chap. IV); $\lambda(x)$ possède donc certainement $k+1$ dérivées continues.

[74]) Si $\alpha=\beta$, donc l'intervalle (α,β) se réduit à un point, il faut faire l'hypothèse supplémentaire que $\lambda^{(j)}(\alpha)=0$ $(j=1,2,\ldots,k)$.

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{m=1}^{n}(a_m\cos mx+b_m\sin mx) \\ \qquad -\dfrac{(-1)^k}{2\pi}\int\limits_a^b F(t)\lambda(t)\dfrac{d^k}{dt^k}\left[\dfrac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\right]dt, \\ \sum\limits_{m=1}^{n}(a_m\sin mx-b_m\cos mx) \\ \qquad -\dfrac{(-1)^k}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\overline{F(t)\lambda(t)}\dfrac{d^k}{dt^k}\left[\dfrac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\right]dt, \\ (n=1,2,3,\ldots) \end{array}\right.$$

t uniformément sommables (C,γ) *pour* $\alpha\leqq x\leqq\beta$, *la limite généralisée la première suite étant zéro* [75]).

Dans les expressions (6) *nous désignons par* $\overline{F(t)\lambda(t)}$ *la fonction juguée à la fonction* $F(t)\lambda(t)$.

$\lambda(t)$ étant égale à zéro en dehors de (a,b), on voit sans peine que sommabilité (C,γ) *de la série conjuguée* dans (α,β) ne dépend que valeurs de la fonction $F(t)$ dans l'intervalle (a,b). Posons, pour r les idées, k-pair et désignons par $\Phi(x)$ la partie périodique de x) dans (3):

$$F(x)=P(x)+\Phi(x),\qquad \Phi(x)=(-1)^{\frac{k}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^k}.$$

La série, représentant $\Phi(x)$, converge absolument, donc il en est de ne de la série de Fourier de la fonction $\Phi(x)\lambda(x)$. [76]) On en déduit la fonction $\overline{\Phi(x)\lambda(x)}$, conjuguée à $\Phi(x)\lambda(x)$, est une fonction con- e. Si l'on tient compte que la fonction égale à $\lambda(x)P(x)$ sur $(0,2\pi)$ complétée par la condition de périodicité pour tous les x réels, possède certain nombre des dérivées successives continues, on voit aisément la fonction conjuguée $\overline{P(x)\lambda(x)}$ existe partout, étant de plus con- e. Donc la fonction

$$\overline{F(x)\lambda(x)}=\overline{\Phi(x)\lambda(x)}+\overline{P(x)\lambda(x)}$$

partout continue.

---

[75]) On suppose, que les coefficients de la série (1) sont $o(n^\gamma)$ $(\gamma>-1)$ et k est un entier tel que $k-\gamma>1$. On peut supposer même, que $k-\gamma>\frac{1}{2}$. Si coefficients de la série (1) sont $O(n^\gamma)$ $(\gamma>-1)$, les suites (6) sont uniformé- finies (C,γ) pour $\alpha\leqq x\leqq\beta$.

[76]) La série de Fourier de $\Phi(x)\lambda(x)$ étant évidemment égale au produit des s de Fourier de $\Phi(x)$ et de $\lambda(x)$.

1°. Nous démontrerons d'abord que les deux suites

$$(6a)\quad \begin{cases} \sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)-\dfrac{(-1)^k}{2\pi}\displaystyle\int_a^b \Phi(t)\lambda(t)\frac{d^k}{dt^k}\left[\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\right] \\ \sum_{m=1}^{n}(a_m\sin mx-b_m\cos mx)-\dfrac{(-1)^k}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{\Phi(t)\lambda(t)}\frac{d^k}{dt^k}\left[\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\right] \end{cases}$$

sont uniformément sommables (C,γ) pour $\alpha\leqq x\leqq\beta$, la limite de la première étant zéro.

Considérons à cet effet le produit formel

$$(7)\qquad \frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx)$$

des deux séries trigonométriques

$$(8)\quad \begin{cases} \Phi(x)=(-1)^{\frac{k}{2}}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^k}=\sum_{n=1}^{\infty}(a'_n\cos nx+b'_n\sin nx) \\ \qquad\qquad \sqrt{a'^2_n+b'^2_n}=o(n^{\gamma-k}), \\ \text{et}\qquad\qquad \lambda(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx). \end{cases}$$

Le produit formel (7) de ces séries, est la série de Fourier de la fonction $F(x)\lambda(x)$. D'après le théorème IV (du Chap. IV), les deux suites

$$(9)\quad \begin{cases} \Big[\sum_{m=1}^{n}(a'_m\cos mx+b'_m\sin mx)\Big]^{(k)}-\Big[\frac{A_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}(A_m\cos mx+B_m\sin mx)\Big]^{(k)} \\ \Big[\sum_{m=1}^{n}(a'_m\sin mx-b'_m\cos mx)\Big]^{(k)}-\Big[\sum_{m=1}^{n}(A_m\sin mx-B_m\cos mx)\Big]^{(k)} \end{cases}$$

sont, pour $\alpha\leqq x\leqq\beta$, uniformément sommables (C,γ), la première ver la limite égale à zéro. Si l'on tient compte de ce que

$$\Big[\frac{A_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}(A_m\cos mx+B_m\sin mx)\Big]^{(k)}=\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(t)\lambda(t)\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}dt\right]^{(k)}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_a^b\Phi(t)\lambda(t)\frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\right]dt$$

$$=\frac{(-1)^k}{2\pi}\int_a^b\Phi(t)\lambda(t)\frac{d^k}{dt^k}\left[\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\right]dt,$$

voit que les termes de la première des suites (6a) sont respectivement
ux aux termes de la première suite (9).

D'une manière analogue on a

$$\left[\sum_1^{\infty}(A_m \sin mx - B_m \cos mx)\right]^{(k)} = \frac{(-1)^k}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{\Phi(t)\lambda(t)}\,\frac{d^k}{dt^k}\left[\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\right]dt.$$

2°. Pour démontrer le théorème dans le cas général, il suffit de dé-
trer que les deux suites

$$u_n(x) = \frac{a_0}{2} - \frac{(-1)^k}{2\pi}\int_a^b P(t)\lambda(t)\,\frac{d^k}{dt^k}\left[\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\right]dt,$$

$$v_n(x) = \quad -\frac{(-1)^k}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{P(t)\lambda(t)}\,\frac{d^k}{dt^k}\left[\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\right]dt,$$

$P(t) = \frac{a_0 t^k}{2\cdot k!} + A_{k-1}t^{k-1} + \ldots + A_1 t + A_0$, sont uniformément som-
les $(C, -1+\varepsilon)$ pour $\alpha \leqq x \leqq \beta$, quelque soit $\varepsilon > 0$, et que la limite
a première suite est égale à zéro.

Les démonstrations étant identiques, nous nous bornons au cas des
x). Nous nous appuyons sur le théorème de MM. Hardy et
lewood [77]), d'après lequel toute série convergente (uniformément) dont
ermes sont $O\left(\frac{1}{n}\right)$ (uniformément), est sommable $(C, -1+\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$
formément). Donc toute série de Fourier d'une fonction continue
variation bornée — est uniformément sommable $(C, -1+\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$
$(0, 2\pi)$.

En intégrant k-fois par parties et en tenant compte des hypothèses
s sur la fonction $\lambda(x)$ et sur les dérivées de cette fonction, on obtient
peine:

$$u_n(x) = \frac{a_0}{2} - \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{d^k}{dt^k}[P(t)\lambda(t)]\,\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\,dt$$

$$= \frac{a_0}{2} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d^k}{dt^k}[P(t)\lambda(t)]\,\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\,dt.$$

---

[77]) Cf. la remarque [58]).

En vertu de la formule de Leibniz

$$\frac{d^k}{dt^k}[P(t)\lambda(t)] = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}P^{(j)}(t)\lambda^{(k-j)}(t)$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}P^{(j)}(t)\lambda^{(k-j)}(t) + P^{(k)}(t)\lambda(t).$$

Donc, en s'appuyant sur l'égalité $P^{(k)}(t) = \frac{a_0}{2}$, on a

$$u_n(x) = \frac{a_0}{2} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a_0}{2}\lambda(t)\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}dt$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}P^{(j)}(t)\lambda^{(k-j)}(t)\Big]\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}[1-\lambda(t)]\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}dt$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}P^{(j)}(t)\lambda^{(k-j)}(t)\Big]\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}dt.$$

Désignons par $\varphi(t)$ l'une quelconque des fonctions continues et à variation bornée:

$$1-\lambda(t), \qquad \binom{k}{j}P^{(j)}(t)\lambda^{(k-j)}(t) \qquad (j=0,1,2,\ldots,k-1$$

s'évanouissant dans (α,β). Il suffit de démontrer que la suite

$$w_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}dt$$

est uniformément sommable $(C,-1+\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ vers zéro pour $\alpha\leqq x\leqq$ Mais cela est évident si l'on remarque que $w_n(x)$ est la n'ième somm partielle de la série de Fourier d'une fonction continue et à variatio bornée.

(Eingegangen am 12. Juli 1924.)

Über Liouvillesche Mannigfaltigkeiten[1]).

Von

Otto Haupt in Erlangen und Emil Hilb in Würzburg.

Einleitung.

Die von Stäckel[2]) aufgeworfene Frage nach mechanischen Systemen, denen sich die Hamiltonschen Gleichungen durch „Separation" der nderlichen lösen lassen, führt auf eine bestimmte Klasse von n-dimenalen Riemannschen Mannigfaltigkeiten Σ_n, die wir als „Stäckelsche" ichnen wollen. Diese Stäckelschen Mannigfaltigkeiten Σ_n enthalten ch orthogonale Systeme von $(n-1)$ dimensionalen Mannigfaltigkeiten , d. h. die metrische Fundamentalform $\sum_{i,k} a_{ik}\,dx_i\,dx_k$ einer Stäckeln Mannigfaltigkeit Σ_n läßt sich durch Einführung geeigneter neuer rdinaten $\xi_1, \ldots, \xi_n$ auf eine *metrische „Normalform"* $\sum_k A_{kk}(d\xi_k)^2$ gen; die metrische Fundamentalform ist hier und im folgenden *stets positiv definit vorausgesetzt*[3]).

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine mannsche Mannigfaltigkeit V_n mit der metrischen *Normalform* $_{kk}(d\xi_k)^2$ eine Stäckelsche Mannigfaltigkeit Σ_n sei, lauten nach ll'Acqua[4])

[1]) Voranzeige, Gött. Nachr., Math.-phys. Klasse (1924), S. 77—79.

[2]) P. Stäckel, Über die Integration der Hamilton-Jacobischen Differentialungen mittelst Separation der Variablen (Hab.-Schrift, Halle, 1891).

[3]) Alle im folgenden auftretenden Summationen erstrecken sich, soweit nichts anderes geben, von 1 bis n ($n \geqq 3$). Riemannsche (bzw. Stäckelsche bzw. Liouville-Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen sind bezeichnet mit V_n (bzw. Σ_n bzw. L_n). uftretenden Funktionen sollen in einem bestimmten Definitionsbereich eindeutige, vertige und etwa beliebig oft stetig differenzierbare Funktionen der sämtlichen llen Variablen sein.

[4]) Dall'Acqua, Le equazioni di Hamilton-Jacobi che si integrano per separe di variabili (Rend. circolo mat. Palermo **33** (1912), S. 347).

$$(A) \qquad \frac{\partial^2 A^{(qq)}}{\partial \xi_r \partial \xi_s} - \frac{\partial A^{(qq)}}{\partial \xi_r}\frac{\partial \log A^{(rr)}}{\partial \xi_s} - \frac{\partial A^{(qq)}}{\partial \xi_s}\frac{\partial \log A^{(ss)}}{\partial \xi_r} = 0$$

$$(q, r, s, = 1, \ldots, n;\ r \neq s)$$

wobei $A^{(qq)} = 1 : A_{qq}$, $A_{qq} \neq 0$ $(q = 1, \ldots, n)$.

Ist *allgemeiner* irgendeine Riemannsche Mannigfaltigkeit V_n mit de (positiv definiten) metrischen Fundamentalform $\sum_{i,k} a_{ik} dx_i dx_k$ vorgelegt, s erhebt sich die *Frage nach Kriterien dafür, daß die gegebene Mannig faltigkeit V_n speziell eine Stäckelsche ist*, d. h. die Frage, ob di metrische Fundamentalform durch geeignete Koordinatentransformation i eine den Bedingungen (A) genügende Normalform sich überführen läß Und weiter erhebt sich die *Forderung, alle verschiedenen derartigen Trans formationen wirklich anzugeben.*

Die Lösung dieses *Transformationsproblems* soll im folgenden fü den speziellen Fall der sogenannten *„Liouvilleschen" Mannigfaltig keiten L_n* und *für $n \geqq 3$* gegeben werden.

Unter einer *Liouvilleschen Mannigfaltigkeit L_n* verstehen wir ein Riemannsche Mannigfaltigkeit V_n mit einer metrischen Normalform vo der Gestalt

$$(I) \qquad \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n)\left(\sum_i (d\xi_i)^2\right),$$

wobei

$$(a) \qquad \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_j f_j(\xi_j) > 0$$

und $f_j(\xi_j)$ *nur* von ξ_j abhängt $(j = 1, \ldots n)$.

Die Liouvilleschen Mannigfaltigkeiten sind (vgl. § 2 der vorliegende Arbeit) spezielle Stäckelsche. Gleichzeitig bilden die Liouvillesche aber eine spezielle Klasse der — im folgenden auch mit K_n bezeichneten — sogenannten *„konform-euklidischen"*[5]) *Mannigfaltigkeiten*; diese K_n sin charakterisiert durch die Eigenschaft, daß sie metrische Normalforme von der Gestalt (I) zulassen, wobei indes $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ eine *beliebig* positive Funktion der Variablen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sein darf. Übrigens ist *ei konform-euklidische Mannigfaltigkeit dann und nur dann eine Liouvill sche, falls sie gleichzeitig eine Stäckelsche ist* (§ 2).

---

[5]) Siehe J. A. Schouten, Der Riccikalkül (Berlin, Julius Springer, 1924, S. 169ff. dazu auch L. Berwald, Differentialinvarianten in der Geometrie. Riemannsch Mannigfaltigkeiten usw. (Enzykl. d. math. Wiss. III D. 11, Nr. 26) und die do zitierten Arbeiten, insbes. H. Weyl, Math. Zeitschr. 2 (1918), S. 404 u J. A. Schouten, Math. Zeitschr. 11 (1921), S. 58. — Die Verf. waren bereits i Besitze der Resultate von §§ 1 mit 3 vorliegender Arbeit, ehe sie von der ob zitierten Literatur Kenntnis erhielten.

Ehe man an die Lösung des oben formulierten Transformations-
lems für die *Liouvilleschen Mannigfaltigkeiten* herangeht, hat man
ere zunächst *invariant zu charakterisieren.* Diese invariante Kenn-
nung ergibt sich (§ 2) aus der (bekannten) invarianten Charakterisierung
konform-euklidischen Mannigfaltigkeiten[5]) zusammen mit den Be-
ungen (A); letztere vereinfachen sich erheblich für den Fall der
uvilleschen Mannigfaltigkeiten und führen dann auf eine alge-
che Gleichung n-ten Grades vom Typus der *Säkulargleichung* (§ 2,
14). Im § 3 wird die Bedeutung mehrfacher Nullstellen dieser Glei-
g festgestellt und für jede mehrfache Nullstelle gezeigt:

Eine k-fache Nullstelle $(2 \leqq k \leqq n)$ *liegt dann und nur dann vor,*
die betrachtete Liouvillesche Mannigfaltigkeit eine metrische Normal-
mit

$$\xi_1, \ldots, \xi_n) = b(\xi_1^2 + \ldots + \xi_k^2) + (b_1\xi_1 + \ldots + b_k\xi_k) + \sum_j^{k+1,\ldots,n} f_j(\xi_j)$$

zt, wo $b, b_1, \ldots, b_k$ Konstanten bedeuten und die $f_j(\xi_j)$ im Rahmen der
ngung $\Phi > 0$ beliebige Funktionen sind $(j = k+1, \ldots, n, 2 \leqq k \leqq n)$.
Für den Fall einer *n-fachen Nullstelle* werden *explizite Kriterien*
geben und ausgezeichnete Sonderfälle besprochen.

Bezüglich des *Transformationsproblems* ist vorab zu bemerken: Da
ch um konform-euklidische Mannigfaltigkeiten handelt, so können, wie
nnt, neben Bewegungen nur Möbiustransformationen auftreten[6]).
Hilfe dieses Satzes (den wir in einfacher Weise als Nebenresultat er-
n) gewinnen wir einen *vollständigen Überblick über die Trans-*
ationen einer Liouvilleschen Mannigfaltigkeit. Sehen wir ab von
im folgenden stets als *„trivial"* bezeichneten Fällen (der Identität
e) der *„Translation" und* der *„Streckung"*, also von Transforma-
n der metrischen Normalform, welche die Gestalt $\xi_\varrho^* = \alpha\xi_\varrho + \beta_\varrho$
$1, \ldots, n$; $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n$ Konstante) besitzen, so lautet das Ergebnis
ndermaßen[7]):

Es gibt dann und nur dann eine t-parametrige Schar $(1 \leqq t)$ *von*
t-trivialen) Transformationen, welche eine metrische Normalform der
chteten Liouvilleschen Mannigfaltigkeit wieder in eine Normalform
führen, falls eine k-fache Nullstelle $(2 \leqq k \leqq n)$ *der oben genannten*
ulargleichung" vorliegt. Die fragliche Schar von Transformationen

---

[5]) Vgl. z. B. Schouten. l. c. [5]), S. 173 und H. Weyl, Mathematische Analyse
aumproblems (Berlin 1923, S. 74).

[7]) Genaueres in § 3, S. 116 und § 4, S. 123. Für $n = 2$ ist das Transformations-
em erledigt von G. Ricci (Atti. d. Reale Acc. dei Lincei, Serie V, Rendiconti,
e fisiche etc., vol. II, 1. Sem. (1893), S. 73–81).

ist bis auf triviale Transformationen mit der Schar der orthogonal (linearen) Transformationen (Drehungen) der $\xi_1, \ldots, \xi_k$ *identisch u ergibt dann* $t = \binom{k}{2}$.

Von dem eben erwähnten Falle abgesehen, existieren (nicht-trivial Transformationen nur dann, wenn für eine metrische Normalform d betrachteten Liouvilleschen Mannigfaltigkeit die $f_j(\xi_j)$ *die speziel Gestalt besitzen*

$$f_j(\xi_j) = \varepsilon_j(\xi_j + \eta_j)^{-2} \qquad (j = 1, \ldots,$$

wobei ε_j *und* η_j *Konstanten sind* $(\sum_j |\varepsilon_j| + 0)$. *Und zwar gibt es in diese Falle eine (nicht-triviale) Transformation, die speziell eine Möbiu transformation und bis auf triviale Transformationen und ev. Drehung eindeutig bestimmt ist*[8]).

§ 1.

Bemerkung über n-fache Orthogonalsysteme in einer Riemannsch Mannigfaltigkeit[9]).

Es sei eine Riemannsche Mannigfaltigkeit V_n mit der metrisch Fundamentalform $\sum_{ik} a_{ik} dx_i dx_k$ gegeben. In der V_n möge ein n-fach Orthogonalsystem von V_{n-1} existieren. Bei Einführung geeigneter neu Koordinaten $\xi_j = \psi_j(x_1, \ldots, x_n)$, $(j = 1, \ldots, n)$, kann also die als *re und positiv definit* angenommene Fundamentalform auf die Norm form $\sum_k A_{kk} (d\xi_k)^2$ gebracht werden.

Bezeichnen[10]) jetzt $\lambda_{k(r)}$ bzw. λ_k^r die kovarianten bzw. kontravariant Systeme von Koordinaten für die Normalkongruenzen, welche aus d Orthogonaltrajektorien der n Scharen von V_{n-1} unseres n-fachen Orthogon systems gebildet werden, so gilt bezüglich eines *beliebigen* Koordinate systems für die kovariante Ableitung $\lambda_{k(\varrho|\sigma)}$ von $\lambda_{k(\varrho)}$ nach σ

$$(1, 0) \qquad \lambda_{k(\varrho|\sigma)} = \sum_{i,k} \gamma_{kik} \lambda_{i(\varrho)} \lambda_{k(\sigma)}$$

---

[8]) Manche der im folgenden gemachten Schlüsse lassen sich durch geometris Überlegungen ersetzen. Wir ziehen überall die analytische, systematische Behandlu vor, um einen vollständig durchgeführten, verallgemeinerungsfähigen Fall zu hab Andererseits werden auf diesem Wege manche bekannte Resultate in systematisch Weise gewonnen.

[9]) Siehe Schouten, l. c.[5]).

[10]) Kovariante bzw. kontravariante Indizes bezeichnen wir durch *griechis* Buchstaben, die einzelnen Kongruenzen unterscheiden wir durch *lateinische* Indi Steht ein griechischer Buchstabe neben einem lateinischen, so setzen wir ersteren Klammer. Ein durch (kovariante) Differentiation entstehender (griechischer) Ind ist als solcher durch einen links von ihm stehenden senkrechten Strich gekennzeichn Vgl. zur Bezeichnung auch Berwald, l. c.[5]), Nr. 20.

der Bedingung

) $\gamma_{hik} = 0$, sobald h, i, k alle verschieden $(h, i, k = 1, \ldots, n)$.

Die Bedingung (1, 1) ist notwendig und hinreichend dafür, daß die tationskoeffizienten" γ_{hik} zu einem System von paarweise orthogonalen nalkongruenzen gehören, falls noch

) $$-\gamma_{hik} = \gamma_{ihk} \qquad (h, i, k = 1, \ldots, n).$$

en (1, 1) und (1, 3) schreibt sich (1, 0) so:

) $$\lambda_{h(\varrho|\sigma)} = -\lambda_{h(\sigma)} \sum_k \gamma_{khk} \lambda_{k(\varrho)} + \sum_k \gamma_{hkk} \lambda_{k(\varrho)} \lambda_{k(\sigma)}.$$

t man jetzt

) $$\gamma_{hkk} = \sum_\tau D_{k(\tau)} \lambda_h^\tau \qquad (h \neq k;\ h, k = 1, \ldots, n),$$

at man

) $$\lambda_{h(\varrho|\sigma)} = -D_{h(\varrho)} \lambda_{h(\sigma)} + \sum_\tau \Omega_{\tau\varrho\sigma} \lambda_h^\tau,$$

) $$\Omega_{\tau\varrho\sigma} = \Omega_{\tau\sigma\varrho} = \sum_h D_{h(\tau)} \lambda_{h(\varrho)} \lambda_{h(\sigma)}.$$

Beim Zurückgehen auf die metrische Normalform erkennt man, daß Vektor $\mathfrak{D}_k$ mit den Komponenten $D_{k(\tau)}$ so gewählt werden kann, daß glich eines zur Normalform gehörigen Koordinatensystems $\xi_1, \ldots, \xi_n$ Komponenten von $\mathfrak{D}_k$ lauten:

$$D_{k(\tau)} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log A_{kk}}{\partial \xi_\tau} \qquad (\tau = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, n).$$

gens besitzt dann die kovariante Ableitung $D_{k(\tau|\sigma)}$ die Symmetrieschaft:

$$D_{k(\tau|\sigma)} = D_{k(\sigma|\tau)},$$

$D_{k(\tau)}$ als die Ableitungen des Skalars

$$D_k = \frac{1}{2} \log A_{kk} = -\frac{1}{2} \log A^{kk}$$

iert sind[11]).

In etwas anderer Schreibweise lauten (1, 5) und (1, 6)

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{h(\varrho|\sigma)} &= \sum_\tau (\Omega_{\tau\sigma\varrho} - \Omega_{\varrho\sigma\tau}) \lambda_h^\tau, \\ 0 &= \sum_\tau (\Omega_{\sigma\varrho\tau} - a_{\varrho\tau} D_{h(\sigma)}) \lambda_h^\tau \end{aligned}\right\} \qquad (h, \varrho, \sigma = 1, \ldots, n).$$

Aus (2) folgt rückwärts, daß — bei gegebenen $\Omega_{\sigma\varrho\tau}$ — ein etwa

[11]) G. Ricci, und T. Levi-Civita, Méthodes de calcul différentiel absolu et applications (Math. Annalen 54 (1901), S. 139).

existierendes Lösungensystem $\lambda_{h(\tau)}$ von (1) und (2) stets als Orthogonalsystem vorausgesetzt werden darf. Weiter folgt aus (1)

$$\gamma_{hik} = \sum_{\varrho\sigma} \lambda_{h(\varrho|\sigma)} \lambda_i^\varrho \lambda_k^\sigma = \sum_{\sigma,\varrho,\tau} \Omega_{\tau\varrho\sigma} \lambda_h^\tau \lambda_i^\varrho \lambda_k^\sigma - \sum_{\sigma,\varrho,\tau} \Omega_{\varrho\sigma\tau} \lambda_k^\sigma \lambda_i^\varrho \lambda_h^\tau .$$

Aber wegen (2) gilt

$$\sum_{\varrho\sigma\tau} \Omega_{\tau\varrho\sigma} \lambda_h^\tau \lambda_i^\varrho \lambda_k^\sigma = \Big(\sum_\tau D_{k(\tau)} \lambda_h^\tau\Big)\Big(\sum_{\varrho,\sigma} a_{\varrho\sigma} \lambda_i^\varrho \lambda_k^\sigma\Big) = \Big(\sum_\tau D_k^\tau \lambda_{h(\tau)}\Big)\delta_{ik} .$$ [12])

Somit ist $\gamma_{hik} = 0$ (für h, i, k alle verschieden), d. h. man hat es m Normalkongruenzen zu tun und (1) *und* (2) *sind folglich nicht nur no wendige sondern — in gewissem Sinne — auch hinreichende Bedingunge für die Existenz von Orthogonalsystemen.*

Um die *Integrabilitätsbedingungen für* (1) zu erhalten, bilden w die kovariante Ableitung $\lambda_{h(\varrho|\sigma|\tau)}$ von $\lambda_{h(\varrho|\sigma)}$ nach τ:

$$\lambda_{h(\varrho|\sigma|\tau)} = \sum_\varkappa \{[\Omega^\varkappa_{\cdot\varrho\sigma} - \Omega^\varkappa_{\varrho\cdot\sigma}]\Big[\sum_\nu (\Omega_{\nu\varkappa\tau} - \Omega_{\varkappa\nu\tau})\lambda_h^\nu\Big] + [\Omega_{\varkappa\varrho\sigma|\tau} - \Omega_{\varrho\varkappa\sigma|\tau}]\lambda_h^\varkappa$$

Daraus ergibt sich wegen

$$\lambda_{h(\varrho|\sigma|\tau)} - \lambda_{h(\varrho|\tau|\sigma)} = \sum_\varkappa R_{\varkappa\varrho,\sigma\tau} \lambda_h^\varkappa ,$$

— unter $R_{\varkappa\varrho,\sigma\tau}$ den Riemannschen Krümmungstensor unserer V_n ve standen —

$$R_{\varkappa\varrho,\sigma\tau} = \mathsf{P}_{\varkappa\varrho\sigma,\tau} - \mathsf{P}_{\varkappa\varrho\tau,\sigma} + \mathsf{P}_{\varrho\varkappa\tau,\sigma} - \mathsf{P}_{\varrho\varkappa\sigma,\tau} , \tag{3}$$

$$\mathsf{P}_{\varkappa\varrho\sigma,\tau} = \Omega_{\varkappa\varrho\sigma|\tau} + \sum_\nu \Omega^\nu_{\cdot\varrho\sigma}\Big[\Omega_{\varkappa\tau\nu} - \frac{1}{2}\Omega_{\nu\varkappa\tau}\Big] = \mathsf{P}_{\varkappa\sigma\varrho,\tau} . \tag{4}$$

Die Integrabilitätsbedingungen für (1) *enthalten also nur noch* Ω, *nic mehr* λ.

Jetzt betrachten wir *speziell eine konform-euklidische Mannigfalti keit* K_n. In K_n gibt es n-fache Orthogonalsysteme, für welche d Matrix $\| \Omega_{\sigma\varrho\tau} - a_{\varrho\tau} D_{h(\sigma)} \|$ den Rang Null besitzt; und zwar gilt das f solche Orthogonalsysteme, bezüglich deren die metrische Fundamentalfor der K_n die Normalform (I) (Einleitung S. 106) annimmt. Die Gleichu $| \Omega_{\sigma\varrho\tau} - a_{\varrho\tau} D_{h(\sigma)} | = 0$ besitzt dann die n-fache Nullstelle $D_{h(\sigma)} = D$ $(h = 1, \ldots, n)$ und es gilt

$$\Omega_{\sigma\tau\varrho} = a_{\tau\varrho} D_\sigma \quad [13]) \qquad (\sigma, \tau, \varrho = 1, \ldots, n$$

---

[12]) δ_{ik} hat hier und im folgenden stets die übliche Bedeutung: $\delta_{ik} = 0$ bzw. = für $i \neq k$ bzw. $i = k$.

[13]) Für das Folgende siehe besonders Schouten, l. c.[5]), S. 168ff. Dort $-\frac{1}{2}$ statt hier D_σ. Dann wird unsere Gleichung (6) identisch mit (14) bei Schoute

(3) und (4) ergibt sich nunmehr (für $n \geqq 3$)

$$R_{\varkappa\varrho,\sigma\tau} = a_{\varkappa\sigma} l_{\varrho\tau} + a_{\varrho\tau} l_{\varkappa\sigma} - a_{\varkappa\tau} l_{\varrho\sigma} - a_{\varrho\sigma} l_{\varkappa\tau}$$

$$l_{\varrho\tau} = \frac{1}{n-2}[\mathsf{B}_{\varrho\tau} - a_{\varrho\tau} R]$$

$$\mathsf{B}_{\varrho\tau} = \sum_{\varkappa\sigma} R_{\varkappa\varrho,\sigma\tau} a^{\varkappa\sigma}$$

$$R = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{\varrho\tau} \mathsf{B}_{\varrho\tau} a^{\varrho\tau} = \sum_{\varrho\tau} l_{\varrho\tau} a^{\varrho\tau}.$$

it ist der symmetrische Tensor $l_{\varrho\tau}$ — bei gegebenem $R_{\varkappa\varrho,\sigma\tau}$ — bestimmt und für D_σ haben wir die Differentialgleichungen[13]):

$$D_{\varkappa|\tau} + D_\varkappa D_\tau - \frac{1}{2} a_{\varkappa\tau} \left(\sum_\nu D_\nu D^\nu\right) + l_{\varkappa\tau} = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen für (6) lauten

$$l_{\varkappa\tau|\varrho} = l_{\varkappa\varrho|\tau};$$

$n \geqq 4$ ist (7) identisch erfüllt, wie aus der Bianchischen Identität folgt[14]).

Die Differentialgleichungen (6) sind explizit integrierbar[6]), falls eine Partikularlösung bzw. ein n-faches Orthogonalsystem der in Rede stehenden Art bereits bekannt ist. Wir wollen die diesbezüglichen Formeln wegen späterer Verwendung hier angeben.

Sei also D^* eine Partikularlösung von (6); ferner seien $\xi_\varkappa (\varkappa = 1, \ldots, n)$ die zur Lösung entsprechende Koordinaten, so daß die metrische Fundamentalform K_n, bezogen auf die $\xi_1, \ldots, \xi_n$, die Normalform (I) besitzt; dabei ist dann (gemäß (0) S. 109) $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = a e^{2D^*}$, unter a eine (positive) Konstante verstanden.

Die allgemeinste, *von D^* (nicht bloß um eine additive Konstante) verschiedene* Lösung der Differentialgleichungen (6) ist dann

$$D = D^* + \log\left[\sum_j \left(\frac{c}{2}\xi_j + c_j\right)^2\right]$$

mit den Integrationskonstanten $c, c_1, \ldots, c_n, (c \neq 0)$.

Die zur Lösung D gehörigen $\lambda_{h(\varrho)}$, welche sich aus den Differentialgleichungen

$$\lambda_{h(\varrho|\sigma)} = -D_\varrho \lambda_{h(\sigma)} + a_{\sigma\varrho} \sum_\tau D_\tau \lambda_h^\tau$$

berechnen, sind

$$\lambda_{h(\varrho)} = e^{D^*}(\Theta_\varrho z_h - \alpha_{h\varrho});$$

[14]) Vgl. Schouten, l. c.[5]), S. 170, speziell den dort ausgesprochenen Satz.

dabei ist gesetzt:

$$(10) \qquad \Theta = D - D^*, \qquad z_h = \sum_j \alpha_{hj} y_j, \qquad y_j = \xi_j + \frac{2c_j}{c}$$

und die Integrationskonstanten α_{hj} sind den Bedingungen unterworfen

$$(11) \qquad (\alpha_h, \alpha_k) = \sum_j \alpha_{hj}\alpha_{kj} = \delta_{hk} \qquad (h, k = 1, \ldots, n).$$

Die der Lösung D entsprechenden neuen Koordinaten $\xi_1^*, \ldots, \xi_n^*$ sind definiert durch

$$(12) \qquad \xi_k^* = -\frac{4}{c^2}\frac{z_k}{(z,z)} + C_k;$$

dabei ist gesetzt:

$$12a) \qquad (z,z) = (y,y) = \sum_h z_h^2 = \sum_j y_j^2 = \frac{4}{c^2} e^{\Theta}.$$

Die Transformationen (12), d. h. die Bewegungen und die Möbiusschen Kugelverwandtschaften liefern die sämtlichen konformen Abbildungen des euklidischen Raumes[14a]).

§ 2.

Invariante Charakterisierung der Liouvilleschen Mannigfaltigkeiten.

Für die metrische Normalform einer Stäckelschen Mannigfaltigkeit Σ_n sind, wie bereits in der Einleitung angegeben wurde, die Bedingungen (A) (Einl. S. 106) charakteristisch.

Ist die Σ_n *speziell* eine *konform-euklidische* Mannigfaltigkeit K_n, so nimmt (A) wegen $A^{qq} = 1 : \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ die Form an

$$\Phi^{-2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_r \partial \xi_t} = 0 \qquad (r \neq t;\ r, t = 1, \ldots, n).$$

Somit hat Φ die Form (a) (Einleitung S. 106) und es liegt eine Liouvillesche Mannigfaltigkeit vor.

Umgekehrt ist jede Liouvillesche Mannigfaltigkeit sowohl eine konform-euklidische als eine Stäckelsche. Also:

Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit $V_n (n \geqq 3)$ ist dann und nur dann eine Liouvillesche, falls sie gleichzeitig eine Stäckelsche und eine konform-euklidische ist.

Durch (5) [und (5a)] (§ 1, S. 111) sind für $n \geqq 4$ die *konform-euklidischen* Mannigfaltigkeiten *invariant*, d. h. unabhängig vom Koordinatensystem, *charakterisiert*; für $n = 3$ sind (5) [und (5a)] stets erfüllt und dann gibt (7) ein invariantes Kriterium.

[14a]) Vgl. Schouten, l. c. [5]), S. 173.

Zwecks invarianter Charakterisierung der Liouvilleschen Mannigaltigkeiten haben wir also noch die *allgemeine Stäckelsche Mannigfalgkeit invariant zu kennzeichnen*, d. h. wir haben die Bedingungen (A) n eine, vom Koordinatensystem unabhängige Form zu setzen. Dies kann twa so geschehen:

Sei $\sum_k A_{kk}(d\xi_k)^2$ eine metrische Normalform für die betrachtete täckelsche Mannigfaltigkeit Σ_n, ferner $\sum_{i,k} a_{ik}\,dx_i\,dx_k$ die metrische Funamentalform von Σ_n bezüglich beliebig gewählter Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$. ür die zu den ξ_j bezüglich der x_ϱ gehörigen kovarianten bzw. kontrarianten Systeme von Koordinaten $\lambda_{j(\varrho)}$ bzw. λ_j^ϱ gilt:

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial x_\varrho} = m_j \lambda_{j(\varrho)}, \qquad \frac{\partial x_\varrho}{\partial \xi_j} = \frac{1}{m_j}\lambda_j^\varrho \qquad (j, \varrho = 1, \ldots, n),$$

obei

$$(m_j)^2 = A^{jj} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

olglich ist für eine *beliebige* Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_r} = \frac{1}{m_r}\sum_\varrho \frac{\partial f}{\partial x_\varrho}\lambda_r^\varrho = \frac{1}{m_r}\frac{\partial f}{\partial s_r}, \quad ^{15})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_r \partial \xi_t} = \frac{1}{m_r m_t}\left[-\frac{\partial}{\partial s_t}(\log m_r)\frac{\partial f}{\partial s_r} + \frac{\partial}{\partial s_t}\left(\frac{\partial f}{\partial s_r}\right)\right] \qquad (r \neq t).$$

immt man speziell $f = A^{qq}$ und beachtet, daß $D_q = -\log m_q$ (§ 1, (0), . 109), so ergibt (A)

$$= \frac{\partial}{\partial s_t}\left(\frac{\partial D_q}{\partial s_r}\right) + 3\frac{\partial D_q}{\partial s_r}\frac{\partial D_r}{\partial s_t} + 2\frac{\partial D_q}{\partial s_t}\cdot\frac{\partial D_t}{\partial s_r} - 2\frac{\partial D_q}{\partial s_r}\frac{\partial D_q}{\partial s_t} \quad (r \neq t;\ r, t, q = 1, \ldots, n).$$

eht man auf die Darstellung der Operation $\frac{\partial}{\partial s}$ vermittels der λ zurück nd berücksichtigt die Beziehungen (1) und (2) (§ 1, S. 109), so hat man chließlich:

$$\text{A)} \quad \sum_{\varrho\tau}\left[D_{q(\varrho|\tau)} + 3D_{q(\varrho)}D_{t(\tau)} + 3D_{r(\varrho)}D_{q(\tau)} - 2D_{q(\varrho)}D_{q(\tau)}\right]\lambda_t^\varrho\lambda_r^\tau = 0 \quad (r \neq t).$$

ies ist die gesuchte invariante Form von (A), welche im Verein mit (1) nd (2) des § 1 die Stäckelschen Mannigfaltigkeiten charakterisiert. omit hat sich ergeben:

Damit eine vorgelegte Riemannsche Mannigfaltigkeit eine Stäckelhe sei, ist notwendig und hinreichend die Existenz solcher $\lambda_{h(\varrho)}$, D_h und $_{\tau\sigma\varrho}$, daß (1), (2) (§ 1, S. 109) *und* (A) *erfüllt sind.*

Handelt es sich *speziell* um eine *Liouvillesche Mannigfaltigkeit*, so ird $D_q = D$ $(q = 1, \ldots, n)$ und es geht (A) über in

$$\sum_{\varrho\tau}\left[D_{\varrho|\tau} + 4D_\varrho D_\tau\right]\lambda_t^\varrho\lambda_r^\tau = 0 \quad (r \neq t;\ r, t = 1, \ldots, n).$$

[15]) Bezeichnung nach Berwald, l. c. [5]), Nr. 20.

Setzt man

$$\sum_{\varrho,\tau}[D_{\varrho|\tau}+4D_\varrho D_\tau]\lambda_i^\varrho\lambda_i^\tau=Y_t \qquad (t=1,\ldots,n),$$

so gilt

$$(A') \qquad \sum_{\varrho}[D_{\varrho|\tau}+4D_\varrho D_\tau-a_{\varrho\tau}Y_t]\lambda_t^\varrho=0 \quad (\tau,t=1,\ldots,n).$$

Diese Formel läßt sich natürlich auch, unabhängig von (A), direkt aus der metrischen Normalform der Liouvilleschen Mannigfaltigkeit errechnen. Wir haben also das Resultat:

Damit eine vorgelegte Riemannsche Mannigfaltigkeit V_n eine Liouvillesche sei, ist (für $n\geqq 3$) notwendig und hinreichend die Existenz solcher $\lambda_{h(\varrho)}$ und eines solchen D, daß gleichzeitig die Bedingungen (5), (6), (§ 1, S. 111) *und* (A') *erfüllt sind.*

Zusatz: Die in (A') auftretenden Skalare Y_s $(s=1,\ldots,n)$ sind die n Nullstellen der Determinante („*Säkulargleichung*")

$$(\Delta) \qquad \Delta(Y)=|D_{\varrho|\tau}+4D_\varrho D_\tau-a_{\varrho\tau}Y_s|.$$

Diese Nullstellen sind sämtlich reell und im Falle einer k-fachen Nullstelle Y_s hat die Matrix $\|D_{\varrho|\tau}+4D_\varrho D_\tau-a_{\varrho\tau}Y_s\|$ den Rang $(n-k)$, weil $\sum_{i,l}a_{il}dx_i dx_l$ positiv definit sein soll $(1\leqq k\leqq n)$.

§ 3.

Mehrfache Nullstellen der Säkulargleichung $\Delta(Y)=0$.

Es soll jetzt die Bedeutung der mehrfachen Nullstellen der, aus (A') sich ergebenden „Säkular"-Gleichung $\Delta(Y)=0$ festgestellt werden. Wir fragen also: *Wie äußert sich das Auftreten einer k-fachen Nullstelle $(k\geqq 2)$ in der zugehörigen Normalform, d. h. welche spezielle Eigenschaften muß die zugehörige Funktion $\Phi(\xi_1,\ldots,\xi_n)=\sum_j f_j(\xi_j)$ besitzen?*

Die Beantwortung soll durch Rechnung geschehen, da die hierbei benutzten Formeln auch im § 4 benötigt werden; es läßt sich das Ergebnis aber auch durch einfache Überlegung direkt herleiten.

Wir denken uns von Anfang an solche Koordinaten $\xi_1,\ldots,\xi_n$ in der vorgegebenen Liouvilleschen Mannigfaltigkeit L_n zugrunde gelegt, für welche die metrische Fundamentalform eine Normalform hat: $\Phi\cdot\sum_j(d\xi_j)^2$.

Setzt man $\Phi=ae^{2D}$, so wird

$$l_{\varrho\tau}=3D_\varrho^*D_\tau^*-\frac{1}{2}\Phi\delta_{\varrho\tau}\Big(\sum_\nu D_\nu^*D^{*\nu}\Big)-\frac{1}{2}\delta_{\varrho\tau}\Phi^{-1}f_\varrho'',$$

wobei alle kontravarianten bzw. kovarianten Indizes und Ableitungen sich also auf die Variablen $\xi_1,\ldots,\xi_n$ beziehen

Diesen Ausdruck für $l_{\varrho\tau}$ führen wir in (A′) ein. Dabei ist es vorilhaft, aus (A′) zuvor mit Hilfe von (6) (§ 1, S. 111) die zweiten Ableingen $D_{\varrho|\tau}$ von D zu eliminieren. Wir erhalten so allgemein

$$\text{(A″)} \qquad \sum_{\varrho}\left[3D_{\varrho}D_{\tau}+\frac{1}{2}a_{\varrho\tau}\left(\sum_{\nu}D_{\nu}D^{\nu}\right)-l_{\varrho\tau}-a_{\varrho\tau}Y_{t}\right]\lambda_{t}^{\varrho}=0$$

d daraus unter Benutzung der Abkürzung

$$\Theta = D - D^{*}$$

d Substitution des obigen Ausdruckes für $l_{\varrho\tau}$

$$\text{(A}_0''\text{)} \qquad \sum_{\varrho}\left[\Theta_{\varrho}\Theta_{\tau}+\Theta_{\varrho}D_{\tau}^{*}+\Theta_{\tau}D_{\varrho}^{*}+\frac{1}{3}\delta_{\varrho\tau}\left\{\frac{1}{2}\,\Phi^{-2}f_{\varrho}''-X_{t}\right\}\Phi\right]\lambda_{t}^{\varrho}=0,$$

bei

$$\text{(3)} \qquad X_{t}=Y_{t}-\frac{1}{2}\left(\sum_{\nu}D^{\nu}D_{\nu}\right)-\frac{1}{2}\left(\sum_{\nu}D_{\nu}^{*}D^{*\nu}\right)$$

setzt ist.

Beschränkt man sich, wie beabsichtigt, zunächst auf die Untersuchung r Ausgangsform $\Phi\cdot\sum_{j}(d\xi_{j})^{2}$, setzt also $\Theta=$ konst., $\Theta_{\varrho}=0$, so wird, bis f einen von Null verschiedenen Faktor,

$$\text{(4)} \qquad \Delta(Y)=\bar{\Delta}(X)=\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\,\Phi^{-2}f_{j}''-X_{j}\right).$$

Für eine k-fache Nullstelle Y_{j} $(k\geqq 2)$ ist also notwendig und hinchend, daß

$$\frac{1}{2}\,\Phi^{-2}f_{1}''=\frac{1}{2}\,\Phi^{-2}f_{2}''=\ldots=\frac{1}{2}\,\Phi^{-2}f_{k}''=X_{1},$$

nn wir die Nullstellen Y_{j} geeignet numerieren. Da aber $f_{\varrho}''=\dfrac{d^{2}f_{\varrho}(\xi_{\varrho})}{d\xi_{\varrho}^{2}}$ r von ξ_{ϱ} abhängt, muß $f_{1}''=\ldots=f_{k}''=$ konst. $=b$ sein, also

$$\text{(5)} \qquad f_{\varkappa}(\xi_{\varkappa})=b\xi_{\varkappa}^{2}+b_{\varkappa}\xi_{\varkappa}+A_{\varkappa} \qquad (\varkappa=1,\ldots,k;\,k\geqq 2),$$

die $b, b_{\varkappa}, A_{\varkappa}$ Konstanten bedeuten.

Die $f_{\varkappa}$ sind insbesondere *linear* dann und nur dann, wenn $b=0$, also gen $D_{\varrho}=D_{\varrho}^{*}$ und wegen (13)

$$\text{(6)} \qquad Y_{\varkappa}=\sum_{\nu=1}D^{\nu}D_{\nu} \qquad (\varkappa=1,\ldots,k).$$

ngekehrt folgt aus (15) die Existenz einer k-fachen Nullstelle von (14) l aus (16) speziell $b=0$. Für den *euklidischen Fall* ist kennzeichnend, 3 die n-fache Nullstelle $Y=0$ vorliegt.

Damit ist die oben gestellte Frage bereits beantwortet. Ehe wir das gebnis zusammenfassen, sei noch auf die Liouvilleschen Mannigfaltigten *konstanter Krümmung* hingewiesen. Sie sind charakterisiert durch

das Auftreten einer $(n-1)$-fachen Nullstelle von $\Delta(Y)$, welche konstant und nicht negativ ist:

$$Y_t = \beta^2 \quad (t = 1, 2, \ldots, n-1;\ \beta^2 > 0). \tag{17}$$

Für eine zugehörige Normalform ist: $\Phi = (-\beta\xi_n + \alpha)^{-2}$; dabei bezeichnen α (und β) Konstante. Man bestätigt dies durch einfache Rechnung[16]).

Zusammenfassend können wir sagen:

Damit $\Delta(Y) = 0$ eine k-fache Nullstelle besitze $(2 \leqq k \leqq n)$, ist notwendig und hinreichend, daß eine metrische Normalform existiert, für welche (bei geeigneter Numerierung der Variablen $\xi_1, \ldots, \xi_n$) die Gleichungen (15) erfüllt sind; die gleiche Eigenschaft kommt dann überhaupt jeder metrischen Normalform zu. Die in (15) genannten $f_\varkappa(\xi_\varkappa)$ sind überdies linear in $\xi_\varkappa$ dann und nur dann, wenn die k-fache Nullstelle die Relation (16) befriedigt.

Eine Liouvillesche Mannigfaltigkeit ist von konstanter Krümmung dann und nur dann, wenn eine $(n-1)$-fache Nullstelle von $\Delta(Y) = 0$ vorhanden ist, welche der Bedingung (17) genügt.

Aus der Normalform (I), (a) liest man für den Fall einer k-fachen Nullstelle $(2 \leqq k \leqq n)$ ab, daß die Normalform durch jede orthogonale Transformation der Variablen $\xi_1, \ldots, \xi_k$ bei festen $\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n$ in sich übergeht. Wir haben also:

Falls genau t mehrfache Nullstellen von $\Delta(Y) = 0$ je von den Vielfachheiten $k_1, \ldots, k_t$ $(k_\tau \geqq 2,\ \tau = 1, \ldots, t)$ vorhanden sind, so gibt es eine endliche, kontinuierliche r-gliedrige Gruppe von Transformationen, welche die metrische Fundamentalform der in Rede stehenden Liouvilleschen Mannigfaltigkeit in Normalformen der Gestalt (I), (a) (Einl. S. 106) *überführen.*

Inwieweit diese Gruppe überhaupt *alle* derartigen Transformationen im Falle der k_τ-fachen Nullstellen erschöpft, wird in § 4 entschieden werden. Wir werden dort zeigen, daß — *von einer Ausnahme abgesehen — im eben betrachteten Falle tatsächlich außer den Transformationen der genannten Gruppe keine weiteren Transformationen möglich sind und daß umgekehrt, falls die Liouvillesche Mannigfaltigkeit eine Gruppe von Transformationen gestattet, dies nur im Falle mehrfacher Wurzeln möglich ist.* Von trivialen Transformationen (Einl. S. 107) ist hierbei natürlich immer abgesehen.

---

[16]) Vgl. L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie (1. Aufl., Leipzig 1899, S. 575). Aus dem dort angegebenen Resultat entnimmt man, daß umgekehrt *alle* V_n von konstanter negativer Krümmung zugleich Liouvillesche Mannigfaltigkeiten sind.

Da die Anzahlen etwa vorhandener k_τ-facher Nullstellen $(2 \leqq k_\tau \leqq n)$ n $\Delta(Y) = 0$ sich auf rationalem Wege aus $\Delta(Y)$ bestimmen lassen, so nn man, sobald nur D bekannt ist, stets rational entscheiden, ob der obigen Theorem genannte Fall vorliegt.

Besonders einfach liegen in dieser Hinsicht die Dinge für den *Fall ner n-fachen Nullstelle.* Für diesen Fall lassen sich (invariante) *Kriterien* geben, *welche D nicht mehr enthalten* und aus den Koeffizienten der etrischen Fundamentalform durch rationale Operationen, Differentiation d evtl. Wurzelziehung gebildet sind. Wie dies gezeigt werden kann, soll hließlich noch skizziert werden.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß bei einer iouvilleschen Mannigfaltigkeit (für irgendein geeignetes D) eine n-fache ullstelle Y von $\Delta(Y) = 0$ auftritt, lauten (§ 1, (6); § 2, (A′)):

$$D_{\sigma|\tau} + D_\sigma D_\tau + l_{\sigma\tau} - \frac{1}{2} a_{\sigma\tau} S = 0, \tag{0, 1}$$

$$D_{\sigma|\tau} + 4 D_\sigma D_\tau \quad - \quad a_{\sigma\tau} Y = 0; \tag{0, 2}$$

bei ist gesetzt:

$$S = \sum_\nu D^\nu D_\nu.$$

ir $n = 3$ kommt noch die Bedingung (7) (§ 1, S. 111) hinzu.

Die gesuchten invarianten Kriterien für eine solche n-fache Nullstelle halten wir nun durch Elimination von D und Y aus (0, 1) und (0, 2). ese Elimination läßt sich etwa so bewerkstelligen:

Aus (0, 1) und (0, 2) folgt

$$3 D_\sigma D_\tau + \frac{1}{2} a_{\sigma\tau} S = l_{\sigma\tau} + a_{\sigma\tau} Y. \tag{0, 3}$$

ltiplikation von (0, 3) mit $a_{\sigma\tau}$ und Summation nach σ und τ liefert

$$\frac{1}{2}(n+6) S = R + nY, \tag{0, 4}$$

R die früher (§ 1 (5c), S. 111) angegebene Bedeutung hat. Durch variante Differentiation von (0, 3) kommt

$$3 D_{\sigma|\varrho} D_\tau + 3 D_\sigma D_{\tau|\varrho} + \frac{1}{2} a_{\sigma\tau} S_\varrho = l_{\sigma\tau|\varrho} + a_{\sigma\tau} Y_\varrho,$$

$$3 D_{\sigma|\tau} D_\varrho + 3 D_\sigma D_{\varrho|\tau} + \frac{1}{2} a_{\sigma\varrho} S_\tau = l_{\sigma\varrho|\tau} + a_{\sigma\varrho} Y_\tau,$$

d durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen wegen $D_{\tau|\varrho} = D_{\varrho|\tau}$, $|_\varrho = l_{\sigma\varrho|\tau}$:

$$3 D_{\sigma|\varrho} D_\tau - 3 D_{\sigma|\tau} D_\varrho = a_{\sigma\tau}\left(Y_\varrho - \frac{1}{2} S_\varrho\right) - a_{\sigma\varrho}\left(Y_\tau - \frac{1}{2} S_\tau\right).$$

Ferner gilt wegen (0, 2)

$$S_\varrho = 2 \sum_\nu D_{\nu|\varrho} D^\nu = 2 D_\varrho (Y - 4S). \tag{0,5}$$

Setzt man dies in die vorangehende Gleichung ein und eliminiert gleichzeitig vermöge (0, 2) die zweiten Ableitungen von D, so kommt

$$Y_\varrho + 2 D_\varrho (Y + 2S) = 0. \tag{0,6}$$

Eine zweite Darstellung von Y_ϱ erhält man durch Differentiation von (0, 4) und Benutzung von (0, 5), nämlich

$$n Y_\varrho = - R_\varrho + (n+6) D_\varrho (Y - 4S). \tag{0,7}$$

Aus (0, 6) und (0, 7) folgt jetzt

$$R_\varrho = 3 D_\varrho [(n+2) Y - 8S]. \tag{0,8}$$

Die Betrachtung von (0, 8) zwingt zu folgender *Fallunterscheidung*:

I. Fall: $R_\varrho \not\equiv 0$ und II. Fall: $R_\varrho \equiv 0$ $(\varrho = 1, \ldots, n)$.

Im I. Fall betrachten wir nur solche Stellen, wo $R_\varrho \neq 0$. Dort ist auch die eckige Klammer rechterhand in (0, 8) von Null verschieden. Wir können also setzen

$$D_\varrho = R_\varrho \cdot Q, \tag{0,81}$$

wobei

$$Q = 1 : 3 [(n+2) Y - 8S]. \tag{0,9}$$

Multipliziert man linke und rechte Seite von (0, 81) skalar mit sich selbst, so folgt

$$S = Q^2 \cdot P, \tag{0,11}$$

wobei

$$P = \sum_\varrho R_\varrho R^\varrho \neq 0. \tag{0,10}$$

Ferner kommt aus (0, 4) wegen (0, 11)

$$Y = \frac{1}{n} \left(\frac{n+6}{2} Q^2 P - R \right). \tag{0,12}$$

Die aus $l_{\sigma\tau}$ gebildeten Skalare P und R sind zugleich mit der metrischen Fundamentalform (eindeutig) bekannt. Gelingt es nun, ein gleiches auch für Q nachzuweisen, so sind damit zufolge (0, 81), (0, 11) und (0, 12) (eindeutig) D_ϱ, S und Y bestimmt und man braucht die so gefundenen Werte für D_ϱ, S und Y nur in (0, 1) und (0, 2) einzusetzen, um die gesuchten Kriterien zu gewinnen.

Die gewünschte Bestimmung von Q wird erhalten, indem man D_ϱ aus
0, 81) in (0, 3) substituiert und (0, 11) sowie (0, 12) beachtet. Man erhält:

$$3R_\sigma R_\tau Q^2 + \frac{1}{2} a_{\sigma\tau} Q^2 P = l_{\sigma\tau} + a_{\sigma\tau} \frac{1}{n} \left(\frac{n+6}{2} Q^2 P - R \right).$$

Multiplikation mit $R^\sigma R^\tau$ und Summation über σ und τ führt schließlich zu

$$3(n-1) Q^2 P^2 = n \sum_{\sigma\tau} l_{\sigma\tau} R^\sigma R^\tau - PR.$$

Daraus ist Q^2 eindeutig bestimmt, also wegen (0, 11) und (0, 12) auch S
und Y, und wegen (0, 9) schließlich auch Q selbst.

Im Falle II ist wegen $R_\varrho \equiv 0$ auch $P \equiv 0$ und umgekehrt.

Infolge (0, 8) ist jetzt *entweder*: $D_\varrho \equiv 0$ $(\varrho = 1, \ldots, n)$; also D kon-
stant und die metrische Normalform für die alsdann vorliegende *euklidische*
Mannigfaltigkeit[17]) bis auf Drehungen und triviale Transformationen ein-
deutig bestimmt.

Oder: man hat

), 13) $$(n+2) Y = 8S,$$ [18])

), 14) $$(n+2) Y_\tau = 8 S_\tau \qquad (\tau = 1, \ldots, n).$$

Andrerseits aus (0, 4) wegen $R_\tau = 0$

), 15) $$n Y_\tau = \frac{n+6}{2} S_\tau.$$

Aus (0, 14) und (0, 15) ist zu entnehmen, daß *entweder* $Y_\tau = S_\tau = 0$ *oder*
$(n-2)(n-6) = 0$.

Die *erste* der beiden, eben genannten, *Möglichkeiten* ergibt wegen (0, 6),
abgesehen von dem bereits oben besprochenen Fall $D_\varrho = 0$, die Beziehung
$Y + 2S = 0$. Aus (0, 7) folgt in gleicher Weise $Y - 4S = 0$, also schließ-
lich wieder $S = Y = 0$, d. h. der bereits betrachtete Fall $D_\varrho = 0$.

Die *zweite* der obigen *Möglichkeiten* tritt, wegen $n \geqq 3$, nur für $n = 6$
ein. Ist $n = 6$, so liefert (0, 13)

, 132) $$Y = S$$

und wegen (0, 4) gilt jetzt

16) $$R = \sum_{\varrho\tau} l_{\varrho\tau} a^{\varrho\tau} = 0.$$

Ferner liefert (0, 132) und (0, 7)

, 17) $$S_\varrho = -6 S D_\varrho.$$

[17]) Aus $D_\varrho \equiv 0$ folgt ja wegen (0, 1) auch $l_{\varrho\tau} \equiv 0$, also $R_{\varkappa\sigma,\varrho\tau} \equiv 0$.

[18]) Statt $D_\varrho \equiv 0$ usw. schreiben wir im folgenden zur Vereinfachung stets
$= 0$ usw.

Falls es also gelingt, S eindeutig als Funktion der Koeffizienten der metrischen Fundamentalform bzw. deren Differentialquotienten darzustellen, kennen wir vermöge (0, 17) und (0, 132) auch D_ϱ und Y und erhalten durch Einsetzen in (0, 1) und (0, 2) wieder die gewünschten Kriterien.

Zur Berechnung von S multiplizieren wir (0, 3) mit $l^{\sigma\tau}$, summieren nach σ und τ und beachten (0, 16). Wir bekommen

$$3\left(\sum_{\sigma\tau} l^{\sigma\tau} D_\sigma D_\tau\right) = \sum_{\sigma\tau} l_{\sigma\tau} l^{\sigma\tau} = L > 0, \tag{0,18}$$

falls $l_{\sigma\tau} \neq 0$ angenommen wird. L ist mit der Fundamentalform bekannt. Andrerseits ergibt (0, 3) nach Multiplikation mit D^τ und Summation nach τ

$$\frac{5}{2} S D_\sigma = \sum_\tau l_{\sigma\tau} D^\tau. \tag{0,19}$$

Substituiert man die rechte Seite von (0, 19) linkerhand in (0, 18), so folgt

$$\frac{15}{2} S^2 = L. \tag{0,20}$$

Wegen $S \geqq 0$ ist daraus S tatsächlich eindeutig bestimmt.

Aus dem Vorstehenden entnehmen wir unter anderem folgendes: Im Falle, daß $\Delta(Y) = 0$ eine n-fache Nullstelle besitzt, war (wenn überhaupt) stets nur eine einzige Lösung D_ϱ von (1) zulässig, weil die D_ϱ ja in allen Fällen eindeutig durch die metrische Fundamentalform bestimmt waren. Also:

Im Falle einer n-fachen Nullstelle von $\Delta(Y) = 0$ ist die metrische Normalform der betrachteten Liouvilleschen Mannigfaltigkeit eindeutig bestimmt, wenn wir von trivialen Transformationen und Drehungen absehen.

Ferner ergibt sich: Der Fall $R \equiv 0$, $l_{\varrho\sigma} \not\equiv 0$ kann lediglich für $n = 6$ eine n-fache Nullstelle von $\Delta(Y) = 0$ liefern; in der metrischen Normalform sind dann die $f_j(\xi_j)$ (vgl. Einl. (a), S. 106) lineare Funktionen der ξ_j. Letzteres folgt aus (16) (§ 3, S. 115) und (0, 132) oben. Umgekehrt bestätigt man: Sind die $f_j(\xi_j)$ in einer Normalform lineare Funktionen der ξ_j und ist $n = 6$, so gilt $R \equiv 0$.

§ 4.

Transformation der Liouvilleschen Mannigfaltigkeiten.

Wir gehen schließlich zur Untersuchung über, *auf wieviel verschiedenen Weisen die metrische Fundamentalform einer Liouvilleschen Mannigfaltigkeit auf Normalform transformiert werden kann.* Diese Untersuchung soll hier mit ganz elementaren Hilfsmitteln geführt werden. Wir legen dabei der Betrachtung *eine* der (nach Voraussetzung vorhandenen) Nor-

alformen zugrunde, substituieren die Ausdrücke (8) und (9) (§ 1, S. 111) r D_ϱ und $\lambda_{h(\varrho)}$, welche nur noch Integrationskonstanten enthalten, in e Bedingungen (A″) (§ 3, S. 115) und untersuchen, wie viele Lösungen ese Gleichungen zulassen; dabei sind neben den Integrationskonstanten e $f_j(\xi_j)$ der zugrunde gelegten Normalform als die Unbekannten aufzu-ssen.

Sei $\Phi = e^{2D^*} = \sum_j f_j(\xi_j)$ der Koeffizient der zugrunde gelegten Nor-alform (vgl. Einl. (I), (a) S. 106). Unter Benutzung von (8) mit (12a) 1, S. 112) ergibt (A_0'') (§ 3, S. 115) nach einigen Umformungen *unter r Voraussetzung, daß Θ keine Konstante sei,*

$$(II_{ht}) \quad \Phi y_t z_h + \frac{1}{4}\Phi_t' z_h(y,y) + \frac{1}{2} y_t z_h(\Phi', y) - \frac{1}{4} y_t(y,y)(\Phi', \alpha_h) + \left\{\frac{1}{6}\Phi_t'' + \Phi \tilde{X}_h\right\}\left\{\frac{1}{2} y_t z_h - \frac{1}{4}\alpha_{ht}(y,y)\right\}(y,y) = 0, \qquad (h, t = 1, \ldots, n),$$

obei gesetzt ist

$$_h = -\frac{1}{3}\Phi X_h, \quad \Phi_t' = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_t} = f_t'(\xi_t), \quad \Phi_t'' = f_t'', \quad (\Phi', \alpha_h) = \sum_\nu \Phi_\nu' \alpha_{h\nu},$$
$$(\Phi', y) = \sum_\nu \Phi_\nu' y_\nu.$$

ie über Θ gemachte Annahme besagt, daß wir zunächst nur auf die estimmung solcher Transformationen ausgehen, die weder Drehungen ch trivial sind.

Eliminiert man aus (II_{ht}) und (II_{hj}) die Unbekannte $\tilde{X}_h$, so kommt

$$(II_{hjt}) \quad e z_h^2 + d z_h(y,y) - 4 g \Phi z_h - 2 g z_h(\Phi', y) + g(y,y)(\Phi', \alpha_h) + f(y,y)^2 = 0.$$

abei ist gesetzt

$$\left.\begin{aligned}
&= e_{jt} = \frac{1}{2}[\Phi_t' y_j - \Phi_j' y_t] + \frac{1}{6}[\Phi_t'' - \Phi_j'']\, y_j y_t,\\
&= d_{h,jt} = -\frac{1}{4}[\Phi_t' \alpha_{hj} - \Phi_j' \alpha_{ht}] - \frac{1}{12}[\alpha_{ht}\Phi_t'' y_j - \alpha_{hj}\Phi_j'' y_t]\\
&\qquad - \frac{1}{12}[\alpha_{hj}\Phi_t'' y_t - \alpha_{ht}\Phi_j'' y_j],\\
&= g_{h,jt} = \frac{1}{4}[y_t \alpha_{hj} - y_j \alpha_{ht}],\\
&= f_{h,jt} = \frac{1}{24}[\Phi_t'' - \Phi_j'']\,\alpha_{ht}\alpha_{hj}.
\end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix} j \neq t \\ h, j, t = 1, \ldots, n. \end{matrix}$$

(II_{hjt}) ist wieder das System der Dall' Acqua-Gleichungen (A).

Halten wir in (II_{hjt}) alle Variablen ξ bzw. y bis auf y_l fest ($l \neq j, t$), ist (II_{hjt}) eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung 1. Ordnung r f_l mit Koeffizienten, die Polynome in y_l sind. Daher sind die Lö-

sungen regulär bis höchstens auf die singulären Stellen dieser Differentialgleichung. Letztere Stellen sind die Nullstellen von

$$g(y, y)\alpha_{hl} - 2g z_h y_l = g[-\alpha_{hl} y_l^2 - 2(\sum_{\nu}^{\nu \neq l} \alpha_{h\nu} y_\nu) y_l + (\sum_{\nu}^{\nu \neq l} y_\nu^2)\alpha_{hl}].^{19})$$

Dazu kommt dann ev. noch der unendlich ferne Punkt der komplexen y_l-Ebene.

Der *Grundgedanke der folgenden Diskussion* ist nun dieser: Die etwaigen singulären Stellen der *Lösung* f_l sind fest, d. h. sie sind unabhängig von $y_1, \ldots, y_{l-1}, \ldots, y_{l+1}, \ldots, y_n$, weil ja f_l nur von ξ_l oder, was dasselbe ist, von y_l abhängt. Die singulären Stellen der *Differentialgleichung* können folglich nur dann beweglich sein, d. h. von mindestens einer der Variablen $y_1, \ldots, y_{l-1}, \ldots, y_{l+1}, \ldots, y_n$ abhängen, falls f_l überall im Endlichen regulär ist.

Der eben entwickelten Überlegung entsprechend unterscheiden wir zwei Fälle, nämlich einmal den Fall, daß (II_{hjt}) Lösungen f_l hat, die singuläre Stellen im Endlichen besitzen; sodann den Fall, daß die Lösungen von (II_{hjt}) überall im Endlichen regulär sind. Gleichbedeutend damit ist, wie sich zeigen wird, die folgende von uns getroffene *Fallunterscheidung*, welche alle Möglichkeiten erschöpft:

1. Fall: Es existiere eine Transformation, für welche die Matrix $|\alpha_{h\lambda}|$ mindestens eine Zeile (h_0) aufweist, in der *alle* $\alpha_{h_0\lambda}$ *bis auf eines* Null sind.

2. Fall: Es sei eine Transformation möglich, für welche in *jeder* Zeile von $|\alpha_{h\lambda}|$ mindestens zwei von Null verschiedene Elemente auftreten.

Erledigung des 1. Falles: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann: $h_0 = 1$ und $\alpha_{1\lambda} = \delta_{1\lambda}$ $(\lambda = 1, \ldots, n)$ gewählt werden. Wegen der Orthogonalität der $\alpha_{h\lambda}$ ist dann $\alpha_{h1} = \delta_{h1}$ $(h = 1, \ldots, n)$. Für $h = 1$, $j = \lambda + 1$, $t = \varrho + 1$ folgt aus (II_{hjt}), daß $e_{\lambda\varrho} \equiv 0$ ist. Somit gilt

$$3\frac{\Phi_\varrho'}{y_\varrho} + \Phi_\varrho'' = 3\frac{\Phi_\lambda'}{y_\lambda} + \Phi_\lambda'' = \text{konst.} = 4\gamma, \quad \varrho \neq \lambda, \quad \varrho, \lambda = 2 \ldots, n.$$

Daraus folgt

$$(2,0) \qquad f_\varrho = \frac{1}{2}\gamma y_\varrho^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_\varrho y_\varrho^{-2} + \beta_\varrho \qquad (\varrho = 2, \ldots, n),$$

ε_ϱ und β_ϱ sind Integrationskonstanten.

---

[19]) Die Summation erstreckt von $\nu = 1$ bis $\nu = n$ mit Ausnahme von $\nu = l$.

Führen wir die Ausdrücke (2,0) in $(II_{11\varrho})$ ein $(\varrho + 1)$, so erhalten r zunächst

$$f_1 = 2\gamma y_1^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_1 y_1^{-2} + \beta_1$$

d sodann $\gamma = 0$, $\sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu = 0$.

Wir haben also folgendes Ergebnis:

Eine (von der Identität verschiedene, nicht triviale) *Transformation r metrischen Fundamentalform unserer Liouvilleschen Mannigfaltigit in eine* (*andere*) *Normalform existiert im 1. Falle nur dann, wenn e f_ϱ die Gestalt haben*

$$f_\varrho = \varepsilon_\varrho (\xi_\varrho + \eta_\varrho)^{-2} \qquad (\varrho = 1, \ldots, n);$$

bei sind ε_ϱ und η_ϱ willkürliche Konstante $(\sum_{\varrho=1}^{n} |\varepsilon_\varrho| > 0)$.

Und zwar gibt es bei gegebenen f_ϱ stets eine Transformation der aglichen Art, die im allgemeinen, d. h. falls alle $\varepsilon_\varrho \neq 0$ sind, bis auf iviale Transformationen eindeutig bestimmt ist.

Die letzte Behauptung ist so einzusehen: Setzt man in den Transrmationsformeln (12) (§ 1, S. 112) $\alpha_{hj} = \delta_{hj}$, also $z_k = y_k$, $c = 2$, $c_j = \eta_j$, führt die so entstehende Transformation die metrische Normalform in ch über. Von trivialen Transformationen abgesehen, gibt es aber auch, ie die obige Herleitung zeigt, keine weiteren Transformationen, die nicht ivial oder nicht Drehungen sind. Letztere sind aber ausgeschlossen eshalb, weil $\Delta(Y)$ zufolge der Form der f_ϱ $(\varepsilon_\varrho \neq 0,\ \varrho = 1, \ldots, n)$ keine ehrfachen Nullstellen besitzt, weil also die α_{hj} eindeutig bestimmt sind.

Erledigung des 2. Falles. Wir setzen also voraus, es sei eine ransformation möglich, für welche in jeder Zeile der Matrix $|\alpha_{h\lambda}|$ mindestens zwei von Null verschiedene Elemente auftreten. Wir werden eigen, daß der in Rede stehende Fall nur dann vorliegen kann, wenn die äkulargleichung $\Delta(Y)$ eine n-fache Nullstelle besitzt. Nehmen wir dies nmal als richtig an, so folgt aus der Schlußbemerkung zu § 3 (S. 120), aß dann D_ϱ eindeutig bestimmt, also $\Theta = \text{konst.}$ und $D_\varrho = D_\varrho^*$ ist gegen ie Voraussetzung, welche wir zu Eingang dieses Paragraphen (S. 121) emacht haben. Der Fall 2 scheidet also aus.

Ein erstes Ergebnis unserer Diskussion ist also dieses: Abgesehen om Falle 1 gibt es keine Transformationen, die nicht Drehungen oder ie nicht trivial sind.

Sodann ergibt sich für den *Fall einer k-fachen Nullstelle* $(2 \leqq k \leqq n-1)$ as am Schlusse der Einleitung (S. 107) bzw. das in § 3 (S. 116) angegebene esultat.

Denn einerseits subsumiert sich dieser Fall einer k-fachen Null stelle im allgemeinen nicht unter den Fall 1, so daß also höchsten Drehungen und triviale Transformationen für die in Frage kommende Variablen (der Normalform) zulässig sind; andererseits sind diese eben erwähnten Drehungen usw. auch wirklich Transformationen der gewünschten Art. Und umgekehrt: Wenn die Mannigfaltigkeit eine Schar von Dre hungen gestattet, dann muß eine mehrfache Nullstelle der Säkulargleichung vorliegen; denn es muß dann *verschiedene* Lösungssysteme $\lambda_{h(\varrho)}$ bzw. α_{k} $(h, \varrho$ bzw. $k, j = 1, \ldots, n)$ von (A') (§ 2, S. 114) geben.

Der in § 3 (S. 116) erwähnte *Ausnahmefall* liegt dann und nur dann vor, falls $f_\varrho = \varepsilon_\varrho (\xi_\varrho + \eta_\varrho)^{-2}$, $\varrho = 1, \ldots, n$, und einige der ε_ϱ Null sind; zu den Drehungen kommt dann noch die im Falle 1 auftretende Möbius Transformation hinzu.

Wir haben nun noch nachzuholen eine Skizze des Beweises für die Behauptung, daß im Falle 2 eine n-fache Nullstelle der Säkulargleichung vorliegt. Zu dem Zwecke wird der Reihe nach gezeigt, daß die in (II_{hjt}) auftretenden Funktionen $f_\varrho(\xi_\varrho)$ Polynome sind, daß ihr Grad höchstens 2 beträgt und daß der Koeffizient des Gliedes 2. Grades in $f_\varrho(\xi_\varrho)$ von j unabhängig ist $(\varrho = 1, 2, \ldots, n)$. Daraus folgt nach (15) die Behauptung.

Daß $f_\varrho(\xi_\varrho)$ ein Polynom ist, folgt aus der Feststellung, daß die singulären Stellen der Differentialgleichung beweglich, daß also die $f_\varrho(\xi_\varrho)$ überall im Endlichen regulär sind, während im unendlich fernen Punkt nur ein Pol vorhanden sein kann, der überdies höchstens von 4. Ordnung ist $(\varrho = 1, \ldots, n)$. All dies entnimmt man leicht aus (II_{hjt}).

Setzt man dann für die $f_\varrho(\xi_\varrho)$ in (II_{hjt}) Polynome vom (höchstens) 4. Grade ein, so ergibt die Koeffizientenvergleichung, daß der Grad höchstens 2 beträgt und daß die Koeffizienten der Glieder 2. Grades in allen Polynomen den gleichen Wert besitzen.

(Eingegangen am 13. August 1924.)

Über ungeschlossene stetige Kurven.

Von

W. Scherrer in Winterthur.

Eine stetige Kurve werde als ungeschlossen bezeichnet, wenn sie ischen je zwei ihrer Punkte nur ein irreduzibles Kontinuum enthält. per diese topologisch invariante Beschränkung des Begriffs der stetigen urve sollen im folgenden einige Sätze aufgestellt und bewiesen werden, lche auch der Anschauung leicht zugängliche Eigenschaften darstellen. as die Gestalt dieser Kurven betrifft, so sind sie eine Verallgemeinerung ssen, was man in der kombinatorischen Topologie als Baum bezeichnet. Gegensatz zum letztern Begriff können jedoch diese Gebilde unendlich le „Äste" enthalten, deren Durchmesser aber immer dort, wo sie sich ufen, gegen Null konvergiert („gefiederte" Kurven).

Nach Hahn und Mazurkiewicz kann eine stetige Kurve charakterirt werden als ein beschränktes Kontinuum, welches im Kleinen zummenhängend ist. Daran anschließend kann man den einfachen Kurvengen als ein zwischen zwei Punkten A und B irreduzibles Kontinuum finieren, welches im Kleinen zusammenhängend ist. Diese Definition ist r die nachfolgenden Überlegungen besonders geeignet, und ihre Zulässigit soll deshalb zuerst auf direktem Wege nachgewiesen werden. Der chweis geschieht so, daß man zeigt, daß das vorausgesetzte Kontinuum B durch irgendeinen seiner Punkte C, welcher von A und B verschieden , zerfällt in zwei ebensolche Teilkontinuen AC und BC, welche außer keinen Punkt gemein haben und zusammen AB erschöpfen.

Sei a_1 der kleinere der beiden Abstände AC und AB. Man bestimme e Größe $\delta_1 < \frac{a_1}{2}$ derart, daß irgend zwei Punkte des Kontinuums, deren bstand kleiner ist als δ_1, verbunden werden können durch ein Teilntinuum, dessen Durchmesser kleiner ist als $\frac{a_1}{2}$ (Auswertung des Zummenhangs im Kleinen für ein beschränktes Kontinuum auf Grund des

Heine-Borelschen Überdeckungssatzes). Hierauf führe man eine δ_1-Kett von A nach C. In dieser δ_1-Kette finden wir von A ausgehend eine ersten Punkt P, dessen Abstand von C oder B kleiner ist als $\frac{a_1}{2}$. Ver binden wir nun je zwei aufeinanderfolgende Punkte der von A bis P ge führten δ_1-Kette durch ein Teilkontinuum vom Durchmesser kleiner $\frac{a_1}{2}$, s erhalten wir ein A mit P verbindendes Kontinuum, welches weder C noc B trifft. Dabei ist der kleinere der beiden Abstände a_2, welchen diese Kontinuum von C und B hat, kleiner als $\frac{a_1}{2}$. In analoger Weise kon struieren wir dann zu a_2 eine δ_2-Kette, zu a_3 eine δ_3-Kette usw. Die un die Menge ihrer Grenzpunkte erweiterte Folge der so erhaltenen Kontinue bildet selbst ein beschränktes Kontinuum, welches sicher einen der beide Punkte C oder B enthält, da die Größen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ gegen Null kon vergieren. Würde dieses Kontinuum aber B enthalten, so könnte ma die Approximation so nahe an B herantreiben, daß wegen des Zusammen hangs im Kleinen eine direkte Verbindung nach B möglich wäre, welch C nicht trifft. Dies würde der Voraussetzung der Irreduzibilität wide sprechen, und das konstruierte Kontinuum muß also gerade den Punkt enthalten. In der gleichen Weise kann man nun von B aus sich den Kontinuum AC nähern. Durch ganz analoge Schlüsse ergibt sich, da die so gebildete Verbindung das Kontinuum AC nur in C treffen kann und die oben behauptete Zerlegungsmöglichkeit ist damit bewiesen.

Auf Grund dieser Zerlegungseigenschaft kann man nun die topologisch Abbildung auf ein Intervall direkt durchführen[1]). Man kann aber auch wie ich einem Hinweis von Herrn Prof. Weyl verdanke, die Abbildun nach einem von Hilbert[2]) angegebenen Verfahren ohne weitere explicit Verwendung des Zusammenhangs im Kleinen durchführen. Es stellt sic dabei heraus, daß auch die Eigenschaft der Irreduzibilität nicht weite benutzt werden muß, und das von Hilbert angegebene Verfahren stell somit einen Beweis dar für die von Sierpinski und Straszewicz[3]) ge

---

[1]) Über die vollständige Durchführung siehe Vierteljahresschrift d. Naturf. Ge Gesellschaft, Zürich 69 (1924), S. 251. Dort wurde abweichend vom üblichen Sprach gebrauch der Zusammenhang im kleinen als Glätte bezeichnet.

[2]) Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 4. Aufl., S. 182/83.

[3]) Die erste Charakterisierung des einfachen Bogens als ein zwischen zwe Punkten irreduzibles Kontinuum, das durch jeden dritten Punkt zerlegt wird, stamm von Janiszewski, Paris C. R. 151 (1910). Über die Charakterisierung ohne Irre duzibilitätsbegriff siehe Sierpinski, Annali di mat. (3), 26 (1916/17), S. 131/50 un Straszewicz, Math. Ann. 78 (1918), S. 369/74. Reichhaltige Literaturangaben finde sich in dem Enzyklopädiebericht Zoretti-Rosenthal über Punktmengen (II C 9a

pene Charakterisierung des einfachen Bogens auf Grund seiner Zerlegungs-
enschaft.

Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung der ungeschlossenen stetigen
rven.

I. *Jedes Teilkontinuum einer ungeschlossenen stetigen Kurve ist im
einen zusammenhängend, also selbst eine ungeschlossene stetige Kurve.*

Beweis. Wäre das Teilkontinuum k im Punkte P nicht zusammen-
ngend im Kleinen, so gäbe es in beliebiger Nähe von P einen Punkt Q
n k, so daß jedes P und Q verbindende Teilkontinuum von k, also
ch das P mit Q irreduzibel verbindende Teilkontinuum von k, eine
lliche Abweichung von P besäße. Andererseits können wegen des für
ganze Kurve K vorausgesetzten Zusammenhangs im Kleinen die Punkte
und Q durch ein Teilkontinuum von K verbunden werden, welches
iebig wenig von P abweicht. Das darin enthaltene irreduzible Kon-
uum müßte daher von dem vorhin konstruierten verschieden sein, und
se Möglichkeit widerspricht der Voraussetzung der Ungeschlossenheit.

II. *Das zwei Punkte einer ungeschlossenen stetigen Kurve verbindende
eduzible Teilkontinuum ist ein einfacher Bogen.*

Nach I ist dieses Kontinuum im Kleinen zusammenhängend und daher
Grund der an die Spitze gestellten Definition ein einfacher Bogen.

III. *Diejenigen einfachen Bögen, welche zwei Punkte einer ungeschlos-
en stetigen Kurve mit einem dritten Punkt dieser Kurve verbinden,
ben entweder nur diesen dritten Punkt oder dann einen einfachen Bogen
hein, dessen eines Ende dieser dritte Punkt ist.*

Beweis: Von den Punkten A und B seien die beiden Verbindungs-
en a und b nach dem Punkt C geführt. Gehört B zu a, so zerlegt
a in zwei einfache Bögen AB und BC, welche außer B keinen Punkt
hein haben. Dann muß aber BC in a mit b identisch sein, da sonst
schen B und C zwei Verbindungsbögen existieren würden. Liegt B
ht auf a, so besitzt die abgeschlossene Menge derjenigen Punkte von b,
che zu a gehören, einen in b am nächsten bei B liegenden Punkt P,
cher auf a und b zwei Bögen PC bestimmt, die zufolge der Ungeschlossen-
t identisch sein müssen. PC stellt den behaupteten Bogen dar.

IV. *Eine ungeschlossene stetige Kurve bestimmt in der Ebene ein
iet und ist mit dem Rande dieses Gebietes identisch.*

Beweis. Da die Kurve beschränkt ist, bestimmt sie ein und nur ein
eschränktes Gebiet. Würde die Kurve mehr als ein Gebiet bestimmen,
müßte sie mindestens ein beschränktes Gebiet bestimmen.

Wir nehmen also an, es sei ein beschränktes Gebiet vorhanden und
ei ein Punkt dieses Gebietes. Auf Grund einer sukzessive feiner wer-

denden quadratischen Teilung der Ebene approximieren wir die Kurve durch Polygonbereiche und betrachten auf jeder Stufe jeweils dasjenige innere Randpolygon, welches A enthält. Durch A werde eine Gerade g gezogen und auf ihr die äußersten Punkte bestimmt, in welchen sie von diesem innern Randpolygon getroffen wird. Es ergeben sich so zwei Folgen $R_1, R_2, R_3, \ldots$ und $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ von Punkten, welche gegen zwei Kurvenpunkte R und S konvergieren. Sei nun h eine zweite von g verschiedene Gerade durch A und m die kleinste Entfernung zwischen diesen Geraden und den von R resp. S auf g ins Unendliche gehenden Halbgeraden. Die Approximationsstufe n sei bereits so hoch gewählt, daß die Maschenbreite der quadratischen Teilung sowie die Abstände $R_n R$ und $S_n S$ kleiner geworden seien als $\frac{\varepsilon}{3}$. Die Größe ε ist dabei so klein vorausgesetzt, daß irgendzwei Punkte der Kurve, deren Abstand kleiner ist als ε, verbunden werden können durch ein Teilkontinuum der Kurve, dessen Durchmesser kleiner ist als $\frac{m}{2}$.

Wir unterscheiden nun die beiden Halbgeraden $R\infty$ und $S\infty$ auf g durch oben und unten und bezeichnen sie demgemäß mit $R\infty_o$ und $S\infty_u$. Bezeichnen wir weiter mit P_n und Q_n die äußersten Punkte, in denen die Gerade h die Polygonkontur trifft und mit $R_n P_n S_n$ denjenigen der beiden durch R_n und S_n bestimmten Konturteile, welcher P_n enthält, so stellt die Linie $\infty_u S_n P_n R_n \infty_o$ einen die Ebene in zwei Gebiete zerlegenden Querschnitt dar. Dasjenige der beiden Gebiete, welches das Innere des Polygons nicht enthält, werde das rechtsliegende genannt und die in ihm verlaufende Halbgerade $P_n\infty$ von h dementsprechend mit $P_n\infty_r$ bezeichnet. Das andere Ende $Q_n\infty$ kann nicht in diesem Gebiet verlaufen, da man in genügender Entfernung Wege angeben kann, welche einen Punkt von $P_n\infty_r$ mit einem Punkt von $Q_n\infty$ verbinden und den angegebenen Querschnitt genau einmal schneiden. Der Punkt Q_n liegt somit auf dem das Teilstück $R_n P_n S_n$ zur Polygonkontur ergänzenden Teilstück, welches wir demnach mit $R_n Q_n S_n$ bezeichnen. Wir haben somit eine Teilung der Ebene in drei Gebiete, ein rechtsliegendes, ein mittleres (das Polygongebiet) und ein linksliegendes, in welchem die Halbgerade $Q_n\infty$ verläuft, die als $Q_n\infty_l$ zu bezeichnen ist.

Wir führen nun auf dem rechtsliegenden Konturteil $R_n P_n S_n$ eine $\frac{\varepsilon}{3}$-Kette von Punkten von R_n nach S_n und ersetzen entsprechend der Schärfe der Polygonapproximation jeden dieser Punkte durch einen Punkt der Kurve im Abstand $< \frac{\varepsilon}{3}$. Den Punkten R_n und S_n lassen wir speziell die Punkte R und S entsprechen.

Wir erhalten so eine ε-Kette von Kurvenpunkten, welche wir nun ufeinanderfolgend durch Teilkontinuen verbinden, deren Durchmesser leiner ist als $\frac{m}{2}$. Das so entstandene Kontinuum verbindet R mit S nd hat außerdem die Eigenschaft, daß diejenigen seiner Punkte, welche icht im rechtsliegenden Gebiete liegen, von den Halbgeraden $R\infty_o$ und ∞_u in der Distanz um weniger als m abweichen. Da nun die beiden unkt R und S im Außengebiet des Polygons durch die beiden Halberaden $P_n\infty_r$ und $Q_n\infty_l$ voneinander getrennt werden, so folgt aus dem orhergehenden, daß das eben konstruierte Kontinuum die rechtsliegende albgerade und nur diese trifft. Das gleiche gilt natürlich auch von dem diesem Kontinuum enthaltenen R und S irreduzibel verbindenden Konnuum. Auf genau dieselbe Weise kann man die Existenz eines irreduiblen Kontinuums nachweisen, welches nur die linke Halbgerade $Q_n\infty_l$ on h trifft. Wir haben damit zwei irreduzible Kontinuen zwischen R nd S bestimmt, welche nicht identisch sein können, im Gegensatz zur oraussetzung der Ungeschlossenheit.

Daß die Kurve mit dem Rande dieses Gebietes identisch ist, ergibt ch leicht: Jeder Randpunkt der Kurve ist ein Randpunkt des Gebietes, es ja nur ein Gebiet gibt. Jeder Punkt der Kurve muß aber Randnkt sein, da die Existenz innerer Punkte der Ungeschlossenheit widerricht.

Aus Satz IV folgt als spezieller Fall, daß ein einfacher Bogen in der bene genau ein Gebiet bestimmt. Wie man sieht, kann man durch dertige Überlegungen auch den Jordanschen Kurvensatz beweisen.

Nach den Untersuchungen von Schönflies und Hahn[4]) über stetige urven sind die Kurvenpunkte auch allseitig erreichbar.

V. *Eine topologische Abbildung einer ungeschlossenen stetigen Kurve f sich selbst oder auf ein Teilkontinuum von ihr hat mindestens einen xpunkt.*

Beweis. Sei A_1 ein Punkt der Kurve und A_2 sein Bild. Der A_1 t A_2 verbindende einfache Bogen a_1 geht bei der Abbildung über in n einfachen Bogen $A_2A_3 = a_2$, wo A_3 das Bild von A_2 bedeutet. Nach tz II existieren nun folgende Möglichkeiten:

1. a_2 ist ein Teilkontinuum von a_1 oder a_1 ein Teilkontinuum von Der Fall ist gleichbedeutend mit der Abbildung eines Intervalles auf Teilintervall; hier gibt es sicher einen Fixpunkt.

2. a_1 und a_2 haben miteinander nur A_2 gemein. Dann haben auch e Bilder a_2 und a_3 nur den Punkt A_3 gemein. Wäre nämlich B ein

[4]) Siehe den unter [1]) Seite 3 zitierten Bericht Zoretti-Rosenthal, S. 946/47.

von A_2 verschiedener Punkt, welcher sowohl a_2 als auch a_3 angehört, so hätte er als Punkt von a_3 sicher ein von A_2 verschiedenes Original auf a_2. Als Punkt von a_2 hätte er aber ein Original auf a_1, und somit wäre die inverse Abbildung nicht eindeutig. a_1 und a_3 haben überhaupt keinen Punkt gemein. Ein derartiger Punkt C würde auf a_2 einen einfachen Bogen CA_2 und auf a_1 einen Bogen CA_2 bestimmen. CA_2 würde aber mit A_2A_3 einen einfachen Bogen bilden, welcher C mit A_3 verbindet und notwendig vom ersten Bogen CA_3 verschieden wäre, da dieser vom Bogen A_2A_3 nur den Punkt A_3 enthält.

Durch Iteration der Abbildung gelangt man so zu einer unendlichen Kette von Bögen $a_1, a_2, a_3, \ldots$, in welcher immer nur zwei aufeinanderfolgende Bögen a_m und a_{m+1} den Punkt A_{m+1} gemein haben. Der Durchmesser dieser Bögen muß notwendig gegen Null und die Kette der Verbindungspunkte $A_1, A_2, A_3, \ldots$ gegen einen einzigen Grenzpunkt konvergieren. Wären nämlich zwei Grenzpunkte E und F vorhanden, so könnte man die Kette etwa bis zum Punkte A_m in beliebige Nähe von E und von da in beliebig kleinem Abstand an F vorbei wieder zum Punkte A_n in beliebiger Nähe von E führen. Der Teil der Kette, welcher von A_m bis A_n führt, ist ein einfacher Bogen, welcher diese beiden einander nahe liegenden Punkte miteinander verbindet, aber einen endlichen Durchmesser hat. Wegen des Zusammenhangs im Kleinen müßte aber auch eine Verbindung dieser beiden Punkte mit kleinem Durchmesser existieren, was wieder gegen die Voraussetzung der Ungeschlossenheit verstößt. Der Grenzpunkt A der Folge $A_1, A_2, \ldots$ ist daher notwendig ein Fixpunkt.

3. a_1 und a_2 haben miteinander den einfachen Bogen A_2A' gemein, welcher ein echtes Teilkontinuum beider Bögen darstellt.

Es ist dann leicht, folgende Ausführungen in strenge Form zu kleiden. Man bewege den Punkt P auf A_1A_2 von A_1 gegen A' hin. Sein Bild P' läuft dann auf A_3A_3 von A_3 aus ebenfalls gegen A'. Erreichen die beiden Punkte A' gleichzeitig, so ist A' der Fixpunkt. Kommt P zuerst nach A', so führt man P von A' aus auf $A'A_2$ weiter gegen A_2 hin und erhält einen Fixpunkt auf $A'A_2$ dort, wo sich P und P' begegnen.

Kommt aber P' zuerst nach A', so befindet sich P zu gleicher Zeit auf A_1A' in Deckung mit dem Original A des Punktes A'. Führt man nun P von A nach A', so läuft P' von A' auf $A'A_3$ nach dem Bild A'' von A'. Die Abbildung von AA' auf $A'A''$ entspricht dann dem Fall 2., und somit ist die Existenz auch für den dritten Fall sichergestellt.

(Eingegangen am 25. November 1924.)

Zur Geometrie des binären Formennetzes fünfter Ordnung.

Von

Wilhelm Müller in Hannover.

§ 1.

Einleitung.

Im folgenden möchte ich einen kurzen zusammenfassenden Bericht
ben über eine, bereits vor dem Kriege abgeschlossene Untersuchung[1])
r rationalen Kurve fünfter Ordnung der Ebene vom Standpunkt der
nerzeit von Clebsch-Aronhold, Gordan u. a. ausgebauten Invarianten-
eorie der binären Form. Nachdem die rationale Quartik in den Arbeiten
n Stahl, Meyer, Groß ziemlich erschöpfend behandelt war, lag es nahe,
mentlich nach den, besonders von italienischen (Berzolari, Marletta)
d englisch-amerikanischen Autoren (Conner, Coble u. a.) geleisteten
rarbeiten auch der Quintik und dem mit ihr zusammenhängenden Formen-
stem eine entsprechende allgemeine Behandlung angedeihen zu lassen, in
r sowohl der geometrische Zusammenhang mit der Normkurve in fünf-
mensionalen Raume (Veronese, Fr. Meyer, Berzolari), als auch die
ebraische Zurückführung der geometrischen Verhältnisse auf das System
r elementaren Kombinanten des quinären Netzes Berücksichtigung fanden.

Die besondere Stellung der ebenen Quintik ist dadurch gegeben, daß
em Formnetz ein apolares Netz gegenübergestellt werden kann. Das
rt zu einer interessanten Zuordnung zweier Ebenen und zu mehreren
rrespondenzen, die sich als sehr fruchtbar erweisen. Im weiteren Ver-
ge dieser Zuordnung spielt namentlich die *Stahlsche Kubik* eine Rolle,

[1]) Wilhelm Müller, Die rationale Quintik, vom fünfdimensionalen Raume aus
ehen, Giornale di Matem. di Battaglini **60** [(3) **13**] (1922) S. 3—98 (zitiert als
Q.). Vgl. auch: Die rationale Kurve fünfter Ordnung im fünf-, vier-, drei- und
idimensionalen Raum, Dissertation Leipzig (B. G. Teubner) 1910, S. 1—100 (zitiert
Diss.).

auf welche die Raumquintik sich projektivisch beziehen läßt und das daraus durch Übertragung auf die Ebene entstehende Netz von Kurven dritter Ordnung, resp. dritter Klasse mit gemeinsamem Doppelelement, das in einfacher Beziehung steht zu den Kovarianten des quinären Formenbüschels.

Aus dem speziellen Teil, der keinerlei Vollständigkeit anstrebt, möchte ich die Behandlung der Quintik mit vierfachem Punkt und die dazu konjugierte Kurve hervorheben, die im Anschluß an die Invariantentheorie der binären Form siebenter Ordnung durchgeführt ist.

Um Raum zu sparen ist in folgendem auf die genauere Beweisführung und die gelegentlich schwierige Rechnung zum größten Teil verzichtet worden. Ich hoffe später meine Resultate mit den Methoden der modernen Vektorrechnung in Beziehung zu bringen.

§ 2.

Die Einzelform und der Formenbüschel fünfter Ordnung.

1. Die Koordinaten der rationalen Normkurve N^5 im fünffach ausgedehnten Raume Σ_5 können die Potenzen eines Parameters proportional gesetzt werden

$$(1) \qquad x_0 : x_1 : \ldots : x_5 = 1 : -\lambda : \lambda^2 : \ldots : -\lambda^5.$$

Einem linearen Raum Σ_4 mit den Koordinaten u_i ist in bezug auf N^5 eine „Schnittform“ φ zugeordnet, die gleich Null gesetzt, die Parameter der Schnittpunkte von (u) und N^5 liefert; die Verhältnisse der u_i sind den symmetrischen Funktionen dieser Parameter proportional.

Gleichsetzung der Parameter gibt die Darstellung von N^5 als Klassenkurve, d. h. als Gesamtheit der fünfpunktig berührenden Räume T_4

$$(2) \qquad u_0 : u_1 : \ldots : u_5 = \lambda^5 : 5\lambda^4 : \ldots : 1.$$

Ebenso ist jedem Punkt (x) des Σ_5 in bezug auf N^5 eine „*Berührform*“ zugewiesen, deren Wurzeln die Parameter der fünf von (x) an N^5 gehenden T_4 darstellen usw. Umgekehrt kann man jede Form fünfter Ordnung entweder als Schnittform eines $\Sigma_4((u))$ oder als Berührform eines Punktes (x) interpretieren. Wir bezeichnen eine Form als Schnittform mit $\varphi = a_\lambda^5$, als Berührform mit $f = a_\lambda^5$. Wir sprechen auch vom Punkt (f) und von $\Sigma_4(\varphi)$. Die Inzidenz eines Punktes und eines Σ_4 wird bekanntlich durch die Apolarität[2]) der beiden zugehörigen Formen ausgedrückt. Da jede Form fünfter Ordnung zu sich selbst apolar ist, so liegt der Punkt jeder

[2]) Vgl. Rosanes, Ein Prinzip der Zuordnung algebraischer Formen, Journal für Math. 76, S. 312; Fr. Meyer, Apolarität und rationale Kurven, Tübingen 1883.

orm a_λ^5 in dem Σ_4 derselben Form, oder der Verbindungsraum jedes uintupels von N^5 geht durch den entsprechenden Punkt des Quintupels s Berührquintupel.

Einer ∞^k-Schar von Formen f ist eine ∞^{6-k}-Schar von apolaren ormen φ zugeordnet. Jene Formenschar f als Berührformenschar repräntiert einen linearen Raum Σ_k, durch den alle Σ_4 hindurchgehen, die n Formen φ als Schnittformen entsprechen. Faßt man f als Schnittrmen auf, so stellen sie einen Σ_{4-k} dar, in dem die Punkte der Formen φ s Berührformen liegen. Die entsprechenden Determinanten der Koeffienten beider Formenreihen, die man als die Koordinaten der zugehörigen äume ansehen kann, sind einander proportional[3]). Zwischen den $\binom{6}{k+1}$ eterminanten bestehen ferner gewisse linear unabhängige Relationen[4]).

2. Eine Form $f = a_\lambda^5$ besitzt im allgemeinen eine apolare Kovariante itter Ordnung und dritten Grades

$$j = (aa')^2 (aa'')^2 (a'a'')^2 a_\lambda a'_\lambda a''_\lambda \,[a_\lambda^5 \equiv a_\lambda'^5 \equiv a_\lambda''^5]. \quad (5)$$

re Wurzeln geben die Schnittpunkte der einzigen, durch den Punkt (x) *henden Trisekantenebene von* N^5. Die T_4 in diesen Punkten schneiden h in den Nullraum des Punktes (f). Die Kurve C_4^5 fünfter Ordnung Σ_4, die aus N^5 durch Projektion von (f) aus erhalten wird, besitzt allgemeinen eine einzige Trisekante. Sind $p_\lambda, q_\lambda, r_\lambda$ die voneinander rschiedenen Linearfaktoren von j, so läßt sich f in die Form setzen

$$f = k_1 (p_\lambda)^5 + k_2 (q_\lambda)^5 + k_3 (r_\lambda)^5. \quad (\ )$$

rschwindet j identisch, so liegt (f) auf einer Sehne von N^5, deren rvenpunkte den Wurzeln von $i = (f, f)^4$ entsprechen[5]).

3. Ein *Berührformenbüschel* stellt im Σ_5 in bezug auf N^5 eine Gerade r, die wieder abgekürzt als Gerade $(f_0 f_1)$ bezeichnet werden soll, wenn $= a_\lambda^5$, $f_1 = b_\lambda^5$ zwei linear unabhängige Formen des Büschels sind; wie ngekehrt jeder Geraden ein Formenbüschel entspricht.

Die ∞^3 Quintupel, welche die Σ_4 durch $(f_0 f_1)$ auf N^5 bestimmen, hören ebenso vielen zu f_0, f_1 apolaren (Schnitt-) Formen φ an, die sich eder linear aus vier Formen $\varphi_0 = \alpha_\lambda^5$, $\varphi_1 = \beta_\lambda^5$, $\varphi_2 = \gamma_\lambda^5$, $\varphi_3 = \delta_\lambda^5$ zummensetzen lassen. Natürlich kann auch der Büschel als Repräsentant

[3]) Vgl. Diss. S. 6 u. 7; H. G. Graßmann, Ausdehnungslehre, 1862; Verwendung Ausdehnungslehre für die allgemeine Theorie der Polaren, Journal für Math. 84, 281.

[4]) K. Th. Vahlen, Über die Relationen zwischen den Determinanten einer Ma- Journ. f. Math. 112, S. 306.

[5]) Über die Bedeutung der übrigen Grundkovarianten und Invarianten der Form die Originalarbeit, namentl. Diss. S. 18 u. 19.

eines Σ_3 gelten, der die Σ_4 der Formen f als Schnittformen trägt und dessen Punkte φ zu Berührformen haben.

Die geometrischen Eigenschaften der Geraden, resp. des $\Sigma_3(f_0 f_1)$ in bezug auf N^5 oder die Eigenschaften der Raumkurve fünfter Ordnung, die man erhält, wenn man N^5 vermittelst Ebenen durch $(f_0 f_1)$ auf einen Σ_3 projiziert, hängen ab von den Elementarkombinanten[6]) des Büschels

$$r = (f_0 f_1)^1; \quad s = (f_0 f_1)^3, \quad g = (f_0 f_1)^5, \tag{5}$$

zwischen denen nach Berzolari[7]) drei Relationen bestehen. Die Elementarkombinanten der Formenschar φ unterscheiden sich von r, s, g nur durch konstante Faktoren.

Die Wurzeln der Kombinante $r = (a\,b)\, a_\lambda^4\, b_\lambda^4$ achter Ordnung sind die Parameter der Berührungspunkte der acht die Gerade $(f_0 f_1)$ treffenden vierpunktig berührenden T_3 resp. der den Raum $(f_0 f_1)$ treffenden Tangenten von N^5.

Durch Polarisation der Form erhält man z. B. die Bedingung dafür, daß vier Punkte $\lambda\,\mu\,\nu\,\varrho$ mit $(f_0 f_1)$ in einem Σ_4 liegen.

$$(a\,b)\, a_\lambda\, a_\mu\, a_\nu\, a_\varrho\, b_\lambda\, b_\mu\, b_\nu\, b_\varrho = 0, \tag{6}$$

die auch durch die Polarenausdrücke der Kombinanten dargestellt werden kann. *Durch die Gerade $(f_0 f_1)$ geht im allgemeinen ein Quadrisekantenraum an N^5.* Ihm entspricht eine Kovariante vierter Ordnung und vierten Grades, die in folgender Weise durch Überschiebungen der Kombinanten darstellbar ist:

$$Q = -\frac{4}{3}(rr)^6 + \frac{4}{7}(rs)^4 + \frac{16}{147}(ss)^2 - \frac{2}{45}s \cdot g. \tag{7}$$

Q gibt gleichzeitig die Kurvenpunkte der Quadrisekante einer C_3^5, deren ebene Schnitte der Formenschar $\varphi_0 \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$ entsprechen. Eine weitere wichtige Kovariante des Büschels resp. der C_3^5 ist die zu den f apolare Form achter Ordnung

$$\Theta = n_\lambda^8,$$

deren dritte Polaren also mit der ∞^3-Schar der Formen φ zusammenfallen. Θ ist bis auf einen konstanten Faktor mit der von Gordan[8]) ebenso bezeichneten, von Stéphanos[9]) R_1 genannten Kovariante iden-

[6]) P. Gordan, Über Kombinanten, Math. Annalen 5, S. 95.

[7]) L. Berzolari, Sui combinanti dei sistemi lineari di Quintiche binarie, Rendic. del circolo mat. di Palermo 7 (1893), S. 16 ff.; vgl. auch Sulla curva gobba razionali del qu. ord., Atti della R. Acc. dei Lincei 7 (1894), S. 308.

[8]) P. Gordan, Über die Bildung der Resultante zweier Gleichungen, Math. Annalen 3, S. 389.

[9]) Stéphanos, Mémoire sur la théorie des formes binaires et sur l'elimination, Annales de l'École Norm. Sup. (3), 1 (1884), S. 381.

sch, welche identisch verschwindet, sobald f_0, f_1 zwei oder mehr inearfaktoren gemeinsam haben[10]). Die Determinantendarstellung habe h in meiner Arbeit gegeben. Θ ist nichts anderes wie die mit $-4\lambda, 6\lambda^2, \ldots, \lambda^4$ geänderte Bézoutsche Determinante U. Der Wert er Sylversterschen Katalektikante E von Θ ist, von einem Faktor abesehen, gleich U^4. Die symbolische Darstellung von Θ durch die fundaentalen Kombinanten r, s, g ist von Gordan[8]) gegeben. Die Resultante R on f_0 und f_1 kann in die Form

$$R = (\Theta, r)^8$$

esetzt werden.

Schließlich kann man aueh die Kombinanten r, s, g durch Invarianten nd Kovarianten von Θ ausdrücken[11]).

Verschwindet die Form Q identisch, so lassen sich, falls $r = (f_0 f_1) \neq 0$, e Formen f_0, f_1 als Polaren einer Form sechster Ordnung

$$F = p_\lambda^6$$

rstellen[12]). Da sich F auf ∞^1-fache Weise auf die Summe von vier chsten Potenzen reduzieren läßt, so gibt es in diesem Falle ∞^1 Quadrikantenräume durch die Gerade $(f_0 f_1)$, resp. ∞^1 Geraden in den $\Sigma_3(f_0 f_1)$, e in vier T_4 von N^5 enthalten sind. Die aus $(f_0 f_1)$ projizierte Raumurve hat ∞^1 Quadrisekanten, sie heißt bekanntlich nach Bertini C_3^5 weiter Spezies.

Umgekehrt ist jeder Form $F = p_\lambda^6$ eine bestimmte Gerade $(f_0 f_1)$ zuordnet, deren Punkte im Σ_5 die Polaren von F als Berührformen in zug auf N^5 besitzen ($H = (F, F)^2$ als $\neq 0$ vorausgesetzt).

Wir werden diese Gerade, resp. den Raum, der in $4\mathsf{T}_4$ der N^5 enthalten ist, als Gerade (F) oder Raum (F) bezeichnen[13]). Es gibt dann ^{6} Geraden (F) im Σ_5. Die Quadrisekantenräume Q durch eine Gerade (F) lden einen Kegel zweiten Grades, dessen Gleichung lautet:

$$K = \begin{vmatrix} p_0 p_1 \cdots p_4 \\ p_1 p_2 \cdots p_5 \\ p_2 p_3 \cdots p_6 \\ x_0 x_1 \ldots x_4 \\ x_1 x_2 \ldots x_5 \end{vmatrix} = 0,$$

[10]) Berzolari, Sulla teoria dell' involuzione, Rend. Acc. di Napoli (2), 5 891), S. 35.

[11]) Vgl. R. Q., S. 16.

[12]) W. Stahl, Zur Erzeugung der rat. Raumkurven, Math. Annalen 40, S. 42f.

[13]) Marletta, Sulle curve raz. del qu. ord., Rendic. del circolo mat. di Palermo S. 94.

wenn p_i die Koeffizienten der Form F sind. Dieser Kegel projiziert sich in die Fläche zweiten Grades, auf der die Kurve C_8^5 zweiter Spezies gelegen ist. Wenn H und i, die zweite und vierte Überschiebung der Form F über sich selbst, j die Apolare dritter Ordnung von x_λ^5 und $l = (F, (FF)^4)^4$ bedeuten, so kann man setzen:

$$K = (H, j)^6 - \frac{3}{10}(il)^2. \tag{9}$$

§ 3.

Das Formennetz fünfter Ordnung.

Einer Ebene π_f im Σ_5 ist ein Berührformennetz fünfter Ordnung

$$f_0 + k_1 f_1 + k_2 f_2 = a_\lambda^5 + k_1 b_\lambda^5 + k_2 c_\lambda^5$$

mit einem apolaren Netz

$$\varphi_0 + \varkappa_1 \varphi_1 + \varkappa_2 \varphi_2 = \alpha_\lambda^5 + \varkappa_1 \beta_\lambda^5 + \varkappa_2 \gamma_\lambda^5$$

zugeordnet. Die Nullräume Σ_4 der Punkte von π_f (oder die Σ_4 der f als Schnittformen) schneiden sich in einer weiteren Ebene π_φ, deren Punkte φ zu Berührungsformen haben.

Die Ebenen π_f und π_φ sind einander konjugiert in dem Nullsystem der Normkurve.

1. Nach P. Gordan fallen die Kombinanten (Komitanten) des durch die Formen f bestimmten Formennetzes zusammen mit den Invarianten und Kovarianten (Komitanten) der folgenden drei Reihen von Variablen enthaltenden Form

$$J' = \begin{vmatrix} a_\lambda^5 & b_\lambda^5 & c_\lambda^5 \\ a_\mu^5 & b_\mu^5 & c_\mu^5 \\ a_\nu^5 & b_\nu^5 & c_\nu^5 \end{vmatrix} \tag{1}$$

und wir erhalten die Fundamentalkombinanten, indem wir diese Form durch das Differenzenprodukt $(\lambda\mu)(\lambda\nu)(\mu\nu)$ dividieren und den übrigen Faktor J_f nach Potenzen von $(\lambda\mu)(\lambda\nu)(\mu\nu)$ entwickeln[14]). Es ergibt sich dann

$$\begin{aligned} J_f = {} & W_\lambda^3 W_\mu^3 W_\nu^3 + \tfrac{1}{8}\left[(\mu\nu)^2 V_\mu V_\nu V_\lambda^3 + (\nu\lambda)^2 V_\nu V_\lambda V_\mu^3 + (\lambda\mu)^2 V_\lambda V_\mu V_\nu^3\right] \\ & + \tfrac{1}{105}\left[(\lambda\mu)^2(\lambda\nu) U_\lambda U_\nu^2 + (\lambda\nu)^2(\lambda\mu) U_\nu U_\mu^2 + (\mu\nu)^2(\mu\lambda) U_\nu U_\lambda^2\right. \\ & \left. + (\mu\lambda)^2(\mu\nu) U_\lambda U_\nu^2 + (\nu\lambda)^2(\nu\mu) U_\lambda U_\mu^2 + (\nu\mu)^2(\nu\lambda) U_\mu U_\lambda^2\right], \end{aligned} \tag{2}$$

[14]) P. Gordan, Math. Annalen 5, S. 116; L. Berzolari, Rend. del circolo mat. di Palermo de, S. 11; A. B. Coble, Symmetric forms and involutions, American Journal of Math. 31, S. 183–212, 355–364; 32, S. 333–364.

$$W_\lambda^9 = -(bc)(ca)(ab)a_\lambda^3 b_\lambda^3 c_\lambda^3,$$

$$V_\lambda^5 = -\frac{1}{2}(bc)(ca)(ab)\left[(bc)^2 b_\lambda c_\lambda a_\lambda^3 + (ca)^2 c_\lambda a_\lambda b_\lambda^3 + (ab)^2 a_\lambda b_\lambda c_\lambda^3\right],$$

$$U_\lambda^3 = -(bc)(ca)(ab)\left[(bc)^2(ba)c_\lambda a_\lambda^2 + (ba)^2(bc)a_\lambda c_\lambda^2 + (ca)^2(cb)a_\lambda b_\lambda^2 + (cb)^2(ca)b_\lambda a_\lambda^2 + (ab)^2(ac)b_\lambda c_\lambda^2 + (ac)^2(ab)c_\lambda b_\lambda^2\right]$$

etzt ist.

Das Netz f oder die Koordinaten der Ebene π_f, d. h. die Determinanten Matrix

$$\left\| \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & a_5 \\ v_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_5 \\ c_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_5 \end{matrix} \right\|$$

l die Kombinanten W, V, U bestimmen sich gegenseitig [15]). Die Relanen zwischen den Determinanten, die mit der Bezeichnung

$$(ikl) = \begin{vmatrix} a_i & a_k & a_l \\ b_i & b_k & b_l \\ c_i & c_k & c_l \end{vmatrix}$$

n der Form

$$(ikl)(mno) - (mik)(lno) + (lmi)(kno) - (klm)(ino) = 0$$ [15])

d, führen ferner zu folgenden Relationen zwischen den Überschiebungen Elementarkombinanten

$$3(WW)^4 - \frac{1}{8}V^2 + \frac{1}{7}(WU)^1 = 0,$$

$$105(WV)^3 + 2V \cdot U = 0,$$

$$15(WW)^6 + \frac{25}{8}(VV)^2 - \frac{10}{7}(WU)^3 + \frac{4}{49}U^2 = 0,$$

$$21(WV)^5 + 4(V_1U)^2 = 0,$$

$$9(WW)^8 - \frac{5}{4}(VV)^4 + \frac{1}{35}(UU)^2 = 0.$$

ergibt sich weiter aus dem Satz von der Proportionalität der Determanten apolarer Systeme, daß die Fundamentalkombinanten des apon Netzes $\varphi, \mathfrak{W}, \mathfrak{V}, \mathfrak{U}$, von einem konstanten Faktor abgesehen, sich durch das Vorzeichen der Kombinante fünfter Ordnung von den Kombanten W, V, U unterscheiden

$$W = \sigma\mathfrak{W}, \quad V = -\sigma\mathfrak{V}, \quad U = \sigma\mathfrak{U}.$$

---

[15]) Vgl. K. Th. Vahlen, a. a. O. S. 306; H. G. Graßmann, Verwendung der dehnungslehre für die allg. Theorie der Polaren im Zusammenh. algebr. Gebilde, rnal für Math. 84, S. 281.

In der Tat gehen auch die Relationen (8) ineinander über, wenn man mit $-V$ vertauscht.

2. Die Form (5) liefert $= 0$ gesetzt die Bedingung dafür, daß da Tripel $\lambda\mu\nu$ zu einem Quintupel des Netzes f gehört oder daß die T_4 de N^5 in den drei Punkten einen in der Ebene π_f gelegenen Punkt gemein sam haben, resp. daß die Verbindungsebene der Punkt mit π_φ in einer Σ_4 liegt. Daraus ergibt sich dann ohne weiteres die Bedeutung der Kom binante W_λ^9. *Ihre Wurzeln liefern die Parameter der neun die feste Eben π_f treffenden T_2.*

Das Verschwinden der Form W ist die notwendige und hinreichend Bedingung dafür, daß zwischen den Formen $f_0 f_1 f_2$ eine lineare Beziehun besteht, daß also die drei entsprechenden Punkte auf einer Geraden liegen

Die Diskriminante D von W ist, wie Brill[16]) nachgewiesen hat zerlegbar in zwei Faktoren, welche je vom achten Grade in den Deter minanten (ikl) des Netzes sind

$$D = R \cdot S. \tag{7}$$

$R = 0$ ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß in Netze f einer Form mit einem vierfachen linearen Faktor, $S = 0$ die Be dingung dafür, daß in dem Netze ein Büschel mit einem zweifachen line aren Faktor enthalten ist. Die geometrische Übersetzung ist unmittelba einleuchtend.

Wenn eine Form neunter Ordnung gegeben ist, so gibt es im al gemeinen eine endliche Anzahl, und zwar 42 Netze, welche zur Kombinant neunter Ordnung haben[17]). Da aber zwei apolare Netze dieselbe Kom binante W haben, so bleiben 21 wesentlich verschiedene Netze.

Es gibt also auch 21 Ebenen, welche die in neun festen Punkte N^5 berührenden T_2 treffen.

Die Kombinante V fünfter Ordnung läßt sich, von einem Faktor ab gesehen, auf die Form bringen.

$$(bc)^5 a_\lambda^5 + (ca)^5 b_\lambda^5 + (ab)^5 c_\lambda^5.$$

Das ist aber diejenige Form f_φ, welche zu allen Individuen des Netzes apolar ist, also gleichzeitig dem Netze φ angehört.

Die Kombinante V entspricht also als Berührform dem gemeinsame Punkt der beiden im Nullsystem der N^5 konjugierten Ebenen π_f und π resp. als Schnittform dem beide Ebenen enthaltenden Σ_4.

---

[16]) Math. Annalen 20. S. 330 ff.

[17]) Vgl. Brill, a. a. O. S. 336.

Eine wesentliche Rolle für die Theorie der quinären Involution zweiter
ufe spielen die Formen sechster Ordnung

$$F = p_\lambda^6, \qquad \Phi = q_\lambda^6,$$

lche apolar sind zu den Formen des Netzes φ, resp. zu den Formen f.
r die Koeffizienten z. B. von φ sind die sechs Gleichungen zu erfüllen

$$(\Phi f_0)^5 \equiv 0, \qquad (\Phi f_1)^5 \equiv 0, \qquad (\Phi f_2)^5 \equiv 0,$$

im allgemeinen eine eindeutige Bestimmung zulassen. Beide Formen können
Determinante geschrieben werden. Wenn man die Beziehungen zwischen
h Determinanten des Systems f und den Koeffizienten der Elementar-
mbinanten benutzt, so ergibt sich z. B. für φ nach einer verhältnis-
ßig umständlichen Rechnung, auf die hier verzichtet werden muß,
gende Darstellung durch die Überschiebungen von W, V, U

$$\Phi = 45(WW)^6 - 15(WV)^4 + \frac{12}{7}(WU)^3 - \frac{25}{8}(VV)^2 + \frac{5}{14}(UV)^1 - \frac{2}{49}U^2.$$

f Grund von (9) kann Φ auch durch die Kombinanten $\mathfrak{W}, \mathfrak{V}, \mathfrak{U}$ des
items φ, ebenso die Form F durch jedes der beiden Kombinanten-
teme ausgedrückt werden. Zwischen F und Φ besteht die Beziehung

$$(F, \Phi)^6 = 0.$$

de Formen werden identisch, wenn

$$42(W, V)^4 - (U, V) = 0$$

d. Insbesondere tritt der Fall ein, wenn V identisch verschwindet,
die Netze f und φ koindizieren.

Geometrisch ergibt sich unmittelbar auf Grund von § 2: *Die Mannig-
igkeit der Geraden (F) im Σ_5 hat mit jeder allgemeinen Ebene nur
Element gemein.*

Durch einen allgemeinen Punkt im Σ_5 gehen ∞^2 Geraden (F). Einem
m Σ_3, ϱ durch den Punkt entspricht nun eine ∞^3-Schar von Formen f,
nach § 2 als Polarenschar einer Form achter Ordnung $\Theta = n_\lambda^8$ zusam-
hfällt. Jedem Punkte von ϱ ist eine Polare $n_\mu n_\nu n_\varkappa n_\lambda^5$ zugeordnet. Da
e Form sich von drei Formen sechster Ordnung durch Polarisation
eitet, so ergibt sich, *daß es drei Geraden (F) in einem Raum ϱ durch
n seiner Punkte gibt, ebenso drei Räume (F) durch eine seiner Geraden.*

Die Mannigfaltigkeit der Geraden (F) in einem Σ_3 stellt mithin, wie
rletta rein geometrisch gefunden hat, eine (3, 1, 0) Kongruenz dar,
. eine Kongruenz von der Ordnung 3 (drei Kongruenzzahlen durch
n Raumpunkt), der Klasse 1 (ein Kongruenzstrahl in einer Ebene)

und daher vom Range 0[18]). Diese Kongruenz ist identisch mit der Kon gruenz der Achsen einer Normkurve N_ϱ^3 im Raume ϱ, wie leicht nach gewiesen werden kann.

§ 4.

Die ebene Quintik.

1. Die rationale C_2^5 der Ebene (oder kurz C^5) geht aus N^5 durc Projektion von einer festen Ebene π_f auf eine andere Ebene π_c hervo Die rationale Kurve fünfter Klasse K^5 erhält man, wenn man die T_4 vo N^5 oder die Developpable D_3 von N^5, d. h. den Ort der T_3 mit eine Ebene π_p zum Schnitt bringt.

Die Involution der Schnittquintupel der Σ_4 durch π_f wird für C zur Involution der geraden Schnitte. Sind die Schnittquintupel der Seite des Koordinatendreiecks $\varphi_0 \varphi_1 \varphi_2$, so lauten die Gleichungen der Kurve

$$x_0 : x_1 : x_2 = \varphi_0 : \varphi_1 : \varphi_2. \tag{1}$$

Nach dem Vorgang von J. R. Conner[19]) kann man die Kurve 1 un die Schnittkurve K^5 der Devoloppablen D_3 mit π_f als konjugierte Kurve einander zuordnen. Diese Kurve K^5 hat dann die Darstellung

$$u_0 : u_1 : u_2 = f_0 : f_1 : f_2. \tag{2}$$

2. Die im vorigen Paragraph gegebene Bedeutung der Netz-Komb nanten können wir ohne weiteres auf die Ebene übertragen.

So ergeben z. B. die Gleichungen $W_\lambda^9 = 0$ resp. $\mathfrak{W}_\lambda^9 = 0$ die *Para meter für die neun Inflexionstangenten, resp. die neun Inflexionspunk der Quintiks.*

Die Kurve C^5 hat ferner bekanntlich sechs Doppelpunkte, entsprechen K^5 sechs Doppeltangenten. Diese Doppelelemente stehen mit N^5 in fo gendem Zusammenhang. Die Bisekanten von N^5 oder die Punkte, dere Berührungsformen als Summe zweier fünfter Potenzen darstellbar sin beschreiben eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit, deren Ordnung leic zu ermitteln ist. Jeder Quadrisekantenraum (Q) schneidet nämlich G i sechs Geraden, welche seine Kurvenpunkte paarweise verbinden. Die sechs Geraden stellen aber den vollständigen Schnitt von G mit (Q) da Denn sei (x) ein Punkt auf (Q), der nicht auf einer dieser Sehnen lie und G angehört, so wird der Σ_4 durch (Q) und die Bisekante durch $(x$ N^5 in sechs Punkten schneiden. G ist also von sechster Ordnung. Es i

[18]) Vgl. R. Sturm, Die Gebilde 1. u. 2. Grades der Liniengeometrie, II. Te Strahlenkongruenzen 1. u. 2. Ordnung, S. 27.

[19]) J. R. Conner, Au certain correspondences associated with the rational pla quintic, Johns Hopkins University Circular 1911.

ichzeitig der Ort der Punkte, deren Berührformen eine verschwindende nonizante j_λ^3 haben. Die Koeffizienten von j stellen vier kubische, enthaltene Mannigfaltigkeiten dar. G, ϱ, d. h. der Schnitt von G mit em Raum ϱ ist eine Sextikkurve. Jede Ebene π schneidet die Kurve sechs Punkten; jede Ebene wird also auch von sechs Bisekanten von getroffen, woraus wieder die entsprechende Zahl der Doppelpunkte C^5 hervorgeht usw.

Unter den möglichen Spezialfällen heben wir besonders den Fall des rschwindens von F hervor. Es gibt dann ∞^1 Formen sechster Ordnung, lche apolar sind zum φ-Netze. Sie fallen zusammen mit der Polarenar einer Form χ siebenter Ordnung[20]). Diese Form hat eine apolare uadratische Kovariante π_λ^4. Die entsprechende C_2^5 hat einen vierfachen nkt, dessen Parameter die Wurzel von π sind. Umgekehrt entspricht er Form siebenter Ordnung eine Quintik mit vierfachem Punkt. *Die ometrie dieser Quintik fällt zusammen mit der Invariantentheorie der ären Form siebenter Ordnung*[21]).

2. Wir betrachten einen Punkt (z) und den Σ_4-Büschel durch (z) d π_f. Ihm entspricht in der Ebene von C^5 ein Geradenbüschel durch en Punkt (x). Allen Punkten (z) eines Σ_3, ϱ durch π_f entspricht derbe Punkt (x) in π_c. Ist $f_3 = d_\lambda^5$ die Berührform eines nicht auf π_f egenen Punktes von ϱ, so haben wir folgende Beziehung

$$k x_i = (\varphi_i, f_3)^5,$$

k einen konstanten Faktor bedeutet.

Die vier Formen $f_0 f_1 f_2 f_3$ bestimmen die zu dem Schnittformenschel der Geraden durch (x) apolare Formenschar. Jede Form f_3, lche (3) erfüllt, gehört dieser Schar an. Aus der Proportionalität sprechender Determinanten der Formenreihen φ und f folgt weiter

$$(x\alpha_i\alpha_k) = \tau(a_l a_m a_n a_o),$$

nn man die Bezeichnung

$$\varphi_0 = \alpha_5\lambda^5 + \alpha_4\lambda^4 + \ldots + \alpha_0 de, \qquad f_0 = a_0\lambda^5 + 5a_1\lambda^4 + \ldots + a_5 de$$

grunde liegt.

Wir erhalten also aus den binären Kovarianten und Invarianten des rmenbüschels ternäre kovariante und invariante Gebilde von C^5, indem r die Determinanten (ik) des Büschels mit den x_i „rändern“.

---

[20]) Vgl. Diss. S. 67.

[21]) Über die Bedeutung der einzelnen Kovarianten und Invarianten vgl. R. Q., 78 f.

Sei K eine solche binäre Kovariante n-ter Ordnung und m-ten Grad so werden wir die daraus durch Ränderung hervorgehende ternäre K variante mit $K(x^m/\lambda^n)$ bezeichnen. Der in der Klammer enthaltene Buc stabe x möge also immer den gleichzeitigen Gebrauch der Formen φ ei schließen.

Ganz entsprechendes gilt dual für den Fall der Klassenkurve in d Ebene. Wir brauchen nur für den Punkt (x) die Gerade (u) zu nehm und die Formen f_i mit den φ_i zu vertauschen.

Wie sich die reinen (nur λ enthaltenden) Kombinanten des Netz aus der erzeugenden Funktion $J' = (\lambda\mu)(\lambda\nu)(\nu\lambda)J$ herleiten lassen (§ 3 so sind allgemein alle im Zusammenhang mit C^5 auftretenden, für bei lineare Transformationen (des Parameters und der ternären Variable invarianten Formen, binäre simultane In- oder Kovarianten gewisser e zeugender Funktionen, die mehrere Reihen beider Arten von Variabl enthalten. Zu diesen Funktionen treten dann noch die sog. indirekten e zeugenden Funktionen des apolaren Formensystems hinzu. Außerdem sin jene Kombinanten noch algebraisch zusammengesetzt mit den identische ternären Kovarianten[22]). Auf Grund des Ränderungsgesetzes können w sofort die wichtigsten kovarianten Gebilde der C_2^5 aus dem in § 2 da gestellten Kombinanten des Formenbüschels herleiten.

Die einfachste Invariante des Büschels ist die Invariante g, die fünf Überschiebung zweier Büschelformen, daraus erhalten wir in

$$g(x) = (x05) - 5(x14) + 10(x23) = 0, \tag{5}$$

den Ort des Punktes (x), der die Geraden mit apolaren Schnittforme trägt. Die fünf Schnittpunkte dieser Geraden mit C^5 sind die Punkt der Kovariante V_λ^5 des Netzes.

Ebenso leitet man z. B. aus der Kombinante r des Büschels d Gleichung der geraden Linie

$$\begin{aligned} r(x/\lambda^8) = {} & (x01)\lambda^8 + 4(x02)\lambda^7 + [6(x03) + 10(x12)]\lambda^6 \\ & + [4(x04) + 20(x13)]\lambda^5 + [(x05) + 15(x14) + 20(x23)]\lambda^4 \\ & + [4(x15) + 20(x24)]\lambda^3 + [6(x25) + 10(x34)]\lambda^2 \\ & + 4(x35) + (x45) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

ab, die bei festem λ die Tangente im Kurvenpunkte λ, bei festem x d von (x) ausgehenden acht Tangenten an die Kurve darstellt.

---

[22]) Vgl. W. Groß, Über die Kombinanten binärer Formensysteme, welch ebenen rationalen Kurven geordnet sind, Dissert. Tübingen-Stuttgart 1887, S. 1 Math. Ann. 32, S. 139 f.; Stroh, Zur Theorie der Kombinanten, Math. Annalen 2 S. 393.

Aus der Bézoutschen Resultante des quinären Büschels ergibt sich ner die Gleichung von C^5 in Punktkoordinaten.

Die mit x geänderten Kombinanten zweiten Grades in den Deternanten (ik) stellen kovariante Kegelschnitte dar. Bei festem Parater λ haben wir z. B. in

$$k(rr)^6 + k'(rs)^4 + k''(ss)^2 = 0$$

Kegelschnittnetz, zu dem auch wegen der Sizygante

$$2(rr)^6 + \frac{15}{7}(rs)^4 - \frac{50}{49}(ss)^2 - \frac{1}{3}s \cdot g = 0$$

s Geradenpaar $g(x|\lambda^2) = 0$ und $s(x|\lambda^2) = 0$ gehört. Die diesem Netze d der C^5 gemeinsamen Schnittsysteme lassen sich, wie leicht zu zeigen durch die Fundamentalkombinanten $\mathfrak{W}, \mathfrak{V}, \mathfrak{U}$ bzw. W, V, U des zu C^5 hörigen Formennetzes darstellen.

Die Gleichung (7) § 2 zeigt, daß der aus der apolaren biquadratischen variante Q des Formenbüschels abgeleitete Kegelschnitt

$$Q(x^2|\lambda^4) = 0$$

e ausgezeichnete Kurve des Netzes darstellt.

Bei variablem λ haben wir in (9) einen Büschel vierter Ordnung h Kegelschnitten, die alle einen Punkt der Ebene gemeinsam haben, es im Σ_5 einen die Ebene π_c enthaltenden Σ_3 gibt, dessen Schnittmenbüschel eine verschwindende Apolare besitzt und als Polarenbüschel er Form $\varphi = q_\lambda^6$ darstellbar ist, also auch einen Punkt der Ebene C^5, für dessen Schnittformenschar $Q(x^2|\lambda^4)$ identisch verschwindet.

Die mit x geänderte Form achter Ordnung

$$\Theta(x^4|\lambda^8)$$

llt, gleich Null gesetzt, eine Kurve vierter Ordnung vor, welche C^5 im nkte λ achtpunktig berührt, weil Θ für den Fall, daß (x) auf C^5 in Punkt mit dem Parameter μ fällt, auf die Potenz $(\lambda\mu)^8$ sich redut. Die übrigen zwölf Schnittpunkte der Kurve $\Theta(x^4|\lambda^8) = 0$ mit C^5 len in die Doppelpunkte, da Θ identisch verschwindet, sobald die Forn des Schnittbüschels durch zwei Elemente gemeinsam haben[23]). Bei ränderlichem λ stellt $\Theta = 0$ einen Büchel achter Ordnung von Kurven rter Ordnung dar. Andre Kurven erhält man durch Polarisation[24]).

So ist z. B.

$$\Theta(x^4|\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_8) = n_{\lambda_1} n_{\lambda_2} n_{\lambda_3} \ldots n_{\lambda_8} = 0$$

[23]) Vgl. auch W. Stahl, Zur Erzeugung der rationalen ebenen Kurven, Math. nalen 38, S. 583.

[24]) Vgl. auch W. Stahl, a. a. O.

eine Kurve vierten Grades, welche C^5 in den Punkten $\lambda_1\ \lambda_2 \dots \lambda_8$ und de Doppelpunkten schneidet. Polarisiert man Θ nach den fünf Parameter einer Schnittform φ_u, so ist für jeden Punkt dieser Geraden (u) dies Polare $\equiv 0$. Die Kurve

$$(\Theta, \varphi_u)^5 = \Gamma(x^3|\lambda^3)\cdot h(x)$$

zerfällt mithin in eine Kubik Γ und die Gerade h. Γ schneidet C^5 in Punkte λ dreifach und hat außerdem die Doppelpunkte mit ihr gemein Polarisiert man die Gleichung dieser Kurve nach drei Parametern, so er hält man die Gleichung einer Kubik $\Gamma(x^3|\lambda_1\lambda_2\lambda_3) = 0$, welche C^5 auße in den Doppelpunkten dreimal schneidet.

Es gibt ∞^3 Kubiken, welche durch die Doppelpunkte von C^5 gehen Nimmt man zwei Punkte als fest an, so gehen durch sie noch ∞^1 Kurven welche einen zu C^5 perspektivischen Kurvenbüschel dritter Ordnung bilden

§ 5.

Geometrische Folgerungen für die Ordnungs- und Klassenkurven.

Wir betrachten zunächst die Kurve im Σ_3. Die Klassenkurve K erhält man z. B., wenn man die Γ_2 der Normkurve mit einem Raum schneidet. Die erste Oskulante[25]) R^4_μ von K^5_ϱ entsteht, wenn man die Ebene durch μ und die Tangenten von N^5 mit ϱ zum Schnitt bringt. Es s nun $\lambda_1 \dots \lambda_5$ ein Quintupel der fundamentalen Involution $f_0 + kf$, die z der Schar der Berührquintupeln von K^5_ϱ apolar ist. Dann ergibt sich, da zwei Oskulanten $R^4_{\lambda_1}$ und $R^4_{\lambda_2}$ einen stationären Punkt gemeinsam haben drei Oskulanten $R^4_{\lambda_1}$, $R^4_{\lambda_2}$, $R^4_{\lambda_3}$ zu je zweien, drei stationäre Punkte, die au einer Geraden liegen; ferner vier zu den Punkten $\lambda_1 \dots \lambda_4$ gehörende Osku lanten paarweise sechs stationäre Punkte gemein haben, die in einer Eben liegen und schließlich die fünf Oskulanten des Quintupels paarweise zeh stationäre Punkte besitzen, welche die Ecken eines vollständigen Fün flachs sind. *Die Ebenen des Fünfflachs beschreiben, wenn das Quin tupel die Involution durchläuft, eine kubische Kurve* N^3_ϱ.

Denken wir uns nun die Ebene π_k mit K^5_π, so bestimmt jeder Raum durch π_k eine Kubik N^3_ϱ, deren Ebenen π_k in den Geraden der Kurve N^3_ϱ schneiden. Die ∞^2 Räume ϱ bestimmen in π_k ein Netz von Klasse kubiken, über das wir einige Sätze mitteilen wollen.

Zunächst ergibt sich, daß *die Netzkurven der Ort der Seiten ein vollständigen Fünfseits sind, dessen Eckpunkte die Inflexionspunkte d gemischten kubischen Oskulanten* $R^3_{\lambda_i\lambda_k}$ *der Punktpaare eines Quintupe der Fundamentalinvolution 2. Stufe sind.* Aus der früher (§ 2 und 3) da

[25]) Vgl. auch die in der Diss. S. 61 zitierten Arbeiten von Jolles, Rohn u.

legten Bedeutung der Kombinante F folgt ferner, daß *alle Kurven* $N_\varrho^3 \cdot \pi$ *Gerade* (F) *als gemeinsame Doppeltangente haben.*

Wenn der Raum ϱ durch einen Punkt λ von N^5 geht, zerfällt die rve $N_\varrho^3 \cdot \pi$ in den früher betrachteten Kegelschnitt $Q(u^2 \mid \lambda^4) = 0$ und en auf (F) gelegenen Punkt $P(\mu \mid \lambda) = 0$, deren Gleichungen man auch Determinantenform erhalten kann. Dem Kegelschnitt (Q) sind alle rseite einbeschrieben, die mit Geraden durch (P) ein Fünfseit der damentalen Involution von K_π^5 bilden. Bewegt sich der Punkt λ auf N^5, erhalten wir in π_k alle Punkte von (F) und einen Kegelschnittbüschel rter Ordnung, deren Individuen (F) als gemeinsame Tangente haben. nn ϱ durch zwei Punkte $\mu\nu$ von N^5 geht, so zerfällt die Kurve $N_\varrho^3 \cdot \pi$ drei Punkte, von denen zwei auf (F) liegen, während der dritte Punkt Schnitt der Sehne $\mu\nu$ mit π ein *sogen. zyklischer Punkt* Z in bezug K_π^5 ist. Aus § 4 folgt, daß es im Netz der Kubiken sechs in drei kte zerfallende Kurven gibt.

Bemerkenswert ist noch die *Jakobische Kurve sechster Klasse* J un- s Netzes, die in „R. Q." ausführlich betrachtet ist. Sie ist nach all- heinen Sätzen der Ort der Doppeltangenten der Netzkurven und hat die fade (F) als fünffache Tangente, ist also rational[26]). Ihre Gleichung Linienkoordinaten erhält man, wenn man den Parameter λ in den ichungen $Q(u^2 \mid \lambda^4) = 0$ und $P(u \mid \lambda) = 0$ eliminiert (vgl. R. Q. S. 71).

In Beziehung zur Normkurve kann J als Ort der Geraden gedeutet den, deren Quadrisekantenräume mit der Tangente in einem Sekanten- kte einen Σ_4 durch π_k angehört. Weiter läßt sich J in der Ebene π_k h auffassen als Ort der Verbindungslinien der Inflexionspunkte mit den kkehrpunkten aller Oskulanten dritter Klasse und dritter Ordnung K^5.

Dasselbe läßt sich auch auf den dualen Fall der Ordnungskurve übertragen.

§ 6.

Korrespondenzen zwischen den Ebenen π_k und π_c.

Wir stellen in Kürze einige der in der Originalarbeit ausführlich be- hteten Korrespondenzen zwischen der Ebene π_k der K^5 und der Ebene der C^5 auf.

1. *Die Korrespondenzen E und T.* Eine Gerade (v) in π_k trägt im emeinen einen Quadrisekantenraum (Q) der Σ_4 durch (Q) und π_k wird

[26]) Vgl. Clebsch-Lindemann, Geometrie I, S. 380 ff. — Cremona, Einleitung e Theorie der algebr. Kurven. Greifswald 1865, S. 130 u. 135 ff.

N^5 noch in einem weiteren Punkt ν schneiden. Dieser Punkt läßt sich in ein-eindeutiger Weise dem Schnitt P_ν von (v) mit der Geraden $(F$ zuordnen. Wir bezeichnen diese Korrespondenz mit E.

Der (Q) und π_k enthaltende Σ_4 schneidet nun die zweite Ebene π in einer Geraden (v'). Die von Conner angeführte Korrespondenz zwischen (v) und (v') möge Korrespondenz T genannt werden. Es ist eine $(5, 1$ Korrespondenz. Die fünf der Geraden (v') durch T zugeordneten Gerade (v) bilden die Seiten des zum Quintupel $\Sigma v_i' \varphi_i = 0$ der Fundamental involution von K^5 gehörigen Fünfseits.

Jedem Raum ϱ durch π_k entspricht ein Punkt (x) in π_c. Dreht sich (v') in π_c um (x), so beschreibt die zugeordnete Gerade die Kurve $N_\varrho^3 \cdot \pi_k$. *T ist eine kubische Korrespondenz*, deren analytischen Ausdruck man in der Originalarbeit nachsehen möge.

Es ergibt sich weiter, daß ein Doppelpunkt von C^5 in π_c (resp. de Strahlenbüschel durch ihn) durch T übergeführt wird in drei Zerfalls büschel des Netzes $N_\varrho^3 \cdot \pi_k$.

Unter den Geraden (v) in π_k ist die Gerade (F) ausgezeichnet, wei durch sie ∞^1 Räume (Q) hindurchgehen. Da diese Räume nach § 2 eine Kegel zweiten Grades bilden, so entspricht der Geraden (F) durch T ei Kegelschnitt, der sogenannte perspektivische Kegelschnitt Ψ von C^5.[27] Zwischen der früher aufgestellten Form $\Theta(x^4 \mid \lambda^8)$ und dem Büschel Ψ be steht ein bemerkenswerter Zusammenhang.

Polarisiert man $\Theta = n_\lambda^8$ nach den zwei Parametern μ, ν der beide festen Punkte von C^5, welche den durch (x) gehenden Strahlen von zukommen, so erhält man die Form $F = p_\lambda^6$. Diese Polare ist also apol zu allen geraden Schnittformen φ_u. Daher wird auch die Gleichung d in § 4 betrachteten Kurve Γ mit der Gleichung

$$\Gamma(x^3 \mid \lambda \mu \nu) = 0$$

für jedes λ erfüllt sein. *Alle Kurven $\Gamma_{\mu\nu}$ durch die beiden festen Punk $\mu\nu$ von C^5 haben also den Schnittpunkt (y) der beiden durch jene Punk gehenden und ihnen entsprechenden Strahlen von Ψ gemein.* (y) ist d neunte Grundpunkt des perspektivischen Kurvenbüschels $\Gamma_{\mu\nu}$; die acht we teren Grundpunkte sind die Punkte $\mu\nu$ und die Doppelpunkte von C^5.

Liegen $\mu\nu$ mit einem Doppelpunkt in einer Geraden g', so zerfä $\Gamma_{\mu\nu}$ in den Kegelschnitt D und g, und wir gewinnen den Satz:

Dem durch fünf Doppelpunkte von C^5 gelegten Kegelschnitt D könn ∞^1 Dreiecke eingeschrieben werden, die dem zu C^5 perspektivischen Keg

[27]) Vgl. W. Stahl, Zur Erzeugung der ebenen rationalen Kurven. Math. Ann. S. 565 u. 579.

hnitt Ψ umschrieben sind. Die Schnittpunkte von D und Ψ sind die er Punkte auf Ψ, welche zu den Berührungspunkten der vier von dem chsten Doppelpunkt an C^5 gezogenen Tangenten perspektiv liegen usw.

2. *Die Korrespondenz U.* Wir sahen, daß die Bisekanten von N^5 ie Mannigfaltigkeit G von der Ordnung 6 bilden. Der Schnitt $G \cdot \varrho$ von mit dem Raum ϱ ist eine Kurve sechster Ordnung, die als Ort der tionären Punkte allen ersten Oskulanten von K_ϱ^5 aufgefaßt werden kann. tzt man die Berührform eines Raumpunktes (x)

$$\sum_{i=0}^{3} x_i f_i = \xi_\lambda^5 ,$$

lauten die Gleichungen von $G \cdot \varrho$

$$\begin{Vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 \end{Vmatrix} = 0.$$

e Kurve G. ϱ läßt ∞^1 eingeschriebene Fünfflache zu, deren Ebenen hmiegungsebenen der Normkurve N_ϱ^3 sind.

Die Gesamtheit der Trisekanten von $G \cdot \varrho$ oder der singulären, in den isekantenebenen von N^5 gelegenen Geraden bilden eine Regelfläche R, en Gleichung durch die Katalektikante E der dem Netze φ der Ebene im Raume ϱ zugeordneten Form $F = p_\lambda^6$

$$E(u^8 \mid \lambda^{12}) = 0$$

eben ist.

Sie hat die Kurve $G \cdot \varrho$ als dreifache Kurve und hat mit der Abwickel- en von N_ϱ^3 acht Erzeugende gemein, deren Parameter die Wurzeln der mbinante r der dem Raume ϱ zugeordneten Formengruppe f sind.

Die Regelfläche R_ϱ bestimmt nun weiter in der Ebene π_k eine Kurve ter Ordnung $R_\varrho \cdot \pi_k$, die gleichzeitig den geometrischen Ort der Eck- kte das durch ein Quintupel der Fundamentalinvolution von K^5 be- mmten vollständigen Fünfseits darstellt. Da $G \cdot \varrho$ dreifach zählt für die che R_ϱ, so folgt, daß die sechs *zyklischen Punkte von K^5 dreifache nkte für alle Kurven des Netzes $R_\varrho \cdot \pi_k$ sind.*

Ordnen wir einem Punkte (y) von π_k die Gerade (u) der Ebene π_c welche mit π_k und der Trisekantenebene von (y) in einem Σ_4 liegt, hat man die Korrespondenz U. Jedem Punkt (y) in π_k entspricht eine ade (u) in π_c; dagegen sind jeder Geraden (u) zehn Punkte (y) zu- iesen, nämlich die zehn Eckpunkte des dem Schnittquintupel von (u) C^5 zugeordneten Fünfseits oder die zehn Schnittpunkte der der Ge- n (u) durch T zugewiesenen Geraden (v). *U ist also eine* $(10,1)$

Korrespondenz von der achten Ordnung, weil die Punkte (y) die Kurve $R_\varrho \cdot \pi_k$ beschreiben, während sich (u) um einen Punkt (x) dreht.

Schneidet der Raum ϱ N^5 im Punkte μ, so *zerfällt die Kurve* $R_\varrho \cdot \pi_\mu$ *in eine Kurve dritter Ordnung durch die in bezug auf* K^5 *zyklischen Punkte und eine Kurve fünfter Ordnung, welche die zyklischen Punkte zu Doppelpunkten hat.*

Für einen Doppelpunkt von C^5 (ϱ durch zwei Punkte $\mu\nu$ von N^5) zerfällt die Kubik in einen Kegelschnitt durch fünf zyklische Punkte und eine Gerade durch den sechsten zyklischen Punkt. Dieser *Punkt und die beiden Schnittpunkte des Kegelschnitts mit der Geraden* (F) *bilden eine zerfallende Kurve des Netzes* $N_\varrho^3 \cdot \pi_k$.

(Eingegangen am 18. Dezember 1924.)

Ein weiteres Existenztheorem in der Theorie der algebraischen Zahlkörper.

Von

Helmut Hasse in Kiel.

Die vorliegende Arbeit schließt sich gedanklich an eine vorangehende nlichen Titels[1]) an, ohne im einzelnen deren Kenntnis vorauszusetzen. h bewies dort die folgenden beiden Existenztheoreme:

I. *Ist k ein beliebiger algebraischer Zahlkörper, $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ verschiedene rimideale aus k und zu jedem dieser $\mathfrak{p}_\iota$ ein System von Paaren natürcher Zahlen $(e_{\iota 1}, f_{\iota 1}), \ldots, (e_{\iota r_\iota}, f_{\iota r_\iota})$ gegeben, so daß nur für alle jene ysteme die Summen $\sum_{\varkappa=1}^{r_\iota} e_{\iota\varkappa} f_{\iota\varkappa}$ einen und denselben Wert n haben, so gibt unendlich viele Relativkörper K über k (vom Relativgrade n), so daß e $\mathfrak{p}_\iota$ in K eine Zerlegung der Form*

$$\mathfrak{p}_\iota = \mathfrak{P}_{\iota 1}^{e_{\iota 1}} \ldots \mathfrak{P}_{\iota r_\iota}^{e_{\iota r_\iota}} \qquad (\mathfrak{P}_{\iota\varkappa} \text{ vom Relativgrade } f_{\iota\varkappa})$$

Potenzen verschiedener Primideale haben.

II. *Ist $\mathfrak{G}$ eine beliebige endliche Abelsche Gruppe mit den Invarianten , $\ldots$, $l_s^{\nu_s}$ und k ein algebraischer Zahlkörper, der die l_1-ten, $\ldots$, l_s-ten d, falls ein $l_\iota = 2$, sogar die 2^2-ten Einheitswurzeln enthält, und dessen lassenzahl prim zu den Invarianten (d. h. zur Ordnung) von $\mathfrak{G}$ ist, so t es unendlich viele relativ-Abelsche Körper K über k, so daß*

a) *die Galoissche Relativgruppe von K nach k die Gruppe $\mathfrak{G}$ ist;*

b) *bei (geeigneter) Zusammensetzung von K aus s relativ zu k zyklihen, voneinander unabhängigen Körpern K_ι der Relativgrade $l_\iota^{\nu_\iota}$ die elativdiskriminanten der K_ι je nur ein einziges, zu den Invarianten imes Primideal 1. Grades $\mathfrak{q}_\iota$ aus k enthalten*[2]).

[1]) H. Hasse, Zwei Existenztheoreme in der Theorie der algebraischen Zahlrper, erscheint in den Math. Annalen (1925).

[2]) Natürlich ist gemeint, daß die $\mathfrak{q}_\iota$ nicht fest vorgegeben sind, sondern für die rschiedenen Körper K jedesmal irgendwie resultieren.

Im Anschluß an I. warf ich a. a. O. die Frage auf, ob ein entsprechender Satz auch gilt, wenn man verlangt, daß K relativ-Galoissch ist, wobei dann die vorgegebenen Zerlegungsvorschriften die Form

$$\mathfrak{p}_i = (\mathfrak{P}_{i1} \dots \mathfrak{P}_{ir_i})^{e_i} \qquad (\mathfrak{P}_{ix} \text{ vom Relativgrade } f_i)$$

$$e_i f_i r_i = n$$

haben müssen. Ich will im folgenden einen Spezialfall dieser Frage behandeln, nämlich den, daß die Anzahl der vorgegebenen Primideale $s = 1$ ist, und daß ferner auch die zu dem einzigen $\mathfrak{p}$ gegebene Relativordnung $e = 1$ ist, also $\mathfrak{p}$ kein Teiler der Relativdiskriminante von K wird. Für diesen Spezialfall beweise ich den folgenden

Satz 1. *Es sei n irgendeine natürliche Zahl und n_0 das Produkt aller verschiedenen Primfaktoren von n, wobei aber die 2, falls sie auftritt, doppelt zu setzen ist. Ferner sei k ein algebraischer Zahlkörper der die n_0-ten Einheitswurzeln enthält, $\mathfrak{p}$ ein zu n primes Primideal aus k und $n = f \cdot r$ irgendeine Zerlegung von n in zwei natürliche Zahlfaktoren. Dann gibt es unendlich viele relativ-Galoissche (sogar relativ-zyklische) Körper K über k (vom Relativgrade n), in denen für $\mathfrak{p}$ eine Zerlegung der Form*

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_r \qquad (\mathfrak{P}_x \text{ vom Relativgrade } f)$$

besteht.

Außer den schon genannten Einschränkungen $s = 1$ und $e = 1$ werden in diesem Satz noch die weiteren: „$\mathfrak{p}$ prim zu n“ und „k enthält die n_0-ten Einheitswurzeln“ eingeführt; deswegen ist seine Bedeutung, wenn man allein die I. zugrunde liegende Fragestellung im Auge hat, nicht allzu groß. Sein Interesse wird aber dadurch erhöht, daß die fraglichen Körper K sogar relativ-zyklisch (also relativ-Abelsch) sind, und der Satz sich somit gleichzeitig als Verallgemeinerung von II. in dem Sinne ansehen läßt, daß für K außer der Relativgruppe $\mathfrak{G}$ (in unserem Falle der zyklischen Gruppe der Ordnung n) noch die Zerlegungsform eines zu n primen Primideals $\mathfrak{p}$ aus k vorgeschrieben ist. Auf diesem Wege kommt auch der Beweis zustande. Ich werde nämlich die folgende, weitergehende Verallgemeinerung von II. beweisen, von der Satz 1 ein Spezialfall ist:

Satz 2. *Es sei $\mathfrak{G}$ eine beliebige endliche Abelsche Gruppe der Ordnung n mit den Invarianten*

$$l_1^{\nu_{11}}, \dots, l_1^{\nu_{1m_1}}; \dots; l_s^{\nu_{s1}}, \dots, l_s^{\nu_{sm_s}},$$

wobei $l_1, \dots, l_s$ verschiedene natürliche Primzahlen und die Exponenten $\nu_{11}, \nu_{21}, \dots, \nu_{s1}$ jeweils die höchsten bei $l_1, l_2, \dots, l_s$ vorkommenden sind und n_0 zu n wie in Satz 1 definiert. Ferner sei k ein algebraischer Zah

rper, der die n_0-ten Einheitswurzeln enthält[3]), $\mathfrak{p}$ *ein zu n primes Prim-eal aus k und* $n = f \cdot r$ *irgendeine Zerlegung von n in zwei natürliche hlfaktoren, wobei f ein Teiler von* $l_1^{\nu_{11}} l_2^{\nu_{21}} \dots l_s^{\nu_{s1}}$ *ist. Dann gibt es un-dlich viele relativ-Abelsche Körper K über k, so daß*

a) *die Galoissche Relativgruppe von K nach k die Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist,*

b) *die Körper K die Eigenschaft* b) *von* II. *haben,*

c) *das Primideal* $\mathfrak{p}$ *in K eine Zerlegung der Form*

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_r \qquad (\mathfrak{P}_\varkappa \text{ vom Relativgrade } f)$$

sitzt.

Durch diesen Satz wird speziell die beim Beweis von II. a. a. O. aus ethodischen Gründen gemachte Annahme, daß die Klassenzahl von k im zu n sein sollte, als entbehrlich erwiesen. — Die Einschränkung, die m Relativgrade f in Satz 2 auferlegt ist, ist eine naturgemäß-notwendige. enn da die zu $\mathfrak{p}$ gehörige Zerlegungsgruppe von K (relativ zu k) zyklisch in muß, muß f als Ordnung dieser Zerlegungsgruppe Teiler der Ord-ng $l_1^{\nu_{11}} \dots l_s^{\nu_{s1}}$ der höchsten zyklischen Untergruppe von $\mathfrak{G}$ sein. — Für n zyklisches $\mathfrak{G}$ der Ordnung n liefert Satz 2 sofort den Satz 1.

Zum Beweis von Satz 2 haben wir vor allem den Nachweis für den ezialfall zu führen, daß $\mathfrak{G}$ zyklisch von Primzahlpotenzordnung l^ν ist:

Satz 2a. *Es sei l eine natürliche Primzahl, ν eine natürliche Zahl, ein algebraischer Zahlkörper, der die l-ten (für* $l = 2$ *sogar die* 2^2*-ten) nheitswurzeln enthält,* $\mathfrak{p}$ *ein zu l primes Primideal aus k, und* $\varkappa$ *eine nze Zahl, so daß* $0 \leqq \varkappa \leqq \nu$. *Dann gibt es unendlich viele relativ-klische Körper vom Relativgrade* l^ν *über k, in denen* $\mathfrak{p}$ *in verschiedene rimidealfaktoren* $l^\varkappa$*-ten Relativgrades zerfällt und in deren Relativdis-minante je nur ein einziges, zu l primes Primideal* 1. *Grades* $\mathfrak{q}$ *aus k fgeht*[4]).

Der Beweis dieses Satzes, der den Kernpunkt beim Beweise des tzes 2 bildet, scheint mir ebenso, wie der Beweis zu II. a. a. O. von be-nderem *methodischen* Interesse zu sein, weil er auf eine Anwendung des isher nur unvollständig bekannten) Reziprozitätsgesetzes der l^ϱ-ten Potenz-ste hinausläuft. Ich entwickle ihn aus diesem Grunde hier *induktiv*, enn das auch etwas mehr Raum einnimmt, als die sich aus dieser Ent-icklung ergebende Deduktion.

Beweis für Satz 2a.

Der gesuchte Körper muß Klassenkörper nach einer Strahlklassen-uppe G in k sein, deren Führer eine Potenz von $\mathfrak{q}$ ist. Wir versuchen

[3]) Das ist die gleiche Voraussetzung, wie in II.

[4]) Siehe Anm. 2.

mit dem Führer $\mathfrak{q}$ selbst auszukommen und haben dann also $\mathfrak{q}$ so zu wählen, daß die Gruppe G_1 aller Strahlklassen mod $\mathfrak{q}$ [5]) eine Untergruppe G vom Index l^ν hat, die nicht schon mod 1 erklärbar ist, die also nicht aus einer Anzahl voller Idealklassen im absoluten Sinne besteht. Eine solche Untergruppe wird in G_1 vorhanden sein, wenn die Gruppe G_0 der durch Hauptideale gelieferten Strahlklassen mod $\mathfrak{q}$ einen direkten Faktor der Ordnung l^ν hat, der auch direkter Faktor von G_1 ist. Um nun zu erreichen, daß G_0 einen solchen direkten Faktor hat, müssen wir $\mathfrak{q}$ so wählen, daß die Ordnung von G_0 *genau* durch l^ν teilbar ist. Denn G_0 ist als Faktorgruppe der Gruppe $\bar{G}_0$ der primen Restklassen mod $\mathfrak{q}$ (nach der Untergruppe der durch Einheiten gelieferten Restklassen) zyklisch. Die Gruppe $\bar{G}_0$ hat die Ordnung $q-1$, wenn q die dem Primideal 1. Grades $\mathfrak{q}$ als Norm zugeordnete natürliche Primzahl ist, und G_0 die Ordnung $\frac{q-1}{(E_1:E_0)}$, wobei $(E_1:E_0)$ den Index der Gruppe E_0 aller Einheiten $\equiv 1 \bmod \mathfrak{q}$ in der Gruppe E_1 aller Einheiten von k bezeichnet. Es kommt also darauf an, zu übersehen, welche Einheiten von k mod $\mathfrak{q}$ eine Potenz von l zum Exponenten haben. Sind nun die l^μ-ten Einheitswurzeln die höchsten in k enthaltenen, deren Ordnung eine Potenz von l ist, so hat eine primitive l^μ-te Einheitswurzel ζ mod $\mathfrak{q}$ genau den Exponenten l^μ, wenn nur $\mathfrak{q}$ prim zu l gewählt wird. Wenn wir dann dafür sorgen, daß alle anderen Grundeinheiten zu l prime Exponenten mod $\mathfrak{q}$ haben, so wird offenbar $(E_1:E_0)$ genau durch l^μ teilbar, so daß wir $\mathfrak{q}$ so zu wählen haben, daß $q-1$ genau durch $l^{\mu+\nu}$ teilbar wird, und außerdem alle Grundeinheiten von k außer ζ:

$$\xi;\ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r \quad (\xi \text{ höchste Einheitswurzel von zu } l \text{ primer Ordnung}$$

mod $\mathfrak{q}$ zu l prime Exponenten haben. Für ξ ist das a fortiori der Fall. Da ferner $\bar{G}_0$ zyklisch ist, müssen $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ dazu $l^{\mu+\nu}$-te Potenzreste mod $\mathfrak{q}$ sein, und das reicht auch hin, wenn $q-1$ genau durch $l^{\mu+\nu}$ teilbar ist. Um die letztgenannte Forderung bezüglich $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ mit den bereitliegenden Hilfsmitteln aus der Theorie der relativ-Abelschen Körper behandeln zu können, adjungieren wir die $l^{\mu+\nu}$-ten Einheitswurzeln zu k. Der so entstehende Oberkörper $K = k(Z)$, wo Z eine primitive $l^{\mu+\nu}$-te Einheitswurzel bezeichnet, ist dann auf Grund unserer Annahme $\mu \geqq 1$ (bzw. $\mu \geqq 2$ für $l = 2$) relativ-zyklisch vom Relativgrade l^ν über k. Ist $\mathfrak{Q}$ ein Primideal 1. Grades aus K (prim zu l), dessen Relativnorm $\mathfrak{q}$ nach k dann ein Primideal 1. Grades aus k ist, so werden alle Restklassen mod $\mathfrak{Q}$ in K

[5]) D. h. der Nebengruppen zu der Untergruppe der Hauptideale (α) mit $\alpha \equiv$ Einheit mod $\mathfrak{q}$ in der Gruppe aller zu $\mathfrak{q}$ primen Ideale aus k. — Vorzeichenbedingungen brauchen wir hier bei der Definition der Strahlklassen nicht, weil n. Vor. k total imaginär ist.

on durch die mod q in k repräsentiert, so daß wir $\mathfrak{Q}$ so zu wählen en, daß erstens

$$N(\mathfrak{Q}) = q \equiv 1 \bmod l^{\mu+\nu}, \quad \text{aber} \quad \not\equiv 1 \bmod l^{\mu+\nu+1}$$

und zweitens $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ sämtlich $l^{\mu+\nu}$-te Potenzreste mod $\mathfrak{Q}$ sind. teres ist zur einen Hälfte für alle zu l primen Ideale aus K erfüllt, l K die $l^{\mu+\nu}$-ten Einheitswurzeln enthält, zur anderen Hälfte bedeutet daß $\mathfrak{Q}$ nicht in der durch

$$N(\mathfrak{A}) \equiv 1 \bmod l^{\mu+\nu+1}$$

nierten Idealgruppe C_0 von K liegt, nach der der Körper $K(\sqrt[l]{Z})$ $l^{\mu+\nu+1}$-ten Einheitswurzeln über K Klassenkörper ist[6]). Letzteres ist anntlich gleichwertig damit, daß $\mathfrak{Q}$ in den sämtlichen relativ-Abelschen rpern $K\left(\sqrt[l^{\mu+\nu}]{\varepsilon_1}\right), \ldots, K\left(\sqrt[l^{\mu+\nu}]{\varepsilon_r}\right)$, d. h. in dem relativ-Abelschen Körper

$$\mathsf{K}_0 = K\left(\sqrt[l^{\mu+\nu}]{\varepsilon_1}, \ldots, \sqrt[l^{\mu+\nu}]{\varepsilon_r}\right)$$

verschiedene Primideale 1. Grades zerfällt[7]), also schließlich damit, daß in der Idealgruppe H_0 von K liegt, nach der K_0 Klassenkörper über K Da bekanntlich zum Durchschnitt zweier Idealgruppen der aus ihren ssenkörpern komponierte Körper als Klassenkörper zugeordnet ist, nen unsere beiden Forderungen:

$$\mathfrak{Q} \text{ in } H_0; \quad \mathfrak{Q} \text{ nicht in } C_0$$

h durch die gleichwertigen:

$$\mathfrak{Q} \text{ in } H_0; \quad \mathfrak{Q} \text{ nicht in } \overline{H}_0 = [H_0, C_0]$$

tzt werden, wo der Durchschnitt $\overline{H}_0$ diejenige Idealgruppe in K ist, h der der relativ-Abelsche Körper

$$\overline{\mathsf{K}}_0 = (\mathsf{K}_0, K\sqrt[l]{Z}) = K\left(\sqrt[l^{\mu+\nu}]{\varepsilon_1}, \ldots, \sqrt[l^{\mu+\nu}]{\varepsilon_r}; \sqrt[l]{Z}\right)$$

ssenkörper über K ist.

Ist $\mathfrak{Q}$ ein diesen beiden Forderungen entsprechendes Primideal 1. Grades K, so hat nach dem Gesagten die Gruppe G_0 der durch Hauptideale eferten Strahlklassen nach seiner Relativnorm q in k als Modul einen kten Faktor der Ordnung l^ν. Wird $q = l^{\mu+\nu}\bar{m}$ gesetzt, wo also

---

[6]) Siehe a. a. O., Hilfssatz.

[7]) Die hierbei zugrunde liegende Voraussetzung, daß $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ in bezug auf l-te nzen nicht nur in k, sondern auch in K unabhängig sind, werden wir bald als ig erweisen.

$(\bar{m}, l) = 1$ ist, und ist γ eine primitive Wurzel mod $\mathfrak{q}$ in k, so wird di Gruppe $\bar{G}_0$ der primen Restklassen mod $\mathfrak{q}$ in ihrer direkten Zerlegung durc

$$\gamma^{\bar{m}\,\bar{x}} \times \gamma^{l^{\mu+\nu}\bar{y}} \qquad \begin{Bmatrix} \bar{x} \bmod l^{\mu+\nu} \\ \bar{y} \bmod \bar{m} \end{Bmatrix}$$

gegeben. Die entsprechende Zerlegung für G_0 entsteht daraus, wenn di Exponenten $\bar{x}$, $\bar{y}$ je nur nach den kleinsten positiven Exponenten a Moduln genommen werden, für die die durch die Faktoren gelieferte Restklassen Einheiten-Restklassen sind. Im ersten Faktor ist nun γ^{l^ν} einer primitiven l^μ-ten Einheitswurzel mod $\mathfrak{q}$ kongruent, aber keine früher Potenz einer Einheit kongruent, weil k als höchste die l^μ-ten Einheit wurzeln enthält und alle anderen Grundeinheiten $\xi, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ als $l^{\mu+\nu}$-t Potenzreste mod $\mathfrak{q}$ dem zweiten Faktor angehören. Im zweiten Faktor s der Teiler m von $\bar{m}$ der fragliche Exponent. Dann wird G_0 in direkte Zerlegung durch

$$(\gamma^{\bar{m}})^x \times (\gamma^{l^{\mu+\nu}})^y \qquad \begin{Bmatrix} x \bmod l^\nu \\ y \bmod m \end{Bmatrix} \quad ^8)$$

gegeben.

Wir haben nun zu bewirken, daß der direkte Faktor $(\gamma^{\bar{m}})^x$ der Ord nung l^ν von G_0 auch direkter Faktor der Gruppe G_1 aller Strahlklasse mod $\mathfrak{q}$ wird. Hierzu sei

$$\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_e; \; \mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_d$$

ein Repräsentantensystem für die absoluten Basisklassen von k, wob $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_e$ den Basisklassen entsprechen sollen, deren Exponenten $l^{\nu_1}, \ldots, l$ Potenzen von l sind, während die Exponenten $m_1, \ldots, m_d$ von $\mathfrak{t}_1, \ldots,$ prim zu l seien. Wird dann $\mathfrak{q}$ prim zu diesen Repräsentanten gewähl so ist die Gruppe G_1 in eindeutiger Darstellung durch

$$\mathfrak{r}_1^{x_1} \ldots \mathfrak{r}_e^{x_e} \mathfrak{t}_1^{y_1} \ldots \mathfrak{t}_d^{y_d} (\gamma^{\bar{m}})^x (\gamma^{l^{\mu+\nu}})^y \qquad \begin{Bmatrix} x_\iota \bmod l^{\nu_\iota} \\ y_\iota \bmod m_\iota \\ x \bmod l^\nu \\ y \bmod m \end{Bmatrix}$$

gegeben; dies ist aber aus dem Grunde nicht notwendig, eine Basisda stellung von G_1, weil die Hauptideale

$$\mathfrak{r}_1^{l^{\nu_1}} = (\varrho_1), \ldots, \mathfrak{r}^{l^{\nu_e}} = (\varrho_e); \qquad \mathfrak{t}_1^{m_1} = (\tau_1), \ldots, \mathfrak{t}_d^{m_d} = (\tau_d)$$

nicht notwendig der Hauptklasse mod $\mathfrak{q}$ angehören. Daher ist auch $(\gamma^{\bar{m}}$ nicht notwendig von selbst direkter Faktor von G_1. Dies wird vielme

---

[8]) Die Klammern bedeuten hier und im folgenden, daß die entsprechend *Hauptideale* gemeint sind.

n und nur dann der Fall sein, wenn die Hauptideale $(\varrho_1), \ldots, (\varrho_e)$; $, \ldots, (\tau_d)$ sämtlich dem direkten Faktor $(\gamma^{l^{\mu+\nu}})^y$ von G_0 angehören, n dann und nur dann ist offenbar die Gruppe der durch die von (γ^m) schiedenen Basiselemente gelieferten Strahlklassen mod q von der Gruppe $)^x$ unabhängig. Bezüglich $(\tau_1), \ldots, (\tau_d)$ ist dies ein für allemal durch gnete Wahl von $t_1, \ldots, t_d$ leicht zu erreichen, indem man nämlich e Repräsentanten als $l^{\mu+\nu}$-te Idealpotenzen wählt, so daß $(\tau_1), \ldots, (\tau_d)$ er in $(\gamma^{l^{\mu+\nu}})^y$ enthalten sind. Um dasselbe auch für $(\varrho_1), \ldots, (\varrho_e)$ zu ichen, haben wir q so zu wählen, daß $\varrho_1, \ldots, \varrho_e$ sämtlich $l^{\mu+\nu}$-te Potenze mod q werden. Durch die entsprechenden Überlegungen wie oben alten wir daraus nunmehr folgende Forderungen für das Primideal rades $\mathfrak{Q}$ aus K:

1. $\mathfrak{Q}$ prim zu l und zu den Repräsentanten $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_e$; $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_d$.

2. $\mathfrak{Q}$ in der Klassengruppe H_1 von K enthalten, nach der der relativ- elsche Körper

$$\mathsf{K}_1 = K\left(\sqrt[l^{\mu+\nu}]{\varepsilon_1}, \ldots, \sqrt[l^{\mu+\nu}]{\varepsilon_r}; \sqrt[l^{\mu+\nu}]{\varrho_1}, \ldots, \sqrt[l^{\mu+\nu}]{\varrho_e}\right)$$

ssenkörper über K ist.

3. $\mathfrak{Q}$ nicht in der Klassengruppe H_1 von K (Untergruppe von H_1 halten, nach der der Körper

$$\overline{\mathsf{K}}_1 = K_1(\sqrt[l]{\overline{Z}}) = K\left(\sqrt[l^{\mu+\nu}]{\varepsilon_1}, \ldots; \sqrt[l^{\mu+\nu}]{\varrho_1}, \ldots; \sqrt[l]{\overline{Z}}\right)$$

ssenkörper über K ist.

Ehe wir die Zerlegungsvorschrift für $\mathfrak{p}$ in unsere Betrachtung herein- en, wollen wir erst nachweisen, daß $\mathfrak{Q}$ und somit q auf unendlich viele schiedene Arten gemäß 1., 2., 3. gewählt werden kann. Hierzu genügt nach dem allgemeinen Satz, daß in jeder Strahlklasse eines algebraischen pers unendlich viele Primideale 1. Grades vorhanden sind, zu zeigen. $\overline{H}_1$ echte Untergruppe von H_1 ist, da ja dann die Gesamtheit aller H_1, aber nicht zu $\overline{H}_1$ gehörigen Ideale von K einen nicht leeren Kom- von Strahlklassen nach einem genügend hohen Modul bildet, in dem n natürlich auch unendlich viele 1. genügende Primideale 1. Grades $\mathfrak{Q}$ anden sind. Daß $\overline{H}_1$ echte Untergruppe von H_1 ist, ist gleichbedeutend it, daß $\overline{\mathsf{K}}_1$ echter Oberkörper von K_1, also $\sqrt[l]{\overline{Z}}$ nicht in K_1 enthalten ist.

Wir zeigen nun zuerst, daß die Radikanden $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$; $\varrho_1, \ldots, \varrho_e$ der eugenden von K_1 relativ K in bezug auf die Gruppe der l-ten Zahl- enzen in K unabhängig sind. Daß ihnen diese Eigenschaft im Körper k ommt, ist trivial. Besteht nun eine Relation

$$\varrho = \varepsilon_1^{x_1} \ldots \varepsilon_r^{x_r} \varrho_1^{y_1} \ldots \varrho_e^{y_e} = \mathsf{A}^l; \quad (\mathsf{A} \text{ in } K),$$

in der nicht alle Exponenten $\equiv 0 \bmod l$ sind, so kann wegen der U
abhängigkeit in k nicht A in k liegen. Also ist $k(\mathsf{A}) = k(\sqrt[l]{\varrho})$ ein zykl
scher Körper l-ten Grades über k unter K und als solcher mit dem ei
zigen solchen Zwischenkörper $k(\sqrt[l]{\zeta})$ zwischen k und dem relativ zu
zyklischen K identisch. Daraus folgt bekanntlich

$$\varrho = \zeta^a \alpha^l, \quad (\alpha \text{ in } k); \quad (a \not\equiv 0 \bmod l)$$

und das widerspricht der Unabhängigkeit von $\zeta; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r; \varrho_1, \ldots, \varrho_e$
bezug auf l-te Zahlpotenzen in k. Hieraus folgt die Unabhängigkeit unser
Radikanden in bezug auf l-te Zahlpotenzen in K (und damit übrigens d
Tatsache, daß K_1 vom Grade $l^{(\mu+\nu)(r+e)}$ relativ zu K und seine Abelsch
Relativgruppe das direkte Produkt von $r+e$ Zyklen der Ordnung $l^{\mu+\nu}$ ist

Wäre nun ferner $\sqrt[l]{Z}$ in K_1 enthalten, so wäre wegen der eben b
wiesenen Unabhängigkeit nach einem bekannten Satz

$$Z^a = \varepsilon_1^{x_1} \ldots \varepsilon_r^{x_r} \varrho_1^{y_1} \ldots \varrho_e^{y_e} \mathsf{A}^l; \quad (\mathsf{A} \text{ in } K); \quad (a \not\equiv 0 \bmod$$
$$= \varrho \mathsf{A}^l,$$

also der zu k relativ-zyklische Körper $l^{\nu+1}$-ten Grades $k(\sqrt[l]{Z}) = K(\sqrt[l]{Z}$
mit dem aus zwei zyklischen Körpern l^ν-ten und l-ten Grades über
komponierten Körper

$$K(\sqrt[l]{\varrho}) = (K, k(\sqrt[l]{\varrho})) = (k(Z), k(\sqrt[l]{\varrho}))$$

identisch, da ja nicht alle Exponenten $x_i, y_i \equiv 0 \bmod l$ sein können, al
$k(\sqrt[l]{\varrho})$ wirklich vom Grade l über k ist. Also ist $\sqrt[l]{Z}$ nicht in K_1 enthalte

Damit ist gezeigt, daß es unendlich viele relativ-zyklische Körp
l^ν-ten Grades über k gibt, in deren Relativdiskriminante je nur ein ei
ziges zu l primes Primideal aufgeht, also der Satz II meiner zitiert
Arbeit auch auf den Fall beliebiger Klassenzahl von k ausgedehnt.

Wir suchen nunmehr auch noch die Zerlegungsvorschrift für das v
gegebene, zu l prime Primideal $\mathfrak{p}$ aus k zu erfüllen. Dazu setzen wir z
nächst unsere Repräsentanten $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_e; \mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_d$ prim zu diesem $\mathfrak{p}$ vora
Soll $\mathfrak{p}$ in dem zu konstruierenden Körper l^ν-ten Grades in verschiede
Primideale $l^\varkappa$-ten Grades relativ zu k zerfallen, so muß zwar $\mathfrak{p}^{l^\varkappa}$ ab
falls $\varkappa > 0$, nicht $\mathfrak{p}^{l^{\varkappa-1}}$ in der zugehörigen Klassengruppe G liegen. N
resultiert bei unserer obigen Konstruktion die Gruppe G als die durch

$$\mathfrak{r}_1^{x_1} \ldots \mathfrak{r}_e^{x_e} \mathfrak{t}_1^{y_1} \ldots \mathfrak{t}_d^{y_d} \left(\gamma^{l^{\mu+\nu}}\right)^y \quad \left\{\begin{matrix} x_i \bmod l^{\nu_i} \\ y_i \bmod m_i \\ y \bmod l^\nu \end{matrix}\right\}$$

nierte Idealgruppe mod $\mathfrak{q}$. Ist daher

$$(\pi) = \mathfrak{p}\,\mathfrak{r}_1^{u_1} \dots \mathfrak{r}_e^{u_e}\,\mathfrak{t}_1^{v_1} \dots \mathfrak{t}_d^{v_d}$$

ndeins der $\mathfrak{p}$ vermöge unseres Repräsentantensystems zugeordneten ptideale, so muß zwar $(\pi)^{l^\varkappa}$ aber, falls $\varkappa > 0$, nicht schon $(\pi)^{l^{\varkappa-1}}$ in Gruppe $(\gamma^{l^{\mu+\nu}})^{\nu}$ mod $\mathfrak{q}$ liegen. (Hierbei benutzen wir natürlich die enschaft der $(\varrho_1), \dots, (\varrho_e)$; $(\tau_1), \dots, (\tau_d)$, in der Gruppe $(\gamma^{l^{\mu+\nu}})^{\nu}$ mod $\mathfrak{q}$ liegen.) Da alle von ζ verschiedenen Grundeinheiten von k $l^{\mu+\nu}$-te enzreste mod $\mathfrak{q}$ sind, kommt die erste Forderung auf

$$\pi^{l^\varkappa}\zeta^a \equiv \alpha^{l^{\mu+\nu}} \bmod \mathfrak{q}$$

irgendein festes a hinaus, die zweite dagegen auf

$$\pi^{l^{\varkappa-1}}\zeta^x \not\equiv \alpha^{l^{\mu+\nu}} \bmod \mathfrak{q}$$

jedes x mod $l^{\prime\prime}$. Wir gehen zweckmäßig wieder in den Körper K r, um die $l^\varkappa$-te bzw. $l^{\varkappa-1}$-te Wurzel ausziehen zu können. (Wegen ν lassen die ζ-Potenzen in K diese Wurzelausziehungen zu.) Unsere derungen sind dann gleichwertig mit

$$\pi\,\mathsf{Z}^{a l^{\nu-\varkappa}} \equiv \mathsf{A}^{l^{\mu+\nu-\varkappa}} \bmod \mathfrak{Q} \qquad (a \text{ fest}),$$

$$\pi\,\mathsf{Z}^{x l^{\nu-\varkappa+1}} \not\equiv \mathsf{A}^{l^{\mu+\nu-\varkappa+1}} \bmod \mathfrak{Q} \qquad (x \bmod l^{\mu+\varkappa-1}),$$

$\mathfrak{Q}$, wie oben, ein zu l und den Repräsentanten $\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_e$; $\mathfrak{t}_1, \dots, \mathfrak{t}_d$ mes Primideal 1. Grades aus K ist, das wir natürlich auch prim zu $\mathfrak{p}$ aussetzen müssen, damit $\mathfrak{p}$ wirklich in verschiedene Primideale zerfällt.

Die Durchführung der folgenden Betrachtungen für unbestimmtes a de lehren, daß wir mit dem einfachsten Werte $a = 0$ nicht auskommen den, weil dann die Bestimmung eines allen Anforderungen entsprechen- $\mathfrak{Q}$ unmöglich würde. Wir werden aber mit dem anderen Extrem $a = 1$ daß also die an π als Faktor angefügte Einheitswurzel möglichst hoch auskommen, setzen also von jetzt an $a = 1$. Bei der zweiten Forde- g müssen natürlich alle x mod $l^{\mu+\varkappa-1}$ berücksichtigt werden. Ganz log wie oben erhalten wir dann als an $\mathfrak{Q}$ zu stellende Forderungen folgenden vier:

1. $\mathfrak{Q}$ prim zu $\mathfrak{p}$; l; $\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_e$; $\mathfrak{t}_1, \dots, \mathfrak{t}_d$.

2. $\mathfrak{Q}$ in der Klassengruppe H von K, nach der der relativ-Abelsche rper

$$\mathsf{K} = K\left(\sqrt[l^{\mu+\nu}]{\varepsilon_1}, \dots; \sqrt[l^{\mu+\nu}]{\varrho_1}, \dots, \sqrt[l^{\mu+\nu-\varkappa}]{\pi\,\mathsf{Z}^{l^{\nu-\varkappa}}}\right)$$

assenkörper über K ist.

3. $\mathfrak{Q}$ nicht in den Klassengruppen H_x von K (Untergruppen von H) nach denen die Körper

$$\mathsf{K}_x = \mathsf{K}\left(\sqrt[l^{\mu+\nu-\varkappa+1}]{\pi Z^{x l^{\nu-\varkappa+1}}}\right); \quad (x \bmod l^{\mu+\varkappa-1})$$

Klassenkörper über K sind. (Diese Bedingung nur für $\varkappa > 0$.)

4. $\mathfrak{Q}$ nicht in der Klassengruppe $\bar{H}$ von K (Untergruppe von H) nach der der Körper

$$\bar{\mathsf{K}} = \mathsf{K}(\sqrt[l]{\bar{Z}})$$

Klassenkörper ist.

Aus jedem 1. bis 4. genügenden Primideal 1. Grades von K entspring ein $\mathfrak{q}$ in k, das zu einem Körper der verlangten Art führt, und wen unendlich viele solche $\mathfrak{Q}$, also auch unendlich viele verschiedene $\mathfrak{q}$ vo handen sind, werden unendlich verschiedene viele solche Relativkörpe über k geliefert, da ja deren Relativdiskriminanten alle verschieden sin

Damit nun unendlich viele, 1. bis 4. genügende Primideale 1. Grad $\mathfrak{Q}$ in K vorhanden sind, ist notwendig und hinreichend, daß überhaup 2. bis 4. genügende Ideale in K existieren, d. h. daß durch die Gruppe H_x und $\bar{H}$ nicht die ganze Gruppe H erschöpft wird. Ist $\mathfrak{M}$ ein hi reichend hoher Modul, nach dem alle Gruppen $H, H_x, \bar{H}$ gleichzeitig d finierbar sind, und bezeichnen $h, h_x, \bar{h}$ die Anzahlen der Strahlklasse $\bmod \mathfrak{M}$, aus denen $H, H_x, \bar{H}$ bestehen, so ist also die Ungleichung

$$\bar{h} + \sum_x h_x \leqq h$$

nachzuweisen, wo die $\sum_x$ über alle die x zu erstrecken ist, für die ve schiedene Körper K_x resultieren, und wo das Gleichheitszeichen nicht stör weil alle H_x und $\bar{H}$ ja zum mindesten die Strahlhauptklasse $\bmod \mathfrak{M}$ gemeinsam haben.

Wir zeigen dazu zunächst wie oben, daß die Radikanden der E zeugenden von K in bezug auf die l-ten Zahlpotenzen in K unabhängi sind. Besteht nämlich eine Relation

$$\varepsilon_1^{z_1} \dots \varepsilon_r^{z_r} \varrho_1^{y_1} \dots \varrho_e^{y_e} (\pi Z^{l^{\nu-\varkappa}})^z = \mathsf{A}^l; \quad (\mathsf{A} \text{ in } K),$$

in der nicht alle Exponenten $\equiv 0 \bmod l$ sind, so muß notwendig $z \equiv 0 \bmod$ sein. Denn sonst wäre (π) eine l-te Idealpotenz in K, während doch d zu den $\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_e, \mathfrak{t}_1, \dots, \mathfrak{t}_d$ prime Idealfaktor $\mathfrak{p}$ von (π) in k ein l primes Primideal ist, also in K in verschiedene Primidealfaktoren zerleg wird. Nach dem früheren ist also eine derartige Relation unmöglich Daraus folgt genau wie früher, daß $\sqrt[l]{\bar{Z}}$ nicht in K enthalten ist; denn a einer Relation

$$Z^a = \varepsilon_1^{z_1} \dots \varepsilon_r^{z_r} \varrho_1^{y_1} \dots \varrho_e^{y_e} (\pi Z^{l^{\nu-\varkappa}})^z \mathsf{A}^l; \quad (\mathsf{A} \text{ in } K); \quad (a \not\equiv 0 \bmod l)$$

gte wie eben $z \equiv 0 \bmod l$ und dann alles weitere wie früher. Also ist $= K(\sqrt[l]{Z})$ vom Relativgrade l über K, d. h. bekanntlich $h = \frac{h}{l}$. Wir haben o weiterhin noch

$$\sum_x h_x \leqq \frac{l-1}{l} h$$

zeigen, wobei wir natürlich nur den Fall $\varkappa > 0$ zu betrachten haben.

Hierzu bemerken wir, daß unter den $l^{\mu+\varkappa-1}$ Körpern K_x höchstens jenigen l^μ verschieden sind, die mod l^μ inkongruenten x entsprechen, ja für $x_1 \equiv x_2 \bmod l^\mu$ die Radikanden der Erzeugenden von K_{x_1} und K_{x_2} t um eine Potenz von $Z^{l^{\mu+\nu-\varkappa+1}}$ unterschieden sind. Wenn wir daher gen können, daß die K_x sämtlich den Relativgrad $l^{\mu+1}$ über K haben, folgt ohne weiteres

$$\sum_x h_x = \sum_{x=0}^{l^\mu-1} h_x = l^\mu \frac{h}{l^{\mu+1}} = \frac{h}{l} \leqq \frac{l-1}{l} h,$$

s wir brauchen. Nun sind jene Relativgrade sicher höchstens $l^{\mu+1}$. Denn $= K\left(\sqrt[l^{\mu+\nu-\varkappa+1}]{\pi Z^{\varkappa l^{\nu-\varkappa+1}}}\right)$ kann ja auch in der Form

$$K_x = K\left(\sqrt[l^{\mu+1}]{\sqrt[l^{\nu-\varkappa}]{\pi} \cdot Z^{\varkappa l}}\right)$$

K erzeugt werden, wobei

$$\sqrt[l^{\nu-\varkappa}]{\pi} = \left(\sqrt[l^{\mu+\nu-\varkappa}]{\pi Z^{l^{\nu-\varkappa}}}\right)^{l^\mu} \cdot Z^{-1}$$

K liegt. Wäre nun der Relativgrad kleiner als $l^{\mu+1}$, so wäre der dikand $\sqrt[l^{\nu-\varkappa}]{\pi} \cdot Z^{\varkappa l}$, also auch $\sqrt[l^{\nu-\varkappa}]{\pi}$ eine l-te Potenz in K, d. h. auch $\sqrt[\varkappa+1]{\pi}$ in K enthalten und damit auch

$$\frac{\sqrt[l^{\nu-\varkappa+1}]{\pi Z^{l^{\nu-\varkappa}}}}{\sqrt[l^{\nu-\varkappa+1}]{\pi}} = \sqrt[l]{Z},$$

s wir soeben als unmöglich erkannt haben.

Damit ist nach unseren Ausführungen Satz 2a vollständig bewiesen.

Beweis für Satz 2.

In den Bezeichnungen von Satz 2 sei der für $\mathfrak{p}$ vorgeschriebene Re- vgrad

$$f = l_1^{\varkappa_1} \ldots l_s^{\varkappa_s},$$

wobei also nach Voraussetzung

$$0 \leqq \varkappa_\iota \leqq \nu_{\iota 1} \qquad (\iota = 1, \ldots,$$

ist. Nach Satz 2a gibt es dann unendlich viele Systeme von durchwe verschiedenen, zu n primen Primidealen 1. Grades aus k:

$$(\mathfrak{q}_{\iota\lambda}) = (\mathfrak{q}_{11}, \ldots, \mathfrak{q}_{1m_1};\ \mathfrak{q}_{21}, \ldots, \mathfrak{q}_{2m_2};\ \ldots;\ \mathfrak{q}_{s1}, \ldots, \mathfrak{q}_{sm_s}),$$

so daß immer die $\mathfrak{q}_{\iota 1}$ die Bedingungen des Satzes 2a bezüglich $\nu = \nu_\iota$ $\varkappa = \varkappa_\iota$; $(\iota = 1, \ldots, s)$ erfüllen, während die $\mathfrak{q}_{\iota\lambda}$ mit $\lambda > 1$ diese Be dingungen bezüglich $\nu = \nu_{\iota\lambda}$; $\varkappa = 0$ erfüllen. Die einem solchen Syste nach Satz 2a entsprechenden relativ-zyklischen Körper $K_{\iota\lambda}$ vom Relativ grade $l_\iota^{\nu_{\iota\lambda}}$, in denen $\mathfrak{p}$ in verschiedene Primideale $l_\iota^{\varkappa_\iota}$-ten bzw. 1. Relativ grades zerfällt, und deren Relativdiskriminanten je nur (aber sicher) durc $\mathfrak{q}_{\iota\lambda}$ teilbar sind, sind dann voneinander unabhängig, d. h. jeder zum Kom positum der übrigen teilerfremd, wie man leicht aus der Verschiedenhei der $\mathfrak{q}_{\iota\lambda}$ und der Struktur der zugeordneten Klassengruppen $G_{\iota\lambda} \bmod \mathfrak{q}$ folgert[9]), so daß der aus ihnen komponierte Körper K die Relativgrupp $\mathfrak{G}$ hat und allen anderen Bedingungen des Satzes 2 genügt. Die de unendlich vielen verschiedenen Systemen $(\mathfrak{q}_{\iota\lambda})$ so entsprechenden Körper K fallen auch sämtlich verschieden aus, da sie verschiedene Relativdiskrimi nanten haben.

Damit ist Satz 2 und somit auch Satz 1 vollständig bewiesen.

Kiel, den 1. Januar 1925.

---

[9]) Wäre ein solcher Körper zum Kompositum der übrigen nicht teilerfremd, s wäre der gemeinsame Teilkörper ein Unterkörper der Relativdiskriminante 1 de Kompositums aller $K_{\iota\lambda}$, so daß der Durchschnitt aller $G_{\iota\lambda}$ in einer absoluten (d. h schon mod 1 definierbaren) Idealgruppe eines Index > 1 enthalten wäre. Da abe bei geeigneter Wahl der Repräsentanten der absoluten Basisklassen diese Repräsen tanten nach unserer Konstruktion in allen $G_{\iota\lambda}$ enthalten sind, muß eine jenen Durch schnitt enthaltende absolute Idealgruppe mit der Gruppe aller Ideale von k identisc sein, d. h. den Index 1 haben.

(Eingegangen am 5. Januar 1925.)

ber die algebraischen Gleichungen, deren Wurzeln in einem Kreise oder in einer Halbebene liegen.

Von

Matsusaburô Fujiwara in Sendai (Japan).

Herr I. Schur[1]) hat zuerst in expliziter Form die notwendigen und eichenden Bedingungen dafür angegeben, daß sämtliche Wurzeln einer gelegten algebraischen Gleichung mit beliebigen reellen oder komplexen ffizienten im Einheitskreise gelegen seien. Später hat Herr A. Cohn[2]) e Bedingungen auf rein algebraischem Wege abgeleitet und zugleich Schurschen Satz dahin ergänzt, daß sich ein Verfahren zur Bemung der genauen Anzahl der im Einheitskreise liegenden Wurzeln b. Meine Aufmerksamkeit wurde auf eine Arbeit der Herren Liénard Chipart[3]) gelenkt, und ich fand, daß die Liénard-Chipartsche hode sowohl auf das Routh-Hurwitzsche Problem als auch auf das ur-Cohnsche Problem mit gleichem Erfolg anwendbar ist. Die gensame Quelle ist die Beziehung zwischen einer gegebenen algebraischen chung und einer dazu gehörenden Hermiteschen Form, auf die zuerst rmite[4]) aufmerksam gemacht hat.

[1]) I. Schur, Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt Journal f. Math. 148 (1918), S. 122—145.

[2]) A. Cohn, Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in n Kreise, Math. Zeitschr. 14 (1922), S. 110—138. — Vgl. auch G. Herglotz, die Wurzelanzahl algebraischer Gleichungen innerhalb und auf dem Einheits-, Math. Zeitschr. 19 (1923), S. 26—34.

[3]) Liénard et Chipart, Sur le signe de la partie réelle des racines d'une tion algébrique, Journ. de math. (6), 10 (1914), S. 291—346.

[4]) Hermite, Sur le nombre des racines d'une équation algébrique comprises des limites données, Journ. f. Math. 52 (1850), oder Œuvres 1, S. 397—414.

§ 1.

Das Schur-Cohnsche Problem.

1. Es handelt sich also zunächst um die Bestimmung der Anzahl de Wurzeln einer Gleichung, die im Einheitskreise liegen. Es sei

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

die vorgelegte Gleichung; ihre Koeffizienten können reell oder komple sein. Ferner sei

$$f^*(x) = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} x + \bar{a}_{n-2} x + \ldots + \bar{a}_0 x^n$$

und

$$(1) \qquad K(f) = \frac{f(x) f^*(y) - f(y) f^*(x)}{x - y} = \sum_{i,k}^{n-1} A_{ik} x^i y^k,$$

wobei $\bar{a}_k$ die zu a_k konjugiert komplexe Größe bedeuten soll.

Die Koeffizienten A_{ik} genügen der Relation

$$\bar{A}_{ik} = A_{n-1-i,\, n-1-k}.$$

In der Tat: ersetzt man in (1) x, y durch $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$, multipliziert mit $x^{n-1} y^{n-}$ und geht in allen Koeffizienten zu den konjugiert komplexen Größe über, so bleibt die linke Seite ungeändert, während die rechte Seite $\Sigma \bar{A}_{ik} x^{n-1-i} y^{n-1-k}$ übergeht. Das liefert die zu beweisende Relation.

Es ist aber auch zugleich klar, daß $A_{ik} = A_{ki}$ ist. Setzt man dah

$$A_{i,\, n-1-k} = a_{ik},$$

so wird

$$\bar{a}_{ik} = \bar{A}_{i,\, n-1-k} = A_{n-1-i,\, k} = A_{k,\, n-1-i} = a_{ki}.$$

Folglich erhält man eine reelle Hermitesche Form

$$H(f; u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) = \Sigma a_{ik} u_i \bar{u}_k,$$

indem man in (1) x^i durch u_i und y^{n-1-k} durch $\bar{u}_k$ ersetzt. Diese For wollen wir die zu $f(x)$ gehörende Hermitesche Form nennen.

Ist nun hier $f(x) = f_1(x) f_2(x)$, wobei

$f_1(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_p x^p$, $f_2(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_q x^q$ $(p + q =$ sei, so wird $f^*(x) = f_1^*(x) f_2^*(y)$ und

$$K(f) = f_1(x) f_1^*(y) K(f_2) + f_2(y) f_2^*(x) K(f_1).$$

Setzt man daher

$$K(f_2) = \sum_{i,k}^{q-1} C_{ik} x^i y^k, \qquad C_{i,\, q-1-k} = c_{ik},$$

wird

$$f_1(x)\, f_1^*(y)\, K(f_2)$$

$$\sum C_{ik}(b_0 x^i + b_1 x^{i+1} + \ldots + b_p x^{i+p})\,(\bar{b}_p y^k + \bar{b}_{p-1} y^{k+1} + \ldots + \bar{b}_0 y^{k+p}).$$

rd nun hierin x^i durch u_i und y^{n-1-k} durch $\bar{u}_k$ ersetzt, so geht die hte Seite über in

$$\sum_{i,k}{}_0^{q-1} C_{i,k}\, w_i\, \bar{w}_{q-1-k} = \sum_{i,k}{}_0^{q-1} c_{ik}\, w_i\, \bar{w}_k,$$

bei

$$w_i = b_0 u_i + b_1 u_{i+1} + \ldots + b_p u_{i+p}$$

setzen ist. Dies ist aber nichts anderes als die Hermitesche Form $f_2; w_0, w_1, \ldots, w_{q-1})$. In gleicher Weise erhält man aus $f_2(y) f_2^*(x) K(f_1)$ ch Einsetzen von u_i, $\bar{u}_k$ für x^i und y^{n-1-k} die zu $f_1(x)$ gehörende rmitesche Form $H(f_1; v_0, v_1, \ldots, v_{p-1})$ mit

$$v_i = \bar{c}_q u_i + \bar{c}_{q-1} u_{i+1} + \ldots + \bar{c}_0 u_{i+q}.$$

erhält also die grundlegende Relation

$$H(f; u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) = H(f_1; v_0, v_1, \ldots, v_{p-1}) + H(f_2; w_0, w_1, \ldots, w_{q-1}).$$

se Idee rührt von Liénard und Chipart her.

Die n Veränderlichen $v_0, \ldots, v_{p-1}$, $w_0, \ldots, w_{q-1}$ sind lineare Formen $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, deren Koeffizientendeterminante die Resultante von) und $f_2^*(x)$ ist. Daher sind die v_i, w_k linear unabhängig, wenn) $= 0$ und $f_2^*(x) = 0$ keine Wurzel gemeinsam haben.

Für die lineare Funktion $a(x - \alpha)$ wird $K = a\bar{a}(1 - \alpha\bar{\alpha})$, also

$$H = a\bar{a}(1 - \alpha\bar{\alpha})\, u_0 \bar{u}_0 = (1 - \alpha\bar{\alpha})\, |a u_0|^2.$$

er gilt für $f(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)$

$$H(f; u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} (1 - \alpha_k \bar{\alpha}_k)\, V_k \bar{V}_k,$$

die V_k lineare Formen von $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ sind. Sie sind linear un- ngig, wenn $f(x) = 0$ und $f^*(x) = 0$ keine Wurzel gemeinsam haben nur in diesem Fall. Diese Bedingung ist äquivalent mit der Be- ung, daß der Rang von H gleich n wird, denn die Determinante von gleich der Bézoutschen Determinante von f und f^*, demnach (bis inen konstanten Faktor) gleich der Resultante von f und f^*.

Hieraus folgert man die Schur-Cohnschen Sätze:

Satz A 1. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß Wurzeln der algebraischen Gleichung $f(x) = 0$ mit beliebigen reellen

oder komplexen Koeffizienten sämtlich im Innern des Einheitskreises liegen, besteht darin, daß die zu $f(x)$ gehörende Hermitesche Form positiv definit sei.

Satz A2. Es seien π und ν die Anzahl der positiven bzw. negativen Quadrate in der Normaldarstellung von $H(f)$. Wenn $\pi+\nu=n$ ist, so ist die Anzahl der Wurzeln im Innern des Einheitskreises gleich π und die der Wurzeln außerhalb des Einheitskreises gleich ν.

2. Die Hermitesche Form H ist in der Form

$$H=\sum_{\lambda=1}^{n}|a_\lambda u_0+a_{\lambda+1}u_1+\cdots+a_n u_{n-\lambda}|^2$$
$$-\sum_{\lambda=1}^{n}|\bar{a}_0 u_{n-\lambda}+\bar{a}_1 u_{n-\lambda-1}+\cdots+\bar{a}_{n-\lambda}u_0|^2$$

darstellbar, auf die Herr Schur auf anderem Wege geführt worden ist.

Setzt man nun

$$g(x)=f(x)f^*(\xi)-f(\xi)f^*(x),\qquad h(x)=\frac{g(x)}{x-\xi},$$

wo ξ irgendeine reelle oder komplexe Zahl bedeutet, so ergibt sich aus (2

$$H(g)=(1-\xi\bar{\xi})v_0\bar{v}_0+H(h;v_1,v_2,\ldots,v_{n-1}),$$

und da andererseits

$$g^*(x)=f^*(x)\overline{f^*(\xi)}-f(x)\overline{f(\xi)},\quad K(g)=(f^*(\xi)\overline{f^*(\xi)}-f(\xi)\overline{f(\xi)})K(f)$$

so ergibt sich

$$H(g)=(|f^*(\xi)|^2-|f(\xi)|^2)H(f;u_0,u_1,\ldots,u_{n-1})$$
$$=(1-\xi\bar{\xi})v_0\bar{v}_0+H(h;v_1,v_2,\ldots,v_{n-1}).$$

Setzt man insbesondere $\xi=0$, so erhält man

$$(|a_n|^2-|a_0|^2)H(f)=v_0\bar{v}_0+H(h).$$

Diese Relation hat Herr Schur direkt verifiziert und Herr Cohn hat s benutzt, um durch vollständige Induktion die Sätze A1 und A2 zu b weisen. In enger Beziehung hierzu steht der von Schur bewiesene Sat Die Gleichung $f(x)=0$ hat dann und nur dann sämtliche Wurzeln i Einheitskreise, wenn $h(x)=0$ (für $\xi=0$) dieselbe Eigenschaft besit und außerdem $|a_n|<|a_0|$ ist.

3. Wir betrachten jetzt den Fall, daß der Rang der Hermitesch Form $H(f)$ kleiner als n ist.

Es seien α und β zwei voneinander verschiedene Wurzeln von $f(x)=$ zwischen denen die Beziehung $\alpha\bar{\beta}=1$ besteht. Die Vielfachheitsgrade v α und β seien m und μ, und es werde $m\geqq\mu$ angenommen. Wird

$$f_1=(x-\alpha)^\mu(x-\beta)^\mu,\qquad f_2=(x-\alpha)^{m-\mu}$$

setzt, so sei $f = f_1 f_2 f_3$. Dann haben $f_1 f_2 = 0$ und $f_3 = 0$ gewiß keine urzel gemeinsam. Daher sind in der Zerlegungsformel

$$(f; u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) = H(f_1 f_2; v_0, v_1, \ldots, v_{p-1}) + H(f_3; w_0, w_1, \ldots, w_{q-1})$$
$$(p + q = n,\ p = m + \mu).$$

e Ausdrücke v_k, w_λ linear unabhängig.

Nun ist

$$f_1^* = (1 - \bar{\alpha} x)^\mu (1 - \bar{\beta} x)^\mu = (\bar{\alpha}\bar{\beta})^\mu (x - \alpha)^\mu (x - \beta)^\mu,$$

her wird identisch $K(f_1) = 0$, und hieraus folgt

$$(f; u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) = H(f_3; w_0, w_1, \ldots, w_{q-1}) + H(f_2; V_0, V_1, \ldots, V_{m-\mu-1}),$$

$V_0, \ldots, V_{m-\mu-1}$, $w_0, \ldots, w_{q-1}$ linear unabhängig sind. Behandelt man les Paar α, β mit der Eigenschaft $\alpha\bar{\beta} = 1$ in derselben Weise und beksichtigt noch, daß für eine auf dem Einheitskreise liegende Wurzel α $(x - \alpha) = 0$ wird, so kann man folgenden Satz aussprechen:

Satz A 3. Ist der Rang r von $H(f)$ kleiner als n und haben π und ν eselbe Bedeutung wie in Satz A 2, so ist die Anzahl der im Innern des nheitskreises liegenden Wurzeln gleich $\pi + \lambda$, während die Anzahl der ßerhalb des Einheitskreises liegenden Wurzeln $\nu + \lambda$ wird; hierbei wird $\leqq \lambda \leqq \frac{n-r}{2}$. Hat die vorgelegte Gleichung kein Paar von Wurzeln α, β t der Eigenschaft $\alpha\bar{\beta} = 1$, so wird $\lambda = 0$ und die Anzahl der Wurzeln f dem Einheitskreise wird gleich $n - r$.

§ 2.

Das Routh-Hurwitzsche Problem.

4. Wir wollen jetzt zur Betrachtung des Routh-Hurwitzschen oblems übergehen und die Resultate von Routh, Hurwitz und énard-Chipart ergänzen.

Es sei

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$$

e algebraische Gleichung n-ten Grades mit beliebigen reellen oder mplexen Koeffizienten, und man setze

$$f^*(x) = \bar{a}_0 - \bar{a}_1 x + \bar{a}_2 x^2 - \ldots + (-1)^n \bar{a}_n x^n$$

l

$$K(f) = \frac{f(x) f^*(y) - f(y) f^*(x)}{x - y} = \sum_{i,k}^{n-1} A_{ik} x^i y^k.$$

nn ist $\bar{A}_{ik} = (-1)^{i+k} A_{ki}$. Denn ersetzt man in $K(f)$ alle Koeffinten durch die konjugiert komplexen Größen und schreibt $-x, -y$

anstatt x, y, so bleibt die linke Seite ungeändert, während recht $\Sigma(-1)^{i+k}\bar{A}_{ik}x^i y^k$ entsteht. Da $A_{ik}=A_{ki}$ ist, so erhält man $\bar{a}_{ik}=a_{ki}$ indem man $A_{ik}=(-1)^k a_{ik}$ setzt. Ersetzt man daher in $K(f)$ x^i durch u_i und y^k durch $(-1)^k\bar{u}_k$, so erhält man eine zu f gehörende Hermitesche Form

$$H(f;\ u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) = \sum a_{ik} u_i \bar{u}_k$$

Eine Betrachtung, die der früher durchgeführten parallel verläuft, liefert hier für $f=f_1 f_2$

$$H(f;\ u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) = H(f_1;\ v_0, v_1, \ldots, v_{p-1}) + H(f_2;\ w_0, w_1, \ldots, w_{q-1})$$

wobei

$$v_i = b_0 u_i + b_1 u_{i+1} + \ldots + b_p u_{i+p},$$
$$w_k = \bar{c}_0 u_k - \bar{c}_1 u_{k+1} + \ldots + (-1)^q \bar{c}_q u_{k+q}$$

zu setzen ist. Die Ausdrücke sind dann und nur dann linear unabhängig wenn $f_1=0$ und $f_2^*=0$ keine Wurzel gemeinsam haben.

Für $f=a(x-\alpha)$ wird

$$K(f) = -a\bar{a}(\alpha+\bar{\alpha}), \qquad K(f) = -a\bar{a}(\alpha+\bar{\alpha})u_0\bar{u}_0.$$

Hieraus folgert man die nachstehenden Sätze:

Satz B 1. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß alle Wurzeln einer algebraischen Gleichnng $f(x)=0$ mit reellen oder komplexen Koeffizienten negative Realteile besitzen, besteht darin, daß die zu $f(x)$ gehörende Hermitesche Form positiv definit sei.

Satz B 2. Es seien π und ν die Anzahl der positiven bzw. negativen Quadrate in der Normaldarstellung von $H(f)$. Ist $\pi+\nu=n$, so wird die Anzahl der Wurzeln mit negativem Realteil gleich π, während ν die Anzahl der Wurzeln mit positivem Realteil angibt.

Satz B 3. Ist der Rang r von $H(f)$ kleiner als n, so ist die Anzahl der Wurzeln mit negativem Realteil $\pi+\lambda$, während die Anzahl der Wurzeln mit positivem Realteil gleich $\nu+\lambda$ wird; hierbei wird $0\leqq\lambda\leqq\frac{n-r}{2}$

Hat die vorgelegte Gleichung kein Paar von Wurzeln α, β mit der Eigenschaft $\alpha+\beta=0$, so wird $\lambda=0$ und $n-r$ gibt, wenn $a_0\neq 0$ vorausgesetzt wird, die Anzahl der rein imaginären Wurzeln an.

5. Es gilt auch in diesem Falle die Identität

$$(|f^*(\xi)|^2 - |f(\xi)|^2)H(f) = -(\xi+\bar{\xi})u_0\bar{u}_0 + H(h),$$

wobei

$$h(x) = \frac{f(x)f^*(\xi) - f^*(x)f(\xi)}{x-\xi}$$

zu setzen ist.

Berücksichtigt man den Schurschen Satz[5]): „Dann und nur dann ist reelle Teil aller Wurzeln von $f(x) = 0$ negativ, wenn $h(x) = 0$ für ξ mit negativem Realteil dieselbe Eigenschaft besitzt", so kann man, Cohn das beim Schur-Cohnschen Problem getan, durch vollständige luktion zum Satz B 1 gelangen oder umgekehrt aus dem Satz B 1 den hurschen Satz ableiten.

Die Sätze B 1 und B 2 haben für den Fall, daß die Koeffizienten Gleichung reell sind, in der obigen Form Liénard und Chipart auftellt. Die Äquivalenz der Bedingung von Hurwitz mit derjenigen Liénard-Chipart habe ich früher direkt verifiziert[6]).

§ 3.

Das Hermitesche Problem.

6. Setzt man

$$f^*(x) = -i(\bar{a}_0 + \bar{a}_1 x + \ldots + \bar{a}_n x^n)$$

$$K(f) = \frac{f(x)f^*(y) - f(y)f^*(x)}{x - y} = \sum A_{ik} x^i y^k,$$

verifiziert man leicht, daß $\bar{A}_{ik} = A_{ki}$ wird. Nimmt man daher

$$H(f;\ u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) = \sum A_{ik} u_i \bar{u}_k$$

die zu $f(x)$ gehörende Hermitesche Form an, so gilt auch hier für $f_1 f_2$

$$(f;\ u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) = H(f_1;\ v_0, v_1, \ldots, v_{p-1}) + H(f_2;\ w_0, w_1, \ldots, w_{q-1}).$$

$f = a(x - \alpha)$ wird

$$K(f) = a\bar{a}(\alpha - \bar{\alpha}), \qquad H(f) = a\bar{a}(\alpha - \bar{\alpha})u_0\bar{u}_0.$$

raus folgen die Hermiteschen Sätze:

Satz C 1. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß Wurzeln einer algebraischen Gleichung $f(x) = 0$ positive imaginäre le besitzen, besteht darin, daß die zugehörige Hermitesche Form $H(f)$ itiv definit sei.

Satz C 2. Es seien π und ν die Anzahl der positiven bzw. die der ativen Quadrate in der Normaldarstellung von H. Ist $\pi + \nu = n$, so l π gleich der Anzahl der Wurzeln mit positivem Imaginärteil, während ie Anzahl der Wurzeln mit negativem Imaginärteil angibt.

---

[5]) I. Schur, Über algebraische Gleichungen, die nur Wurzeln mit negativen teilen besitzen, Zeitschrift f. angew. Math. und Mechanik 1 (1921), S. 307—311.

[6]) M. Fujiwara, Über die Wurzeln der algebraischen Gleichungen, Tôhoku n. Journal 8 (1915), S. 78—85.

Satz C 3. Ist der Rang r von H kleiner als n, so wird die Anzahl der Wurzeln mit positivem bzw. negativem Imaginärteil $\pi + \lambda$ bzw. $\nu + \lambda$, wo $0 \leqq \lambda \leqq \frac{n-r}{2}$ ist. Hat die vorgelegte Gleichung kein Paar von konjugiert komplexen Wurzeln, so wird $\lambda = 0$ und $n - r$ gibt die Anzahl der reellen Wurzeln an.

Diese Sätze C 1 bis C 3 folgen aus den Sätzen B 1 bis B 3 durch bloße Transformation der Variablen x in ix, und umgekehrt. Die Herren Liénard und Chipart haben auf die enge Beziehung zwischen diesen Sätzen von Hermite und ihren Sätzen am Schluß ihrer Arbeit aufmerksam gemacht. Da sie ihre Untersuchung auf den Fall reeller Koeffizienten beschränkt haben, wurde diese Beziehung nicht genügend klar dargestellt. Wenn man aber von vornherein den allgemeinen Fall komplexer Koeffizienten in Betracht zieht, wird die Beziehung zwischen den Sätzen B und C und der Übergang von den einen zu den anderen sehr natürlich und durchsichtig.

7. Zum Schluß wollen wir noch einen Fall in Betracht ziehen, den auch Hermite behandelt hat.

Es sei

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$$

eine Gleichung mit *reellen* Koeffizienten, und es sei

$$f^*(x) = (x - \xi) f'(x),$$

wo ξ eine beliebige reelle Zahl bedeutet. Bildet man wieder

$$K(f) = \frac{f(x) f^*(y) - f(y) f^*(x)}{x - y} = \sum A_{ik} x^i y^k$$

und ersetzt darin $x^i y^k$ durch $u_i u_k$, so erhält man eine reelle quadratische Form

$$H(f;\, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) = \sum A_{ik} u_i u_k.$$

Ist $f = f_1 f_2$, wo f_1 und f_2 reelle Koeffizienten aufweisen, so gilt auch diesmal

$$K(f) = f_1(x) f_1(y) K(f_2) + f_2(x) f_2(y) K(f_1),$$

folglich wird

$$H(f) = H(f_1) + H(f_2).$$

Für ein reelles α und $f = x - \alpha$ erhält man

$$K(f) = \alpha - \xi, \qquad H(f) = (\alpha - \xi) u_0^2,$$

während sich für reelle α, β und $f = (x - \alpha)^2 + \beta^2$ ergibt

$$K(f) = 2(x - \alpha)(y - \alpha)(\alpha - \xi) + 2\beta^2(\alpha + \xi) - 2\beta^2(x + y),$$

$$H(f) = 2(\alpha - \xi)(u_1 - \alpha u_0)^2 + 2\beta^2(\alpha + \xi) u_0^2 - 4\beta^2 u_0 u_1$$

$$= \frac{2}{\alpha - \xi}\left[((\alpha - \xi) u_1 - (\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\xi) u_0)^2 - \beta^2((\alpha - \xi)^2 + \beta^2) u_0^2\right].$$

Hieraus gewinnt man unmittelbar den folgenden Satz von Hermite:

Satz D. Es sei eine algebraische Gleichung $f(x) = 0$ mit reellen
effizienten vorgelegt, und man setze voraus, daß sie keine mehrfachen
rzeln besitzt. Es sei ferner ξ eine reelle Zahl, die keine Wurzel von
$= 0$ sein soll. Unter π und ν verstehe man die Anzahl der positiven
ν. negativen Quadrate in der Normaldarstellung der zu f gehörenden
dratischen Form H. Dann ist π gleich der Summe der Anzahl der
llen Wurzeln größer als ξ und der Anzahl ϱ der Paare konjugiert
nplexer Wurzeln, während ν die Summe von ϱ und der Anzahl der
llen Wurzeln kleiner als ξ angibt.

(Eingegangen am 20. November 1923.)

Über geodätische rhombische Netze auf krummen Flächen.

Von

Oskar Perron in München.

Hat das Quadrat des Linienelements einer Fläche die Form

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

und ist dabei $E = G$, so sagt man, die Parameterlinien bilden ein rhombisches Netz; sind sie außerdem auch geodätische Linien, so liegt ein geodätisches rhombisches Netz vor. Kürzlich habe ich alle geodätischen rhombischen Netze der Ebene bestimmt und dabei folgendes Resultat erhalten[1]):

Zwei Geradenscharen einer Ebene bilden dann und nur dann ein rhombisches Netz, wenn sie entweder zwei Strahlenbüschel sind oder wenn sie miteinander identisch sind und einen Kegelschnitt umhüllen.

Damit ist natürlich auch die Frage nach den geodätischen rhombischen Netzen auf abwickelbaren Flächen erledigt. Diese Netze werden eben durch diejenigen Scharen geodätischer Linien gebildet, die bei der Abwicklung in die Ebene in Geradenscharen der oben gekennzeichneten Art übergehen.

Meine Methode trägt aber weiter. Es liegt ja nahe, die analoge Frage auch für andere krumme Flächen zu untersuchen. Speziell für die Flächen konstanter Krümmung kann das Problem, wie ich im folgenden zeigen werde, auf genau dieselbe Funktionalgleichung zurückgeführt werden, auf welche ich bei der Lösung des ebenen Problems gestoßen bin, so daß auch dieser Fall sich vollständig erledigen läßt. Es liegt das in der Hauptsache daran, daß auf den Flächen konstanter Krümmung die geodätischen Linien genau wie in der Ebene eine zweifach unendliche *lineare* Schar bilden. Da, wie Beltrami gezeigt hat, die Flächen konstanter Krümmung die einzigen Flächen sind, denen diese Eigenschaft zukommt

[1]) Bestimmung aller geradlinigen rhombischen Netze. Sitzungsberichte der bayr. Akademie der Wissenschaften; math. naturw. Abteilung 1924.

erscheint es aussichtslos, nach der gleichen Methode noch andere Flächen behandeln.

Ich werde aber in § 3 noch zeigen, daß es im allgemeinen auf einer che überhaupt keine geodätischen rhombischen Netze gibt. *Die notdige und hinreichende Bedingung für die Existenz solcher Netze ist mehr die, daß sich das Linienelement der Fläche in die bekannte ouvillesche Form setzen läßt* (*Liouvillesche Flächen*). Sobald das ienelement auf diese Form gebracht ist, ist es leicht, unendlich viele zwar ∞^1 geodätische rhombische Netze auf der Fläche wirklich anzuen[2]). Die Aufgabe, *alle* derartigen Netze auf einer gegebenen uvilleschen Fläche zu bestimmen, deckt sich dann mit der von Ricci andelten Aufgabe, die Parameter auf alle möglichen Arten so zu transnieren, daß das Linienelement wieder die Liouvillesche Form annimmt[3]).

§ 1.

Flächen konstanter positiver Krümmung.

Ist unsere Aufgabe für irgendeine Fläche gelöst, so ist sie damit h für alle darauf abwickelbaren Flächen gelöst, weil ja geodätische mbische Netze bei Abwicklung offenbar wieder in solche übergehen. Aufgabe wird daher für jede Fläche positiver konstanter Krümmung $\frac{1}{a^2}$ st sein, sobald wir sie für die Kugel mit dem Radius a gelöst haben. nso wird sie für jede Fläche konstanter negativer Krümmung gelöst , sobald wir sie für die Pseudosphäre (Rotationsfläche der Traktrix) der Krümmung $-\frac{1}{a^2}$ gelöst haben. Wir behandeln in diesem Parahen die Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

geodätischen Linien werden durch Ebenen ausgeschnitten, die durch Mittelpunkt gehen. Die eine Schar kann daher durch eine Gleichung

$$U_1 x + U_2 y - z = 0$$

gestellt werden, wobei U_1, U_2 Funktionen eines Parameters $\bar{u}$ sind, ebenso die andere Schar durch eine Gleichung

$$V_1 x + V_2 y - z = 0,$$

[2]) Daß es auf jeder Liouvilleschen Fläche wenigstens ein geodätisches rhomes Netz gibt, hat bereits Herr Finsterwalder vor vielen Jahren bewiesen. dessen Abhandlung: Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation. esbericht d. deutsch. Mathematikervereinigung 6 (1899), S. 45–90, speziell S. 56.

[3]) G. Ricci, Dei sistemi di coordinate atti a ridurre la espressione del quadrato elemento lineare di una superficie alla forma $ds^2 = (U+V)(du^2+dv^2)$. Atti R. Accademia dei Lincei. Rendiconti, Classe di scienze fisiche etc. (5) 2_1 (1893), 3–81.

wobei V_1, V_2 Funktionen eines Parameters $\bar{v}$ sind. Nur wenn eine de beiden Scharen zufällig das Ebenenbüschel durch die z-Achse sein sollte wäre diese Darstellung nicht möglich; doch kann man diesen Fall ja leich durch eine Drehung vermeiden.

Man muß jetzt die Koordinaten x, y, z durch Auflösung der Glei chungen (1), (2), (3) als Funktionen von $\bar{u}, \bar{v}$ berechnen und dann da Quadrat des Linienelements

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = E d\bar{u}^2 + 2F d\bar{u} d\bar{v} + G d\bar{v}^2$$

aufstellen; die Bedingung für ein rhombisches Netz ist dann: $E = G$ Aus den Gleichungen (2), (3) folgt:

$$\lambda x = P, \qquad \lambda y = Q, \qquad \lambda z = R, \tag{4}$$

wobei λ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet, und zur Abkürzung

$$V_2 - U_2 = P, \qquad U_1 - V_1 = Q, \qquad U_1 V_2 - U_2 V_1 = R \tag{5}$$

gesetzt ist. Der Faktor λ ergibt sich, indem man die Gleichungen (4 quadriert und addiert und dann (1) berücksichtigt:

$$a^2 \lambda^2 = P^2 + Q^2 + R^2. \tag{6}$$

Durch Differentiation von (4) folgt,

$$\lambda dx + x d\lambda = dP, \qquad \lambda dy + y d\lambda = dQ, \qquad \lambda dz + z d\lambda = dR,$$

und hieraus durch Quadrieren und Addieren unter Berücksichtigung von (1

$$\lambda^2 ds^2 + a^2 d\lambda^2 = dP^2 + dQ^2 + dR^2. \tag{7}$$

Durch Differentiation von (6) erhält man:

$$a^2 \lambda d\lambda = P dP + Q dQ + R dR, \tag{8}$$

und nunmehr, wenn man die Gleichungen (6) und (7) miteinander mult pliziert und dann die quadrierte Gleichung (8) subtrahiert:

$$\begin{aligned} a^2 \lambda^4 ds^2 &= (P^2 + Q^2 + R^2)(dP^2 + dQ^2 + dR^2) - (P dP + Q dQ + R dR \\ &= (P dQ - Q dP)^2 + (Q dR - R dQ)^2 + (R dP - P dR)^2. \end{aligned}$$

Hieraus erkennt man insbesondere, indem man $d\bar{v} = 0$ setzt:

$$a^2 \lambda^4 E = \left(P \frac{\partial Q}{\partial \bar{u}} - Q \frac{\partial P}{\partial \bar{u}}\right)^2 + \left(Q \frac{\partial R}{\partial \bar{u}} - R \frac{\partial Q}{\partial \bar{u}}\right)^2 + \left(R \frac{\partial P}{\partial \bar{u}} - P \frac{\partial R}{\partial \bar{u}}\right)^2,$$

und ebenso, indem man $d\bar{u} = 0$ setzt:

$$a^2 \lambda^4 G = \left(P \frac{\partial Q}{\partial \bar{v}} - Q \frac{\partial P}{\partial \bar{v}}\right)^2 + \left(Q \frac{\partial R}{\partial \bar{v}} - R \frac{\partial Q}{\partial \bar{v}}\right)^2 + \left(R \frac{\partial P}{\partial \bar{v}} - P \frac{\partial R}{\partial \bar{v}}\right)^2.$$

r, wenn man hier für P, Q, R die Werte aus (5) einsetzt, nach leichter hnung:

$$a^2\lambda^4 E = [(U_1 - V_1)U_2' - (U_2 - V_2)U_1']^2[1 + V_1^2 + V_2^2],$$
$$a^2\lambda^4 G = [-(U_1 - V_1)V_2' + (U_2 - V_2)V_1']^2[1 + U_1^2 + U_2^2],$$

die Akzente Differentiation nach $\bar{u}$ bzw. $\bar{v}$ bedeuten.

Die Bedingung $E = G$ nimmt daher die Gestalt an:

$$\frac{(U_1 - V_1)U_2' - (U_2 - V_2)U_1'}{\sqrt{1 + U_1^2 + U_2^2}} = \pm\frac{-(U_1 - V_1)V_2' + (U_2 - V_2)V_1'}{\sqrt{1 + V_1^2 + V_2^2}}.$$

Führt man aber an Stelle von $\bar{u}$, $\bar{v}$ neue Parameter u, v ein, indem n setzt:

$$\int\sqrt{1 + U_1^2 + U_2^2}\,d\bar{u} = du, \qquad \pm\int\sqrt{1 + V_1^2 + V_2^2}\,d\bar{v} = dv,$$

umgekehrt:

$$\int\frac{du}{\sqrt{1 + U_1^2 + U_2^2}} = d\bar{u}, \qquad \pm\int\frac{dv}{\sqrt{1 + V_1^2 + V_2^2}} = d\bar{v},$$

deutet von jetzt an durch Akzente die Differentiation nach u bzw. v so nimmt die vorige Gleichung die einfachere Form an:

$$(U_1 - V_1)U_2' - (U_2 - V_2)U_1' = -(U_1 - V_1)V_2' + (U_2 - V_2)V_1'.$$

t man aus dieser Gleichung U_1, U_2 als Funktionen von u, ebenso V_1, V_2 Funktionen von v bestimmt, so kann man nachträglich vermöge (10) ht wieder zu den rhombischen Parametern $\bar{u}$, $\bar{v}$ zurückkehren.

Die Funktionalgleichung (11) ist nun genau die, auf die ich auch . O. gestoßen bin, und ebenso wie dort ist auch hier der Fall, daß $U_1 - V_1$ identisch verschwindet, daß also U_1 und V_1 gleich ein und der- en Konstanten sind, sowie der Fall, daß $\frac{U_2 - V_2}{U_1 - V_1}$ konstant ist, ausge- lossen, weil sonst die beiden Scharen geodätischer Linien (2), (3) selbe Büschel darstellen, also gar kein Netz bilden würden.

Nun hat sich a. a. O. herausgestellt, daß die beiden Geradenscharen $\xi\eta$-Ebene (sie war dort als xy-Ebene bezeichnet)

$$\begin{cases} U_1\xi + U_2\eta = 1, \\ V_1\xi + V_2\eta = 1, \end{cases}$$

n die obige Funktionalgleichung besteht, entweder zwei Büschel sind r miteinander identisch sind und einen Kegelschnitt umhüllen. Und ar kann *jedes* Paar von zwei verschiedenen Büscheln

$$\begin{cases} a_1\xi + b_1\eta + c_1 = \mu_1(d_1\xi + e_1\eta + f_1) \\ a_2\xi + b_2\eta + c_2 = \mu_2(d_2\xi + e_2\eta + f_2) \end{cases}.$$

und ebenso *jeder* nicht zerfallende Kegelschnitt

$$A\xi^2 + B\xi\eta + C\eta^2 + D\xi + E\eta + F = 0 \tag{14}$$

dabei herauskommen[4]). Nun gehen die Gleichungen (2), (3) in (12) über, wenn man $\frac{x}{z} = \xi$, $\frac{y}{z} = \eta$ setzt. Unser Satz lehrt daher, daß die beiden Ebenenscharen (2), (3) entweder zwei verschiedene Büschel sind:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = \mu_1 (d_1 x + e_1 y + f_1 z),$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = \mu_2 (d_2 x + e_2 y + f_2 z),$$

oder einen Kegel zweiter Ordnung umhüllen:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dxz + Eyz + Fz^2 = 0.$$

Somit ergibt sich der

Satz. *Zwei Scharen größter Kreise auf der Kugel bilden dann und nur dann ein rhombisches Netz, wenn sie entweder zwei verschiedene Büschel sind oder wenn sie miteinander identisch sind und eine Kurve umhüllen, die durch einen Kegel zweiter Ordnung mit der Spitze im Kugelmittelpunkt ausgeschnitten wird.*

§ 2.

Flächen konstanter negativer Krümmung.

Nach den Ausführungen zu Beginn des vorigen Paragraphen genügt es, die Pseudosphäre mit der Krümmung $-\frac{1}{a^2}$ zu betrachten. Es ist aber zweckmäßig, die Untersuchung zunächst für eine beliebige Rotationsfläche

$$x = \xi \cos\eta, \quad y = \xi \sin\eta, \quad z = f(\xi) \tag{15}$$

durchzuführen und erst nachträglich

$$f(\xi) = a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - \xi^2}}{\xi} - \sqrt{a^2 - \xi^2} \tag{16}$$

zu setzen. Das Quadrat des Linienelements ist dann

$$ds^2 = [1 + f'(\xi)^2]\, d\xi^2 + \xi^2 d\eta^2. \tag{17}$$

Die Differentialgleichungen der geodätischen Linien lassen sich bekanntlich durch Quadraturen lösen, und zwar ergibt sich:

$$\eta = C_0 \int \sqrt{\frac{1 + f'(\xi)^2}{\xi^2 - C_0^2}}\, \frac{d\xi}{\xi} + C_1,$$

[4]) Nur ein Büschel durch den Nullpunkt ist ausgeschlossen, da ein solches ja nicht durch eine Gleichung der Form (12) dargestellt werden kann. Das würde dem Fall entsprechen, daß eine der beiden Ebenenscharen ein Ebenenbüschel durch die z-Ebene wäre, was wir aber oben durch eine Drehung vermieden haben.

C_0, C_1 willkürliche Konstanten sind. Eine Schar von ∞^1 geodätischen ien erhält man daher, indem man für C_0, C_1 beliebige Funktionen es Parameters setzt. Die zwei Scharen geodätischer Linien, die ein mbisches Netz bilden sollen, können daher in der Form angesetzt rden:

$$\begin{cases} \eta = U_0 \int \sqrt{\dfrac{1+f'(\xi)^2}{\xi^2 - U_0^2}}\, \dfrac{d\xi}{\xi} + \dfrac{1}{2} U_1, \\ \eta = V_0 \int \sqrt{\dfrac{1+f'(\xi)^2}{\xi^2 - V_0^2}}\, \dfrac{d\xi}{\xi} + \dfrac{1}{2} V_1, \end{cases}$$

U_0, U_1 Funktionen eines Parameters $\bar{u}$, und V_0, V_1 Funktionen eines rameters $\bar{v}$ sind. Durch die Gleichungen (18) werden ξ, η implizit als ktionen der beiden Parameter $\bar{u}, \bar{v}$ definiert, und das Quadrat des ienelements nimmt dabei die Form an:

$$ds^2 = [1 + f'(\xi)^2] \left[\frac{\partial \xi}{\partial \bar{u}}\, d\bar{u} + \frac{\partial \xi}{\partial \bar{v}}\, d\bar{v}\right]^2 + \xi^2 \left[\frac{\partial \eta}{\partial \bar{u}}\, d\bar{u} + \frac{\partial \eta}{\partial \bar{v}}\, d\bar{v}\right]^2.$$

Bedingung für ein rhombisches Netz ist hiernach folgende:

$$[1 + f'(\xi)^2] \left(\frac{\partial \xi}{\partial \bar{u}}\right)^2 + \xi^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial \bar{u}}\right)^2 = [1 + f'(\xi)^2] \left(\frac{\partial \xi}{\partial \bar{v}}\right)^2 + \xi^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial \bar{v}}\right)^2.$$

Nun folgt aber aus den Gleichungen (18), indem man die erste tiell nach $\bar{v}$ und die zweite partiell nach $\bar{u}$ differenziert:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \bar{v}} = U_0 \sqrt{\frac{1+f'(\xi)^2}{\xi^2 - U_0^2}}\, \frac{1}{\xi}\, \frac{\partial \xi}{\partial \bar{v}}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial \bar{u}} = V_0 \sqrt{\frac{1+f'(\xi)^2}{\xi^2 - V_0^2}}\, \frac{1}{\xi}\, \frac{\partial \xi}{\partial \bar{u}},$$

r, nach $\frac{\partial \xi}{\partial \bar{v}}, \frac{\partial \xi}{\partial \bar{u}}$ aufgelöst:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \bar{v}} = \frac{\xi}{U_0} \sqrt{\frac{\xi^2 - U_0^2}{1+f'(\xi)^2}}\, \frac{\partial \eta}{\partial \bar{v}}, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial \bar{u}} = \frac{\xi}{V_0} \sqrt{\frac{\xi^2 - V_0^2}{1+f'(\xi)^2}}\, \frac{\partial \eta}{\partial \bar{u}}.$$

Setzt man diese Werte für $\frac{\partial \xi}{\partial \bar{v}}, \frac{\partial \xi}{\partial \bar{u}}$ in die Bedingung (19) ein, so mt sie die einfachere Form an:

$$\frac{\xi^4}{V_0^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \bar{u}}\right)^2 = \frac{\xi^4}{U_0^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \bar{v}}\right)^2,$$

r also:

$$U_0 \frac{\partial \eta}{\partial \bar{u}} = \pm V_0 \frac{\partial \eta}{\partial \bar{v}}.$$

Führt man aber an Stelle von $\bar{u}, \bar{v}$ neue Parameter u, v ein, indem a setzt:

$$\int \frac{d\bar{u}}{U_0} = u, \qquad \pm \int \frac{d\bar{v}}{V_0} = v,$$

also umgekehrt:

$$\int U_0\,du = \bar{u}, \qquad \pm\int V_0\,dv = \bar{v}, \tag{22}$$

so nimmt die Bedingung (20) die einfache Form an:

$$\frac{\partial\eta}{\partial u} = \frac{\partial\eta}{\partial v}. \tag{23}$$

Hat man aus dieser Gleichung U_0, U_1 als Funktionen von u, und V_0, V_1 als Funktionen von v bestimmt, so kann man hinterher vermöge (22) sofort wieder zu den rhombischen Parametern $\bar{u}$, $\bar{v}$ übergehen.

Nunmehr wenden wir uns der Pseudosphäre zu; dann ist für $f(\xi)$ die Funktion (16) einzusetzen, woraus folgt:

$$1 + f'(\xi)^2 = \frac{a^2}{\xi^2}.$$

Die Integrale in (18) lassen sich dann auswerten, und zwar geht speziell die erste Gleichung (18) über in:

$$\eta = U_0\int \frac{a\,d\xi}{\xi^2\sqrt{\xi^2 - U_0^2}} + \frac{1}{2}U_1 = \frac{a}{U_0}\sqrt{1-\left(\frac{U_0}{\xi}\right)^2} + \frac{1}{2}U_1.$$

Daraus folgt:

$$(\eta - \tfrac{1}{2}U_1)^2 = \frac{a^2}{U_0^2} - \frac{a^2}{\xi^2},$$

oder wenn man zur Abkürzung

$$\frac{a^2}{U_0^2} - \frac{1}{4}U_1^2 = U_2$$

setzt, nach leichter Rechnung:

$$U_1\frac{\xi^2\eta}{a^2+\xi^2\eta^2} + U_2\frac{\xi^2}{a^2+\xi^2\eta^2} = 1. \tag{24}$$

Analog ergibt sich aus der zweiten Gleichung (18):

$$V_1\frac{\xi^2\eta}{a^2+\xi^2\eta^2} + V_2\frac{\xi^2}{a^2+\xi^2\eta^2} = 1, \tag{25}$$

wobei zur Abkürzung

$$\frac{a^2}{V_0^2} - \frac{1}{4}V_1^2 = V_2$$

gesetzt worden ist. Nur der Fall, daß eine der beiden Scharen zufällig aus den Meridianen der Fläche ($\eta = \text{konst.}$) besteht, entzieht sich dieser Darstellung, was sich daraus erklärt, daß die oben benutzte Integralform

$$U_0\int \frac{d\xi}{\xi^2\sqrt{\xi^2 - U_0^2}} = \frac{1}{U_0}\sqrt{1-\left(\frac{U_0}{\xi}\right)^2}$$

für $U_0 = 0$ eine Modifikation erfahren müßte. Man darf aber von dieser

absehen, da er ja stets durch eine Bewegung innerhalb der Fläche niedén werden kann.

Aus den Gleichungen (24), (25) erhält man:

$$\frac{\xi^2\eta}{a^2+\xi^2\eta^2} = \frac{V_2-U_2}{U_1V_2-U_2V_1}, \qquad \frac{\xi^2}{a^2+\xi^2\eta^2} = \frac{U_1-V_1}{U_1V_2-U_2V_1},$$

durch Division dieser beiden Gleichungen:

$$\eta = -\frac{U_2-V_2}{U_1-V_1}.$$

Bedingungsgleichung (23) für ein rhombisches Netz ist daher einfach folgende:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{U_2-V_2}{U_1-V_1}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{U_2-V_2}{U_1-V_1}\right),$$

ausgerechnet:

$$(U_1-V_1)U_2' - (U_2-V_2)U_1' = -(U_1-V_1)V_2' + (U_2-V_2)V_1'.$$

Das ist wieder genau die Funktionalgleichung (11), und genau wie vorigen Paragraphen ist auch jetzt der Fall, daß $U_1 - V_1$ identisch chwindet oder daß $\frac{U_2-V_2}{U_1-V_1}$ konstant ist, ausgeschlossen. An Stelle der chungen (12) treten aber diesmal die Gleichungen (24), (25), so daß ediglich nötig haben, in den Endformeln (13), (14) statt ξ bzw. η jetzt

$$\frac{\xi^2\eta}{a^2+\xi^2\eta^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\xi^2}{a^2+\xi^2\eta^2}$$

chreiben. Somit ergibt sich der

Satz. *Auf der Pseudosphäre*

$$x = \xi\cos\eta, \qquad y = \xi\sin\eta, \qquad z = a\log\frac{a+\sqrt{a^2-\xi^2}}{\xi} - \sqrt{a^2-\xi^2}$$

n zwei Scharen geodätischer Linien dann und nur dann ein rhomes Netz, wenn sie entweder zwei verschiedene Büschel

$$\xi^2\eta + b_1\xi^2 + c_1(a^2+\xi^2\eta^2) = \mu_1[d_1\xi^2\eta + e_1\xi^2 + f_1(a^2+\xi^2\eta^2)],$$
$$\xi^2\eta + b_2\xi^2 + c_2(a^2+\xi^2\eta^2) = \mu_2[d_2\xi^2\eta + e_2\xi^2 + f_2(a^2+\xi^2\eta^2)]$$

n[5]) *oder miteinander identisch sind und eine Kurve mit der Gleichung*

$$A\xi^4\eta^2 + B\xi^4\eta + C\xi^4 + D\xi^2\eta(a^2+\xi^2\eta^2) + E\xi^2(a^2+\xi^2\eta^2) + F(a^2+\xi^2\eta^2)^2 = 0$$

üllen.

[5]) Dabei ist selbstverständlich auch das Büschel der Meridiane nicht ausossen.

§ 3.

Allgemeine Flächen mit geodätischen rhombischen Netzen.

Wir nehmen jetzt an, daß auf einer Fläche mit dem Linienelementquadrat

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

die Parameterlinien ein geodätisches rhombisches Netz bilden. Dann ist zunächst $E = G$. Aus der Variation des Integrals

$$\int \sqrt{E + 2F\frac{dv}{du} + G\left(\frac{dv}{du}\right)^2}\,du$$

erhält man die Differentialgleichungen der geodätischen Linien in der Form

$$\frac{\partial}{\partial v}\sqrt{E + 2F\frac{dv}{du} + G\left(\frac{dv}{du}\right)^2} = \frac{d}{du}\left(\frac{F + G\frac{dv}{du}}{\sqrt{E + 2F\frac{dv}{du} + G\left(\frac{dv}{du}\right)^2}}\right)$$

Die Parameterlinien $v = \text{konst.}$ werden daher geodätische sein, wenn diese Differentialgleichung für $\frac{dv}{du} = 0$ befriedigt wird; das ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial v}\sqrt{E} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F}{\sqrt{E}}\right).$$

Die Bedingung dafür, daß die Parameterlinien $u = \text{konst.}$ ebenfalls geodätische sind, ist analog

$$\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{G} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F}{\sqrt{G}}\right).$$

Nun soll aber $E = G$ sein, so daß wir erhalten:

$$\frac{\partial}{\partial v}\sqrt{E} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F}{\sqrt{E}}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial u}\sqrt{E} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F}{\sqrt{E}}\right).$$

Das allgemeine Integral dieses Differentialgleichungssystems ist augenscheinlich

$$\sqrt{E} = f(u+v) + \varphi(u-v), \qquad \frac{F}{\sqrt{E}} = f(u+v) - \varphi(u-v).$$

Daher liegt es nahe, die neuen Parameter

$$u + v = \lambda, \qquad u - v = \mu \tag{26}$$

einzuführen; dann ist

$$E = G = [f(\lambda) + \varphi(\mu)]^2, \qquad F = f(\lambda)^2 - \varphi(\mu)^2,$$

und das Quadrat des Linienelements nimmt die Form an:

$$ds^2 = [f(\lambda) + \varphi(\mu)]^2\left[\left(\frac{d\lambda + d\mu}{2}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda - d\mu}{2}\right)^2\right] + 2[f(\lambda)^2 - \varphi(\mu)^2]\frac{d\lambda + d\mu}{2}\,\frac{d\lambda - d\mu}{2},$$

r nach einfacher Reduktion:

$$ds^2 = [f(\lambda) + \varphi(\mu)]\,[f(\lambda)\,d\lambda^2 + \varphi(\mu)\,d\mu^2].$$

Führt man jetzt noch die neuen Parameter

$$\int \sqrt{f(\lambda)}\,d\lambda = \lambda_1, \quad \int \sqrt{\varphi(\mu)}\,d\mu = \mu_1$$

, so erhält man die Liouvillesche Form, womit gezeigt ist, daß nur Liouvilleschen Flächen geodätische rhombische Netze möglich sind. Um nun, wie in der Einleitung versprochen, auf einer Liouvilleschen che wirklich ∞^1 geodätische rhombische Netze nachzuweisen, haben nur nötig, das Quadrat des Linienelements auf ∞^1 verschiedene Arten die Form (27) zu setzen; denn sobald diese Form hergestellt ist, bilden nach dem Bewiesenen die Linien

$$\lambda + \mu = \text{konst.}, \quad \lambda - \mu = \text{konst.}$$

solches Netz, da das ja unsere ursprünglichen Parameterlinien $u = \text{konst.}$, konst. sind. Die Form (27) hat auch Herr Finsterwalder a. a. O. runde gelegt.

Sei also, wenn die Flächenparameter zunächst mit ξ, η bezeichnet den, das Quadrat des Linienelements von der Liouvilleschen Form

$$ds^2 = [F(\xi) + \Phi(\eta)]\,[d\xi^2 + d\eta^2].$$

führen, unter C eine willkürliche Konstante verstehend, neue Parer λ, μ ein durch die Gleichungen

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{F(\xi) - C}} = \lambda, \quad \int \frac{d\eta}{\sqrt{\Phi(\eta) + C}} = \mu.$$

an kann man auch umgekehrt ξ als Funktion von λ, und η als Funk- von μ ansehen und demgemäß setzen:

$$F(\xi) - C = f(\lambda), \quad \Phi(\eta) + C = \varphi(\mu).$$

(30) folgt sodann:

$$\xi = \sqrt{F(\xi) - C}\,d\lambda = \sqrt{f(\lambda)}\,d\lambda, \quad d\eta = \sqrt{\Phi(\eta) + C}\,d\mu = \sqrt{\varphi(\mu)}\,d\mu,$$

das Quadrat des Linienelements (29) geht daher über in:

$$ds^2 = [f(\lambda) + \varphi(\mu)]\,[f(\lambda)\,d\lambda^2 + \varphi(\mu)\,d\mu^2].$$

ist aber gerade die Form (27), und folglich bilden die Kurvenscharen) ein geodätisches rhombisches Netz. Das sind aber nach (30) die en Scharen

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{F(\xi) - C}} + \int \frac{d\eta}{\sqrt{\Phi(\eta) + C}} = \text{konst.},$$

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{F(\xi) - C}} - \int \frac{d\eta}{\sqrt{\Phi(\eta) + C}} = \text{konst.}$$

Damit sind in der Tat, den ∞^1 möglichen Werten von C entsprechend, ∞^1 solche Netze gefunden.

Betrachten wir z. B. das dreiachsige Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a^2>b^2>c^2>0),$$

und führen als Parameter die elliptischen Koordinaten ϱ, σ ein, die durch die Formeln

$$\frac{x^2}{a^2-\varrho}+\frac{y^2}{b^2-\varrho}+\frac{z^2}{c^2-\varrho}=1 \qquad (a^2>\varrho>b^2),$$

$$\frac{x^2}{a^2-\sigma}+\frac{y^2}{b^2-\sigma}+\frac{z^2}{c^2-\sigma}=1 \qquad (b^2>\sigma>c^2)$$

definiert sind, so nimmt das Quadrat des Linienelements bekanntlich die Gestalt an:

$$ds^2=\frac{\varrho-\sigma}{4}\left[\frac{\varrho\,d\varrho^2}{(a^2-\varrho)(\varrho-b^2)(\varrho-c^2)}+\frac{\sigma\,d\sigma^2}{(a^2-\sigma)(b^2-\sigma)(\sigma-c^2)}\right].$$

Es geht in die Form (27) über, wenn wir

$$\int\sqrt{\frac{\varrho}{(a^2-\varrho)(\varrho-b^2)(\varrho-c^2)(\varrho-C)}}\,d\varrho=\lambda, \quad \int\sqrt{\frac{\sigma}{(a^2-\sigma)(b^2-\sigma)(\sigma-c^2)(C-\sigma)}}\,d\sigma$$

und dann durch Funktionsumkehrung

$$\varrho-C=2f(\lambda), \qquad C-\sigma=2\varphi(\mu)$$

setzen, unter C eine willkürliche Konstante verstanden. Daher bilden die beiden Kurvenscharen

$$\int\sqrt{\frac{\varrho}{(a^2-\varrho)(\varrho-b^2)(\varrho-c^2)(\varrho-C)}}\,d\varrho+\int\sqrt{\frac{\sigma}{(a^2-\sigma)(b^2-\sigma)(\sigma-c^2)(C-\sigma)}}\,d\sigma=k$$

$$\int\sqrt{\frac{\varrho}{(a^2-\varrho)(\varrho-b^2)(\varrho-c^2)(\varrho-C)}}\,d\varrho-\int\sqrt{\frac{\sigma}{(a^2-\sigma)(b^2-\sigma)(\sigma-c^2)(C-\sigma)}}\,d\sigma=k$$

ein geodätisches rhombisches Netz. Es wird reell, wenn die Konstante C dem Intervall $a^2>C>c^2$ angehört, wobei dann ϱ, σ auf die Intervalle

$$a^2>\varrho>\mathrm{Max}(b^2, C),$$

$$\mathrm{Min}(b^2, C)>\sigma>c^2$$

zu beschränken sind.

(Eingegangen am 11. Februar 1925.)

Invarianten bei der Variation vielfacher Integrale.

Von

L. Koschmieder in Breslau.

Durch die Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ sei ein Punkt einer $(n+1)$-fach sgedehnten Mannigfaltigkeit X_{n+1} bestimmt; die Darstellungen

$$x_i = \varphi_i(u_1, u_2, \ldots, u_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n+1$$

ser Zahlen durch n in einer Mannigfaltigkeit U_n unabhängig veränderhe Parameter $u_1, u_2, \ldots, u_n$ erklären eine n-fach ausgedehnte Mannigtigkeit X_n in X_{n+1}.

Indem wir Zeiger, die die Zahlenreihe von 1 bis $n+1$ durchlaufen, t $i, j, \ldots$ bezeichnen zum Unterschiede gegen Zeiger $p, q, \ldots$, denen Werte $1, 2, \ldots, n$ zu erteilen sind, setzen wir

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_p} = x_{i,p}, \qquad \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_p \partial u_q} = x_{i,pq}.$$

sei bis auf den Faktor $(-1)^{k+1}$ diejenige Determinante, die man ert, wenn man in der Funktionalmatrix der $x_{i,p}$ die k-te Zeile streicht, der diese Zeichen den festen ersten Zeiger k tragen; die Größen Δ_k gen in U_n nirgends gleichzeitig verschwinden. Es sei mit positiver adratwurzel

$$\Delta = \sqrt{\sum_i \Delta_i^2}.$$

genstand der Untersuchung ist die Variation δJ des über X_n erstreckten achen Integrals

$$J = \int_{(n)} F(x_i, x_{i,p})\, du_1\, du_2 \ldots du_n,$$

wir mit der Abkürzung $du_1\, du_2 \ldots du_n = du$ kurz schreiben $J = \int_{(n)} F\, du$.

Integrand F sei eine eindeutige, hinreichend oft stetig differenzierbare ktion seiner Argumente; es werde

$$\sum_i \frac{\partial^2 F}{\partial x_{i,p}\,\partial x_{i,q}} = F_{pq} \tag{5}$$

gesetzt und die Determinante der F_{pq} mit $|F_{pq}|$ bezeichnet.

Bei festgehaltener $(n-1)$-fach ausgedehnter Begrenzung des Bereiches X_n ist[1])

$$\delta J = \int_{(n)} W_i \delta x_i \, du, \tag{6}$$

wo

$$W_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial u_p}\frac{\partial F}{\partial x_{i,p}}. \tag{7}$$

In (6) und (7) ist — wie auch im folgenden, wenn nichts anderes bemerkt wird — über doppelt auftretende Zeiger nach der in der Tensorrechnung üblichen Weise zu summieren.

Die durch ihr Verschwinden die Extremalen des Integrals (4) kennzeichnenden Variationsableitungen W_i lassen sich mit Hilfe der Determinanten Δ_i durch eine einzige Größe W ausdrücken (§ 3) mittels der Formel

$$W_i = W \Delta_i. \tag{8}$$

Die vorliegende Arbeit dient der Herstellung zweier Invarianten aus dem Variationsprobleme $\delta J = 0$; dabei handelt es sich in bekannter Weise um Invarianz erstens gegenüber beliebigen *Punkt*-Transformationen

$$x_i = \mathfrak{x}_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1}) \tag{9}$$

mit positiver Funktionaldeterminante

$$D = \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})}{\partial(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1})}, \tag{10}$$

zweitens gegenüber beliebigen *Parameter*-Transformationen

$$u_p = \mathfrak{u}_p(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n) \tag{11}$$

mit positiver Funktionaldeterminante

$$\mathfrak{D} = \frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)}. \tag{12}$$

Die Punkt-Transformation (9) führt die Funktion $F(x_i, x_{i,p})$ in eine Funktion F' der Argumente $x'_i, x'_{i,p} = \partial x'_i / \partial u_p$ über,

$$F(x_i, x_{i,p}) = F'(x'_i, x'_{i,p}). \tag{13'}$$

Im übrigen bedeute f' diejenige Funktion, welche aus $x'_i, x'_{i,p}, x'_{i,pq}, \ldots,$

[1]) Vgl. A. Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung (1900), S. 269f.

ch genau derselben Vorschrift gebildet wird, wie die Funktion f aus $x_{i,p}, x_{i,pq},\ldots, F$; f heißt dann eine *Punkt-Invariante vom Gewichte* μ, wenn

$$f' = D^{\mu} f.$$

Was Parameter-Transformationen (11) betrifft, so fordern wir, daß sen gegenüber das Integral (4) invariant sei; diese Einschränkung t, wenn

$$F(x_i, x_{i,\bar{p}}) = \overline{F}(x_i, x_{i,\bar{p}}), \quad x_{i,\bar{p}} = \frac{\partial x_i}{\partial \bar{u}_p}$$

etzt wird, bekanntlich[2]) die Beziehung

$$\overline{F}(x_i, x_{i,\bar{p}}) = \mathfrak{D}\, F(x_i, x_{i,p})$$

Folge. Diejenige Funktion, welche aus $x_i, x_{i,\bar{p}}, x_{i,\bar{p}\bar{q}},\ldots, \overline{F}$ nach dem- ben Gesetze entsteht, wie die Funktion f aus $x_i, x_{i,p}, x_{i,pq},\ldots, F$, be- chnen wir mit $\bar{f}$. Wir nennen f eine *Parameter-Invariante vom Ge- chte* ν, wenn

$$\bar{f} = \mathfrak{D}^{\nu} f.$$

varianten vom Gewichte 0 heißen absolute Invarianten.

Mit Hilfe der im vorstehenden aufgezählten Begriffe und eingeführten zeichnungen lassen sich die, soviel ich sehe, bei *beliebigen* Werten von neuen Ergebnisse[3]) dieser Arbeit wie folgt aussprechen:

I. *Die Größe*

$$H = -\frac{W\Delta}{(F^{n+2}|F_{pq}|)^{\frac{1}{2n}}}$$

eine absolute Invariante gegenüber Punkt- und Parameter-Transforma- nen.

Dabei wird das Vorhandensein eines reellen Wertes der Potenz im nner der rechten Seite von (14) vorausgesetzt[4]); den positiven Wert be- tzen wir.

---

[2]) Ebd. S. 264.

[3]) Die *Parameter*-Invarianz ($\overline{24}$) von W leitet J. Radon (Über einige Fragen reffend die Theorie der Maxima und Minima mehrfacher Integrale, Monatshefte f. h. u. Phys. 22 (1911), S. 53–63 mittels eines besonderen auf die Form von F üglichen Kunstgriffes (vgl. [12])) her. Mit eben diesem gewinnt Th. De Donder *Punkt*-Invariante $WF_1^{-\frac{1}{2}}$ (Sur les invariants du calcul des variations, C. R. Acad. Paris **155** (1912), S. 1003–1005, wo auch das Zeichen F_1 für $n > 1$ erklärt wird. Wegen des Wertes $n = 1$ vgl. [8]), [9]); die Aufstellung der Invarianten H und G $n = 2$ rührt von mir her, vgl. [5]).

[4]) Daß diese Eigenschaft bei Transformationen (9), (11) erhalten bleibt, zeigen), (23).

Es scheint angebracht, beim Variationsprobleme $\delta J = 0$ die für irgend- eine X_n (s. (1)) ausgerechnete Invariante H als deren „mittlere extremale Krümmung" zu bezeichnen; ist nämlich $n = 2$ und X_3 ein Riemann- scher Raum V_3 mit der Maßbestimmung

$$ds^2 = a_{ik}\,dx_i\,dx_k, \tag{15}$$

und bedeutet J den Inhalt O einer in V_3 gelegenen Fläche V_2,

$$O = \iint \sqrt{B}\,du_1\,du_2, \tag{4a}$$

$$B = |b_{pq}|, \quad b_{pq} = a_{ik}x_{i,p}x_{k,q},$$

so ist, wie ich an anderer Stelle[5]) zeige, die für irgendeine Fläche $x_i = \varphi_i(u_1, u_2)$ berechnete Größe H nichts anderes als deren mittlere Krümmung.

II. *Das über einen Teil der X_{n+1} erstreckte $(n+1)$-fache Integral*

$$K = \int_{(n+1)} G\,dx, \tag{16}$$

$$G = \frac{(F^{n+2}\,|F_{pq}|)^{\frac{1}{2n}}}{\Delta}, \tag{17}$$

$$dx = dx_1\,dx_2 \ldots dx_{n+1}$$

ist invariant gegen Punkt- und Parameter-Transformationen; oder, was wegen

$$dx = D\,dx'$$

dasselbe ist: G ist eine Punkt-Invariante vom Gewichte 1 und eine abso- lute Parameter-Invariante.

Das Integral (16) erhält einen Sinn erst durch die Angabe, was unter den in G auftretenden Argumenten $x_{i,p}$ zu verstehen sei: Man erfüllt den das Integrationsgebiet bildenden Teil der X_{n+1} mit einer einfach unend- lichen Schar n-fach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten X_n

$$x_i = \omega_i(u_1, u_2, \ldots, u_n; a) \tag{18}$$

so, daß durch jeden Punkt der X_{n+1} genau eine X_n hindurchgeht, und entnimmt die Werte $x_{i,p}$ aus (18).

Ich habe a. a. O. [5]) nachgewiesen, daß bei dem Ansatze (4a), (15) das Integral (16) einen Teil R des Raumes V_3 darstellt; man kann in- folgedessen, wenn man das Integral (4) als „Inhalt einer X_n" anspricht, das Integral (16) als den beim Variationsprobleme $\delta J = 0$ der Schar (18) zugehörigen „Inhalt" des genannten Stückes *der* X_{n+1} bezeichnen. Dieser Begriff hängt im allgemeinen von der Wahl der Schar (18) ab.

---

[5]) In einer der Schriftleitung der „Math. Annalen" eingereichten Arbeit.

Man beweist die Invarianzen I, II mit Hilfe der Transformationsformeln der Größen Δ_i, F_{pq}, W_i; diese lauten

$$(19') \qquad D\Delta_i' = \Delta_k \frac{\partial x_k}{\partial x_i'}, \qquad (\overline{19}) \qquad \bar{\Delta}_i = \mathfrak{D}\Delta_i,$$

$$(20') \qquad \frac{F_{pq}'}{\Delta'^2} = D^2 \frac{F_{pq}}{\Delta^2}, \qquad (\overline{20}) \qquad \bar{F}_{pq} = \mathfrak{D} F_{rs} \frac{\partial u_p}{\partial u_r} \frac{\partial u_q}{\partial u_s},$$

$$(21') \qquad W_i' = W_k \frac{\partial x_k}{\partial x_i'}, \qquad (\overline{21}) \qquad \bar{W}_i = \mathfrak{D} W_i.$$

Für $n = 2$ sind diese Beziehungen, wie auch $(\overline{23})$, (24) von M. Fujiwara[6]) angegeben; für einen beliebigen Wert von n werden sie hier in § 1 bis § 3 auf, wie mir scheint, sehr einfache Weise entwickelt[3]).

Aus (3) und $(\overline{19})$ folgt

$$(\overline{22}) \qquad \bar{\Delta} = \mathfrak{D}\Delta,$$

aus (20)

$$(23') \qquad \frac{|F_{pq}'|}{\Delta'^{2n}} = D^{2n} \frac{|F_{pq}|}{\Delta^{2n}}, \qquad (\overline{23}) \qquad |\bar{F}_{pq}| = \mathfrak{D}^{n-2} |F_{pq}|;$$

ersetzt man in (21') gemäß (8) links W_i' durch $W'\Delta_i'$, rechts W_k durch $W\Delta_k$, so ergibt sich mit Rücksicht auf (19')

$$(24') \qquad W' = DW,$$

während man aus $(\overline{19})$, $(\overline{21})$ erhält

$$(\overline{24}) \qquad \bar{W} = W.$$

(13'), (23'), (24') bzw. $(\overline{13})$, $(\overline{22})$, $(\overline{23})$, $(\overline{24})$ liefern sogleich

$$(25) \qquad H' = H \quad \text{bzw.} \quad \bar{H} = H;$$

schon aus (13'), (23') bzw. $(\overline{13})$, $(\overline{22})$, $(\overline{23})$ findet man

$$(26) \qquad G' = DG \quad \text{bzw.} \quad \bar{G} = G.$$

(25) und (26) aber waren die Behauptungen.

Bei *einfachen* Integralen ergeben sich bekannte Tatsachen: Beachtet man, daß dann, wenn $dx_1/du = \dot{x}_1$ usw. gesetzt wird,

$$\Delta = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}$$

und die einzige Größe F_{pq}

$$F_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_2^2} = (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) F_1$$

---

[6]) Über die invariantentheoretische Bedeutung der Lagrangeschen Gleichung des Variationsproblems für Doppelintegrale, The Tôhoku Mathematical Journal 1 (1911/12), S. 8–18.

ist unter Verwendung des in diesem Falle üblichen Zeichens F_1 [7]), so er weist sich

$$H = -\frac{W}{\sqrt{F^3 F_1}}$$

(bis aufs Vorzeichen) als die von G. Landsberg [8]) eingeführte „extremal Krümmung", während man in

$$(16^*) \qquad K = \iint \sqrt{F^3 F_1}\, dx_1 dx_2$$

dasjenige Integral erkennt, welches P. Funk und L. Berwald [9]) bei den Variationsprobleme $\delta J = 0$ dem „Längenintegrale"

$$(4^*) \qquad J = \int F(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)\, du$$

als „Flächeninhalt" zur Seite gestellt haben. Es waren gerade die a. a. O [8]) und [9]) bei *einfachen* Integralen gefundenen Formeln, die die vorliegend Verallgemeinerung auf *vielfache* Integrale veranlaßten.

Die im Falle $n = 2$ von mir gewonnenen Ergebnisse habe ich er wähnt [3]); lag in meiner genannten Arbeit [5]) der Nachdruck auf gewisse geometrischen Zusammenhängen in dreifach ausgedehnten Räumen mi Riemannscher Maßbestimmung, so steht hier die rechnerische Herstellun der Invarianten H, G mit Hilfe der Formeln (19), (20), (21) und dere jetzt zu führender Beweis im Vordergrunde.

§ 1.

Die Transformation der Größen Δ_i.

Aus den in den Größen $\frac{\partial x_k'}{\partial x_1}, \frac{\partial x_k'}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial x_k'}{\partial x_n}$ linearen Gleichungen

$$(27) \qquad \frac{\partial x_k'}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial x_l'} = \begin{cases} 0 \text{ für } l \neq k, \\ 1 \text{ für } l = k \end{cases}$$

findet man, indem man die algebraische Ergänzung des Elementes $\partial x_i/\partial x$ in D mit D_{ik} bezeichnet,

$$D\frac{\partial x_k'}{\partial x_i} = D_{ik} = (-1)^{i+k}\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1})}{\partial(x_1', x_2', \ldots, x_{k-1}', x_{k+1}', \ldots, x_{n+1}')}.$$ [10])

---

[7]) A. a. O. [1]), S. 52.

[8]) Über die Krümmung in der Variationsrechnung, Math. Annalen 65 (1908 S. 313–349.

[9]) Flächeninhalt und Winkel in der Variationsrechnung, Lotos (Prag) 67/6 (1919/20), S. 45–49. Die Art der dort S. 46 f. gegebenen Erklärung des Integrals (16 mittels der Kurvenschar $x_i = \omega_i(u; a)$, $i = 1, 2$, ließ sich ohne weiteres zu unser Erklärung des Integrals (16) mittels der Schar (18) verallgemeinern.

[10]) Vgl. auch R. Weitzenböck, Invariantentheorie (Groningen 1923), S. 305.

Zufolge der Erklärung der Größen Δ_k',

$$\Delta_k' = (-1)^{k+1} \frac{\partial(x_1', x_2', \ldots, x_{k-1}', x_{k+1}', \ldots, x_{n+1}')}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)},$$

ergibt sich also die wegen (27) mit (19′) gleichwertige Beziehung

$$D\Delta_k' \frac{\partial x_k'}{\partial x_i} = \Delta_i. \tag{28}$$

Die Formeln (19) verstehen sich von selbst.

§ 2.

Die Größen F_{pq} und ihre Transformation.

Wir bedienen uns fortan der Bezeichnung

$$\eta_{pq} = \begin{cases} 0 \text{ für } q \neq p, \\ 1 \text{ für } q = p. \end{cases}$$

Indem wir vorübergehend n^2 feste Zahlenwerte λ_{pq} mit positiver Determinante $|\lambda_{pq}| = \Lambda$ einführen, können wir der Identität ($\overline{13}$) durch den Ansatz $\partial u_r / \partial \bar{u}_p = \lambda_{rp}$ die Gestalt geben

$$F(x_i, x_{i,r}\lambda_{rp}) = \Lambda F(x_i, x_{i,p}) = \Lambda F.$$

Differenzieren wir nach λ_{rp} [11]) und setzen danach $\lambda_{rp} = \eta_{rp}$, so erhalten wir die Beziehungen

$$\frac{\partial F}{\partial x_{i,p}} x_{i,r} = \eta_{rp} F; \tag{29}$$

aus ihnen folgen durch Differentiation nach $x_{k,q}$ [12]) die weiteren

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_{i,p} \partial x_{k,q}} x_{i,r} + \eta_{rq} \frac{\partial F}{\partial x_{k,p}} = \eta_{rp} \frac{\partial F}{\partial x_{k,q}}.$$

Zu der letzten Gleichung addieren wir diejenige, welche aus ihr durch Vertauschung von p und q hervorgeht; dann heben sich die ersten Ableitungen der Funktion F fort, und es bleibt

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_{i,p} \partial x_{k,q}} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_{i,q} \partial x_{k,p}} \right) x_{i,r} = 0.$$

Hält man k; p, q fest und erteilt dem Zeiger r der Reihe nach die Werte

[11]) Vgl. im Falle $n = 2$ O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung (1909), S. 665.

[12]) In Verallgemeinerung der a. a. O. [1]), S. 281–283 durchgeführten Rechnung bleibe ich dabei, die auf die Parameter-Transformation bezüglichen Ergebnisse durch Differentiation der Identität ($\overline{13}$) herzuleiten, während J. Radon[3]) solche durch die Bemerkung gewinnt, daß $F(x_i, x_{i,p})$ die Gestalt $\Phi(x_i, \Delta_i)$ besitzt.

$1, 2, \ldots, n$, so stellen diese Formeln ein System von n linearen Gleichungen für die $n+1$ Ausdrücke

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_{i,p}\partial x_{k,q}}+\frac{\partial^2 F}{\partial x_{i,q}\partial x_{k,p}}\right)=F_{ik,pq}=F_{ki,pq}$$

dar, demzufolge diese sich wie die Größen Δ_i verhalten. Da ersichtlich auch die Gleichungen

$$F_{ik,pq}x_{k,r}=0$$

gelten, gibt es solche Größen F_{pq}, daß sich durch sie die $F_{ik,pq}$ in der Form darstellen lassen

$$F_{ik,pq}=F_{pq}\frac{\Delta_i\Delta_k}{\Delta^2}. \tag{30}$$

Indem man hierin $k=i$ setzt und über i summiert, erkennt man, daß diese Werte F_{pq} mit den in (5) eingeführten übereinstimmen.

Zur Feststellung der Wirkung einer Punkt-Transformation auf die Größen F_{pq} leiten wir aus (13′) in der Form

$$F(x_i, x_{i,p})=F'\left(x_i', \frac{\partial x_i'}{\partial x_i}x_{i,p}\right) \tag{31′}$$

durch zwei Differentiationen die Beziehungen her

$$\frac{\partial F}{\partial x_{i,p}}=\frac{\partial F'}{\partial x_{l,p}'}\frac{\partial x_l'}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_{i,p}\partial x_{k,q}}=\frac{\partial^2 F'}{\partial x_{l,p}'\partial x_{m,q}'}\frac{\partial x_l'}{\partial x_i}\frac{\partial x_m'}{\partial x_k}.$$

Vertauscht man hierin i und k und addiert die so entstehende Formel zu der vorhergehenden, so erhält man nach Division mit 2

$$F_{ik,pq}=F_{lm,pq}'\frac{\partial x_l'}{\partial x_i}\frac{\partial x_m'}{\partial x_k}.$$

Die Benutzung der Darstellung (30) auf beiden Seiten liefert

$$F_{pq}\frac{\Delta_i\Delta_k}{\Delta^2}=F_{pq}'\frac{1}{\Delta'^2}\Delta_l'\frac{\partial x_l'}{\partial x_i}\Delta_m'\frac{\partial x_m'}{\partial x_k};$$

wenn man rechts noch (28) heranzieht, $k=i$ setzt und über i summiert, stellt sich das gewünschte Ergebnis (20′) ein.

Bei einer Parameter-Transformation findet man, indem man die Identität (13) in der Gestalt

$$\overline{F}(x_i, x_{i,\bar{p}})=\mathfrak{D}F\left(x_i, x_{i,\bar{p}}\frac{\partial u_p}{\partial u_r}\right) \tag{31}$$

zweimal differenziert,

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial x_{i,\bar{p}}} = \mathfrak{D}\,\frac{\partial F}{\partial x_{i,r}}\,\frac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_r},$$

$$\frac{\partial^2 \overline{F}}{\partial x_{i,\bar{p}}\,\partial x_{k,\bar{q}}} = \mathfrak{D}\,\frac{\partial^2 F}{\partial x_{i,r}\,\partial x_{k,s}}\,\frac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_r}\,\frac{\partial \bar{u}_q}{\partial u_s}.$$

achdem man hierin $k = i$ gesetzt hat, gewinnt man $(\overline{20})$ durch Summierung über i.

§ 3.

Die Variationsableitungen und ihre Transformation.

Zum Beweise der Formeln (8) differenzieren wir die Formel (29), in r wir r durch q ersetzen, nach u_p, ohne zunächst über p zu summieren:

$$x_{i,q}\,\frac{\partial}{\partial u_p}\,\frac{\partial F}{\partial x_{i,p}} + \frac{\partial F}{\partial x_{i,p}}\,x_{i,qp} = \eta_{pq}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\,x_{i,p} + \frac{\partial F}{\partial x_{i,r}}\,x_{i,rp}\right).$$

ihren wir jetzt die Summierung über p durch und beachten, daß dann chts nur das dem Werte $p = q$ entsprechende Glied stehen bleibt, so halten wir, indem wir in diesem nachträglich p statt r schreiben,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial u_p}\,\frac{\partial F}{\partial x_{i,p}}\right) x_{i,q} = \frac{\partial F}{\partial x_{i,p}}\,(x_{i,qp} - x_{i,pq}).$$

ie rechte Seite verschwindet; was übrigbleibt, ist nach (7) ein System on n linearen Gleichungen für die $n+1$ Ausdrücke W_i, aus dem folgt, aß es eine Größe W von der Beschaffenheit (8) gibt[13]).

Die Transformation (21) der Variationsableitungen wird gewöhnlich[14]) us der Invarianz des die Variation δJ darstellenden Integrals (6) gewonnen; dem Rahmen unserer Betrachtung fügt sich die folgende, unittelbar an die Gestalt (7) der Größen W_i anknüpfende Herleitung dieser ormeln wohl ein.

Aus (31′) folgt bei passender Umbenennung der Zeiger

32) $$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial F'}{\partial x'_k}\,\frac{\partial x'_k}{\partial x_i} + \frac{\partial F'}{\partial x'_{k,p}}\,x_{l,p}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,\frac{\partial x'_k}{\partial x_l},$$

33) $$\frac{\partial}{\partial u_p}\,\frac{\partial F}{\partial x_{i,p}} = \frac{\partial x'_k}{\partial x_i}\,\frac{\partial}{\partial u_p}\,\frac{\partial F'}{\partial x'_{k,p}} + \frac{\partial F'}{\partial x'_{k,p}}\,x_{l,p}\,\frac{\partial}{\partial x_l}\,\frac{\partial x'_k}{\partial x_i}.$$

ieht man (33) von (32) ab, so heben sich die zweiten Glieder rechts rt, und es ergibt sich nach (7)

$$W_i = W'_k\,\frac{\partial x'_k}{\partial x_i};$$

iese Beziehung besagt wegen (27) dasselbe wie (21′).

[13]) Vgl. auch G. Vivanti, Sull' equazione di Eulero per gli integrali multipli, endiconti del circolo mat. di Palermo **33** (1912), S. 268–274, bes. S. 271.

[14]) Siehe a. a. O. [10]), S. 369 f.; ferner für $n = 1$ a. a. O. [8]), S. 327 f.; für $n = 2$. a. O. [6]), S. 14.

Durch Differentiation der Formel $(\overline{31})$ erhält man

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial x_i} = \mathfrak{D}\frac{\partial F}{\partial x_i}, \tag{34}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{u}_p}\frac{\partial \overline{F}}{\partial x_{i,\bar{p}}} = \mathfrak{D}\frac{\partial}{\partial u_q}\frac{\partial F}{\partial x_{i,q}} + \frac{\partial F}{\partial x_{i,q}}\frac{\partial}{\partial \bar{u}_p}\left(\mathfrak{D}\frac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_q}\right). \tag{35}$$

Nun ist aber (§ 1) $\mathfrak{D}\frac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_q}$ die algebraische Ergänzung des Elementes $\frac{\partial u_q}{\partial \bar{u}_p}$ in $\mathfrak{D}$, also nach einer bekannten Eigenschaft der Reziproken einer Funktionaldeterminante[15])

$$\frac{\partial}{\partial \bar{u}_p}\left(\mathfrak{D}\frac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_q}\right) = 0;$$

hiernach fällt in (35) das zweite Glied rechts fort, und nunmehr liefert die Subtraktion dieser Gleichung von (34) die Formel $(\overline{21})$.

---

[15]) Vgl. G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie (1909), S. 318

(Eingegangen am 2. November 1924.)

Eine Kennzeichnung der Kreise auf der Kugel.

Von

Wilhelm Blaschke in Hamburg.

Unter diesem Titel ist in der Math. Zeitschr. **21**, S. 208—209, eine Mitteilung erschienen, die ich hier berichtigen möchte. Vor mehreren Jahren habe ich die Frage aufgeworfen, ob folgende Vermutung stimmt:

A. *Die Kugeln sind die einzigen Flächen, bei denen alle geodätischen Linien durch einen Punkt sich immer wieder in einem Punkt treffen.*

Für diesen Satz A haben außer seinem Urheber noch andere Geometer Beweise gefunden, die sich alle bald als unrichtig erwiesen haben. Schließlich aber hat Herr Reidemeister einen besonders schönen Beweis entdeckt, den man im Anhang zur zweiten Auflage des ersten Bandes meiner Differentialgeometrie oder in Crelles Journal, **154** (1924), S. 8—14, nachlesen kann. Das wichtigste Mittel seiner Beweisführung ist der folgende Satz B, den mir im Gespräch Herr Study als Vermutung mitgeteilt und den Herr Reidemeister zuerst bewiesen hat, den ich deshalb als „Satz von Study und Reidemeister" zu nennen pflege:

B. *Eine Kugelfläche und auf ihr ein Kurvensystem mit der Eigenschaft, daß durch drei verschiedene Kugelpunkte genau eine Systemkurve geht, ist topologisch gleichwertig einer Eifläche mit ihren ebenen Schnitten.*

Jetzt hat an einem einfachen Gegenbeispiel Herr Hjelmslev gezeigt, daß Satz B falsch ist. Damit ist wiederum Gelegenheit zu neuen Beweisangriffen auf A gegeben.

Mit dem Fall von B stürzt auch die Anwendung auf den (nach Hjelmslev richtigen) Satz, die ich in der im Titel genannten Schrift gemacht habe, und eine verwandte Untersuchung in den Hamburger Abhandlungen **3** (1924), S. 164—166.

Hamburg, im Mathematischen Seminar, am 24. Mai 1925.

(Eingegangen am 25. Mai 1925.)

Nachtrag zu meinen Bemerkungen zu der Arbeit des Herrn Walfisz: Über das Piltzsche Teilerproblem in algebraischen Zahlkörpern [Bd. 22 (1925), S. 189—205].

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Man pflegt bei den verschiedenen Begriffen der Summabilität den Autornamen zur Unterscheidung hinzuzufügen. Der Begriff der Mediabilität ist zuerst von Herrn Doetsch in seiner bekannten Dissertation [Göttingen (1920)] gebraucht worden und hat seitdem keine andere Bedeutung erhalten. Daher hatte ich Herrn Doetsch nicht besonders zitiert. Da er mir mitteilt, daß er seine Urheberschaft nicht für hinreichend bekannt hält, beeile ich mich, jenen Hinweis nachzutragen.

Göttingen, den 17. Juni 1925.

(Eingegangen am 18. Juni 1925.)

Ein Beitrag zur Theorie der diophantischen Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Von

Karl Dörge in Berlin.

Wir denken uns eine algebraische Gleichung

$$f(x, y) = \sum_{\mu, \nu=0}^{n} a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = 0 \tag{1}$$

mit beliebigen Koeffizienten gegeben und schließen den Fall aus, daß die Gleichung durch ein Polynom $y = f(x)$ mit rationalen Koeffizienten befriedigt werden kann. Man nehme ferner an, daß es unendlich viele positive ganzzahlige Werte

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots$$

gibt, zu denen ganzzahlige Lösungen y der Gleichung $f(x, y) = 0$ vorhanden seien.

Th. Skolem[1]) hat bewiesen, daß unter den über die Gleichung gemachten Annahmen

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{x_\nu}{\nu} = \infty \tag{2}$$

sein muß. Ich werde im folgenden etwas mehr beweisen. Es gibt nämlich eine positive ganze Zahl m und ein positives α, so daß für genügend großes ν

$$x_{\nu+m} - x_\nu > x_\nu^\alpha \tag{3}$$

wird. Analoges gilt natürlich für die Folge der negativen ganzzahligen Werte x'_ν, zu denen ganzzahlige Lösungen der Gleichung y gehören. Der von mir bewiesene Satz besagt mehr als der Skolemsche, denn schon aus der Tatsache, daß $x_{\nu+m} - x_\nu$ mit wachsendem ν über alle Grenzen wächst, folgt die Relation (2). Setzt man aber z. B. $x_\nu = [\nu \cdot \log \nu]$, so

[1]) Untersuchungen über die möglichen Verteilungen ganzzahliger Lösungen gewisser Gleichungen, Videnskapsselskapets Skrifter 1921, Nr. 17.

ist (2) erfüllt, dagegen gibt es kein Paar m, α, für das (3) gilt. Nach dem Skolemschen Satz könnte daher unsere Gleichung (1) noch für alle $x_\nu = [\nu \cdot \log \nu]$ ganzzahlige Lösungen aufweisen, ohne durch ein Polynom befriedigt werden zu können, nach unserem Satz ist dies jedoch ausgeschlossen.

Meine Beweismethode ist der Skolemschen nahe verwandt. Mein Satz ergibt sich aus einem Hilfssatz, den ich in den §§ 1 und 2 beweise:

Hilfssatz. *Gegeben sei eine Reihe*

$$\varphi(x) = a_{-k} x^{\frac{k}{q}} + a_{-k+1} x^{\frac{k-1}{q}} + \ldots + a_0 + \frac{a_1}{x^{\frac{1}{q}}} + \ldots,$$

wobei k und q positive ganze Zahlen sind. Sie möge für genügend große $|x|$ konvergieren und sich nicht auf ein Polynom in x mit rationalen Koeffizienten reduzieren. Gibt es dann noch unendlich viele positive ganze Zahlen

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots,$$

für die $\varphi(x)$ ganz wird, so muß ein Paar m, α existieren, so daß die Relation (3) für genügend großes ν besteht.

Der größeren Deutlichkeit halber wird der Beweis zunächst für den Fall $q = 1$ durchgeführt.

§ 1.

Der Hilfssatz im Falle $q = 1$.

Unsere Reihe hat also die Form

$$\varphi(x) = a_{-k} x^k + a_{-k+1} x^{k-1} + \ldots + a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots \tag{4}$$

und soll für $|x| > R$ konvergieren. Wir können annehmen, daß $\varphi(x)$ überhaupt kein Polynom ist, da die Koeffizienten dann von selbst rationale Zahlen sein müßten. Es sei r eine ganze rationale positive Zahl. Wir bilden $\varphi(t+r)$ und setzen, was jedenfalls zulässig ist,

$$\varphi(t+r) = \sum_{\mu=-k}^{\infty} \frac{b_\mu}{t^\mu}. \tag{5}$$

Dann gilt für jedes positive μ

$$b_\mu = \sum_{\varkappa=1}^{\mu} a_\varkappa \binom{-\varkappa}{\mu-\varkappa} r^{\mu-\varkappa} = \sum_{\varkappa=1}^{\mu} (-1)^{\mu-\varkappa} a_\varkappa \binom{\mu-1}{\varkappa-1} r^{\mu-\varkappa} \tag{6}$$

und hieraus folgt

$$|b_\mu| \leqq r^{\mu-1} 2^{\mu-1} \operatorname{Max}(|a_1|, \ldots, |a_\mu|). \tag{7}$$

Ferner sind die b_μ für $\mu \leqq 0$ Polynome in r höchstens vom Grade k.

Es seien $r_1 < r_2 < \ldots < r_{k+2}$ positive ganze Zahlen. In der Matrix

$$(1, r_\lambda, r_\lambda^2, \ldots, r_\lambda^{k+1}) \qquad (\lambda = 1, \ldots, k+2)$$

ezeichnen wir die Adjunkten der letzten Kolonne mit $A_1, A_2, \ldots, A_{k+2}$, ann wird

8) $$\sum_{\varkappa=1}^{k+2} A_\varkappa r_\varkappa^\varrho = 0 \qquad (\varrho = 0, 1, \ldots, k),$$

8′) $$\sum_{\varkappa=1}^{k+2} A_\varkappa r_\varkappa^{k+1} \neq 0.$$

Bilden wir jetzt die Summe

9) $$f(t) = \sum_{\varkappa=1}^{k+2} A_\varkappa \varphi(t + r_\varkappa),$$

o ist diese nach Potenzen von $\frac{1}{t}$ entwickelbar, wobei wegen (8) alle nicht egativen Potenzen von t herausfallen. Ist a_λ der erste von 0 verschiedene Koeffizient aus der Reihe $a_1, a_2, \ldots$, so hat $f(t)$ die Gestalt

10) $$f(t) = \frac{1}{t^{\lambda+k+1}}\left(c_0 + \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2} + \ldots\right).$$

Hierin ist

$$c_0 = a_\lambda \binom{-\lambda}{k+1} \sum_{\varkappa=1}^{k+2} A_\varkappa r_\varkappa^{k+1}.$$

Also gilt unabhängig von der speziellen Wahl der $r_\varkappa$ wegen (8′)

11) $$|c_0| \geqq |a_\lambda|.$$

ndem wir nun $L = \lambda + k + 1$ setzen, ist wegen (7)

12) $$|c_\sigma| \leqq \sum |A_\varkappa| \cdot (2r_\varkappa)^{L+\sigma-1} \cdot \mathrm{Max}\,(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{L+\sigma}|).$$

Man setze nun zur Abkürzung $r_{k+2} = r$, dann wird

13) $$|A_\varkappa| \leqq r^{\frac{k(k+1)}{2}}.$$

Wegen der Konvergenz der Reihe (4) läßt sich eine positive Zahl $C \geqq 1$ o bestimmen, daß

14) $$\mathrm{Max}\,(|a_1|, \ldots, |a_r|) \leqq C^r.$$

Wegen (13) und (14) wird

$$|c_\sigma| \leqq (C_1 r^M)^{L+\sigma},$$

obei $C_1 = (k+2)\,2C$ und $M = 1 + \frac{k(k+1)}{L}$ gesetzt ist. Dann ist

$$|f(t)| \leqq \sum_{\sigma=0}^{\infty} \left(\frac{C_1 r^M}{t}\right)^{L+\sigma}.$$

Ist also

$$\frac{C_1 r^M}{t} < \frac{1}{2}, \quad \text{d. h. } r < \left(\frac{1}{2C_1}\right)^{\frac{1}{M}} t^{\frac{1}{M}}, \tag{15}$$

so wird $|f(t)| < 1$. Setzt man andererseits $C_2 = C_1^{L+1}$ und $M' = M(L+1)$ so ist

$$|c_\sigma| \leqq (C_2 r^{M'})^\sigma,$$

also

$$\left| \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{c_\sigma}{t^\sigma} \right| \leqq \sum_{\sigma=1}^{\infty} \left(\frac{C_2 r^{M'}}{t}\right)^\sigma. \tag{16}$$

Nun wähle man die Konstante C_3, so daß $\sum_{\sigma=1}^{\infty} C_3^\sigma < |a_1|$ wird, dann wird fü

$$\frac{C_2 r^{M'}}{t} < C_3, \quad \text{d. h. } r < \left(\frac{C_3}{C_2}\right)^{\frac{1}{M'}} t^{\frac{1}{M'}} \tag{17}$$

wegen (15) und (11) $f(t) \neq 0$.

Für Wertepaare r und t also, die den Ungleichungen (15) *und* (17 *gleichzeitig genügen, ist jedenfalls* $f(t)$ *keine ganze Zahl.*

Wählt man nun die positive Zahl α kleiner als $\frac{1}{M}$ und $\frac{1}{M'}$, so werde für genügend großes t und

$$r \leqq t^\alpha \tag{18}$$

die Gleichungen (15) und (17) gleichzeitig erfüllt sein, also ist dann $f($ jedenfalls keine ganze Zahl.

Wir nehmen nun aus der Reihe $x_1 < x_2 < \ldots$ irgendwelche $k+$ aufeinanderfolgende Zahlen $x_\nu, x_{\nu+1}, \ldots, x_{\nu+k+1}$ und bilden mit $r_1 =$ $r_2 = x_{\nu+1} - x_\nu, \ldots, r_{k+2} = x_{\nu+k+1} - x_\nu$ die Funktion $f(t)$ und zwar fü $t = x_\nu$. Dann zeigt (18), daß bei genügend großem ν

$$x_{\nu+k+1} - x_\nu > x_\nu^{\alpha}$$

ist. Damit ist die Gültigkeit unseres Hilfssatzes mit $m = k+1$ bewiese

§ 2.

Der Hilfssatz im allgemeinen Falle.

Wir haben es hier mit der Reihe

$$\varphi(x) = a_{-k} x^{\frac{k}{q}} + a_{-k+1} x^{\frac{k-1}{q}} + \ldots + a_0 + \frac{a_1}{x^{\frac{1}{q}}} + \ldots \tag{19}$$

zu tun. Man kann wieder von vornherein voraussetzen, daß $\varphi(x)$ kein Polynom ist. Wie im Spezialfalle des § 1 bilden wir

$$\varphi(t+r) = \sum_{\mu=-k}^{\infty} b_\mu \frac{1}{x^{\frac{\mu}{q}}}.$$

Für positives μ ist dann

$$b_\mu = \sum_{\varkappa=0}^{\left[\frac{k+\mu}{q}\right]} a_{\mu-\varkappa q} \binom{\frac{-\mu+\varkappa q}{q}}{\varkappa} r^\varkappa$$

und

$$|b_\mu| \leqq (\mu+k) \left|\binom{-(\mu+k)}{\mu+k}\right| \cdot \mathrm{Max}\,(|a_{-k}|, \ldots, |a_\mu|) \cdot r^{\mu+k}.$$

Indem man ähnlich wie früher von der Konvergenz der Reihe (19) Gebrauch macht und die leicht zu beweisende Ungleichung $\left|\binom{-\nu}{\nu}\right| < 4^\nu$ benutzt, erkennt man die Möglichkeit der Wahl zweier positiver Konstanten B und N, derart, daß $|b_\mu| < (B r^N)^\mu$.

Nun benutzen wir ebenso wie in § 1, daß $\varphi(t)$ nur endlich viele Potenzen von $t^{\frac{1}{q}}$ mit positiven Exponenten enthält. Die Koeffizienten dieser Potenzen sind gewisse ganze rationale Funktionen von r vom Höchstgrade $\left[\frac{k}{q}\right]$. Man setze nun $k' = \left[\frac{k}{q}\right] + 2$ und bilde mit irgendwelchen voneinander verschiedenen positiven ganzzahligen Werten $r_\varkappa$ die Funktion

$$f(t) = \sum_{\varkappa=1}^{k'} A_\varkappa f(t+r_\varkappa),$$

wobei für die $A_\varkappa$ die Adjunkten der Elemente der letzten Kolonne der Matrix

$$(1, r_\lambda, r_\lambda^2, \ldots, r_\lambda^{k'-1}) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, k')$$

einzusetzen sind. Die Reihenentwicklung dieser Funktion besitzt dann, wie man ebenso schließt wie im ersten Paragraphen, nur negative Potenzen von $t^{\frac{1}{q}}$. Der Koeffizient in dem niedrigsten auftretenden Gliede kann wieder unabhängig von der Wahl der Zahlen $r_\varkappa$ dem Betrage nach nach unten abgeschätzt werden und auch eine der Formel (12) entsprechende Abschätzung der Koeffizienten nach oben gewonnen werden. Setzt man dann wieder $r = \mathrm{Max}\,(r_1, \ldots, r_{k'})$, so ergibt sich bei geeigneter Wahl der Konstanten α, daß für genügend großes t und $r \leqq t^\alpha$ die Funktion $f(t)$ dem Betrage nach kleiner als 1 und nicht Null, *also jedenfalls nicht ganzzahlig sein kann.* Dies gibt dann den Beweis unseres Hilfssatzes im allgemeinen Falle, und zwar ergibt sich, daß für die Konstante m hier der Wert $\left[\frac{k}{q}\right] + 1$ gewählt werden kann.

§ 3.

Der Beweis des Hauptsatzes.

Es sei $F(x, y)$ irgendein Polynom in x und y, und es möge kein Poly nom $y = h(x)$ mit rationalen Koeffizienten geben, so daß $F(x, h(x)) =$ ist. Es gebe weiter unendlich viele positive ganze Zahlen $x_1 < x_2 < \ldots$ für die die Gleichung $F(x, y) = 0$ ganzzahlige Lösungen in y besitzt.

Die ganzzahligen Lösungen x, y verteilen sich auf die verschiedene Zweige der algebraischen Funktion, die durch die irreduziblen Teile von gegeben sind, und jeder dieser Zweige läßt für genügend große positive eine Entwicklung der im Hilfssatze betrachteten Form $\varphi(x)$ zu. Zu jeden Zweige, zu dem überhaupt unendlich viele Lösungen gehören, gehört ei System von positiven Werten m und α, mit denen die im Hilfssatz be wiesene Ungleichung Gültigkeit hat. Man setze nun α gleich dem Minimun der so gewonnenen α-Werte und m gleich der Summe der m-Werte, ver mindert um $n - 1$. Mit diesen Werten gilt dann offenbar für genügen großes ν die Ungleichung (3). Damit ist unser Satz bewiesen.

Zum Schluß möchte ich darauf hinweisen, daß man ähnlich wie de Hilfssatz in den ersten beiden Paragraphen auch den folgenden Satz be weisen kann: *Es bedeute $\varphi(x)$ wieder eine solche Funktion, wie wir si im Hilfssatz betrachtet haben. $\psi(x')$ sei ein beliebiges Polynom in x' aber es reduziere sich nicht auf eine Konstante. Dann gibt es nur end lich viele reelle oder komplexe Zahlen z, für welche $\varphi(\psi(x') + z)$ al Funktion von z' im Körper aller Zahlen verfällt.* Ich werde bei eine anderen Gelegenheit Anwendungen dieses Satzes geben.

(Eingegangen am 10. August 1924.)

Sur les courbes de distribution des probabilités.

Par

S. Bernstein (Charkow).

1. Le problème général de la représentation analytique des courbes de distribution des probabilités revient à approcher indéfiniment sur tout l'axe réel une fonction $f(x)$ qui tend vers 0 à l'infini. Comme je l'ai montré dans un autre endroit*), on peut, quel que petit soit ε, trouver des polynomes $P(x)$ de degré assez élevé, tels qu'on ait sur tout l'axe réel

$$\left| f(x) - \frac{P(x)}{F(x)} \right| < \varepsilon,$$

$F(x)$ étant une fonction donnée paire continue jouissant de la seule propriété que l'on a pour toute valeur de x

$$F(x) \geqq F_1(x),$$

où $F_1(x)$ est une fonction entière transcendante paire de genre 1 à coefficients non négatifs. On peut donc prendre, en particulier $F(x) = e^{k|x-a|^\lambda}$, k étant une constante positive arbitraire, a étant un nombre quelconque et $\lambda \geqq 1$.

Le cas de $\lambda = 2$ correspond à la théorie de M. Bruns; mais au lieu de suivre la marche des calculs employée dans cette théorie, on pourrait également indiquer une infinité d'autres procédés pour approcher indéfiniment la courbe statistique donnée.

L'école anglaise de M. Pearson prend, au contraire, comme point de départ certaines expressions dépendant d'un nombre limité de paramètres au moyen des quelles on cherche à approcher la distribution donnée. Cependant l'emploi des formules de M. Pearson, malgré leur perfection technique, n'est pas dans plusieurs cas justifié théoriquement. On ne peut exiger, d'ailleurs, que des expressions dépendant d'un nombre limité de paramètres soient universellement valables.

*) *Leçons sur les propriétés extrémales des fonctions analytiques d'une variable réelle.* (Paris, Gauthier-Villars, 1925.)

Je me propose d'indiquer ici un nouveau procédé très simple pou obtenir des courbes théoriques de distribution des probabilités appliquable dans des cas étendus.

2. Soit x_n une suite de nombres décroissants ($x_0 > 0$) avec l'augmen tation de l'indice positif n (qui peut varier d'un façon continue o discontinue), x_n satisfaisant avec une approximation pratiquement suffi sante à la loi de Gauss, pour toutes valeurs de n ou du moins pour de valeurs de n assez grandes. Nous désignerons dans la suite par E. M. (u l'espérance mathématique de u.

Ceci posé, soit

$$M_n = \text{E. M. } (x_n), \quad B_n = \text{E. M. } (x_n - M_n)^2,$$

la suite des nombres M_n étant évidemment décroissante.

Déterminons la probabilité P que x_n cesse d'être positif pour compris entre n_1 et n_2 ($n_1 < n_2$).

A cet effet, remarquons que la probabilité $F(n)$ que $x_n \leqq 0$ est l même que celle de l'inégalité

$$x_n - M_n < -M_n = t\sqrt{2B_n},$$

c'est à dire

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{M_n}{\sqrt{2B_n}}} e^{-t^2} dt.$$

Or, on a $x_{n_2} \leqq 0$ dans un des deux cas incompatibles: ou[1]) $x_{n_1} \leqq 0$, o bien $x_{n_1} > 0$; donc

$$F(n_2) = F(n_1) + P,$$

d'où

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{M_{n_1}}{\sqrt{2B_{n_1}}}}^{-\frac{M_{n_2}}{\sqrt{2B_{n_2}}}} e^{-t^2} dt. \tag{1}$$

En d'autres termes, $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z^2} dz$ *désignant la fonction de Laplac*

on voit qu'en posant

$$z(n) = -\frac{M_n}{\sqrt{2B_n}} \tag{2}$$

[1]) Il suffirait d'assujettir x_n à la condition plus large que $x_{n+h} \leqq 0$, dès qu $x_n \leqq 0$, si $h > \alpha > 0$. La formule (1) subsisterait alors tant que $n_2 - n_1 > \alpha$; l formule (1) serait exacte *en gros*, c'est à dire pour des intervalles assez larges.

probabilité P que x_n cesse d'être positif[2]) *pour n compris entre n_1 et n_2 est égale à*

$$P = \frac{1}{2}[\Phi(z_2) - \Phi(z_1)].$$

Il arrivera dans des cas étendus que M_n et B_n se présenteront avec une approximation très considérable comme des fonctions *linéaires* de n.

Soit Σ une quantité positive fixe ou satisfaisant à la loi de Gauss (les valeurs négatives de Σ étant pratiquement impossibles); posons

$$A = \text{E. M.}(\Sigma), \quad B = \text{E. M.}(\Sigma - A)^2.$$

Soit, d'autre part, $x_n = \Sigma - S_n$, où

$$S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n,$$

les quantités α_i pouvant être dépendantes, pourvu seulement que S_n satisfasse approximativement à la loi de Gauss pour des valeurs de n assez grandes. Supposons en outre que $\text{E. M.}(\alpha_i) = a$ et $\text{E. M.}(\alpha_i - a)^2 = b$, de sorte que $\text{E. M.}(S_n) = na$. On aura dans des cas étendus $\text{E. M.}(S_n - na)^2 = n\Theta b + c$ où Θ et c tendent vers des limites constantes, lorsque $n \to \infty$ (en particulier, $\Theta = 1$, $c = 0$, si les quantités α_i sont indépendantes). Donc

$$\begin{aligned} M_n &= A - na, \\ B_n &= \Theta n b + c + B - 2\psi(n), \end{aligned} \tag{3}$$

où $\psi(n) = \text{E. M.}[\Sigma - A][S_n - na]$ serait nulle, si S_n était indépendant de Σ, mais le plus souvent $\psi(n)$ sera aussi une fonction linéaire de n. Par conséquent, en faisant $n_0 = \frac{A}{a}$, on conclut d'abord de (2) et (3) que n_0 est la médiane de la courbe de distribution des valeurs de n, pour lesquelles x_n s'annulle, et de plus en posant $y = n - n_0$, ou voit que la formule (2) prend dans les cas considérés la forme

$$z = \frac{y}{\sqrt{s + ty}}, \tag{4}$$

où s et t sont des constantes. Un cas particulier très simple auquel s'appliquent les considérations précédentes est celui, où l'on demande le nombre n d'expériences qu'il faut faire pour réaliser A fois un événement qui dans chaque expérience a la probabilité p: on trouve ainsi immédiatement la médiane $n_0 = \frac{A}{p}$ et $s = 2\frac{q}{p^2}A$, $t = 2\frac{q}{p}$.

---

[2]) On trouverait évidemment un résultat analogue, en posant $z(n) = -\frac{M_n + \delta}{\sqrt{2B_n}}$, pour la probabilité que $x_n - \delta$ cesse d'être positif, lorsque n est compris entre n_1 et n_2.

Considérons un autre exemple qui conduit approximativement à formule (4). Soit

$$n = \frac{u}{v},$$

où u et v satisfont à la loi de Gauss en restant en corrélation norma entre eux avec le coefficient de corrélation k. Soit

$$\text{E. M. } u = A, \qquad \text{E. M. } (u-A)^2 = B,$$
$$\text{E. M. } v = a, \qquad \text{E. M. } (v-a)^2 = b.$$

Admettons que $A > 0$, $a > 0$, que $\frac{A}{a}$ est assez grand et de plus que l probabilités que $u < 0$ ou $v < 0$ sont pratiquement négligeables: nou pouvons, par exemple, supposer que $\frac{A}{\sqrt{2B}} = \lambda \geqq 3$, $\frac{a}{\sqrt{2b}} = \mu \geqq 3$. On pourr alors poser $x_n = u - nv$, et la loi des probabilités de n sera fournie p la méthode précédente appliquée à x_n. Ainsi, en posant $y = n - \frac{A}{a}$, on

$$M_n = A - na = -ay$$

$$B_n = B + n^2 b - 2nk\sqrt{Bb} = \frac{A^2}{2\lambda^2} + \frac{A^2}{2\mu^2} - \frac{kA^2}{\lambda\mu} + \left(\frac{Aa}{\mu^2} - \frac{kAa}{\lambda\mu}\right) y + \frac{a^2 y^2}{2\mu^2} + s + ty,$$

en négligeant le terme en y^2, dont le coefficient doit être faible, si o admet que b est petit.

3. Dans la suite nous nous représenterons x_n comme une sorte d'énergi (sur la nature de la quelle nous ne faisons aucune hypothèse spéciale qui est nécessaire pour l'augmentation de la grandeur n ou y, de sort que chez un individu donné y atteint sa valeur fixe, lorsque toute so énergie disponible x_n se trouve épuisée. Cela étant, nous pouvons indique un grand nombre de classes de phénomènes, où les considérations préc dentes seront applicables:

1. La durée de certains phénomènes physiques, chimiques et physi logiques.

2. Le nombre de fruits, feuilles etc. chez des plantes semblables, o d'organes déterminés chez des individus biologiques, en admettant que tou les individus naissants d'une espèce donnée possèdent une certaine energi potentielle satisfaisant à la loi de Gauss nécessaire à la formation de organes considérés, chaque organe absorbant pour sa formation une cer taine quantité de cette energie satisfaisant également à la loi de Gaus

3. Le nombre d'objets semblables produits par des ouvriers travaillan dans les mêmes conditions; la durée de l'usage d'objets déterminés pr

duits par une même fabrique ou de l'amortisation des capitaux dans une ndustrie donnée et d'autres phénomènes économiques analogues.

En abordant ces problèmes, il ne faut pas chercher d'interpoler à tout prix par la formule (4); ce ne sera, en général, que dans une première approximation que cette formule sera valable, et la solution complête du problème consistera à étudier d'une façon aussi précise que possible les fonctions[3]) M_n et B_n. Cependant on pourra très souvent prévoir presque sans calculs l'allure générale des courbes correspondantes.

En effet, il résulte des calculs qui précèdent que la courbe de distribution de n se réduit à la courbe normale de Gauss, si B_n est constant, c'est à dire, lorsque les pertes d'énergie qui correspondent à une augmentation déterminée de n sont rigoureusement *constantes*. Dans le cas contraire, la distribution de n ou de y donnée par la formule (4) présentera une assymétrie mesurée par la valeur de t et l'on constate le fait suivant: *on a une assymétrie droite* (*c'est à dire, un retrecissement de la courbe normale du coté gauche*[4]) *et un allongement à droite*) *pour* $t > 0$, *et une assymétrie gauche pour* $t < 0$. *Le premier cas* (*qui se présente le plus souvent*) *a lieu, lorsque les pertes d'energie sont ou bien indépendentes de l'énergie présente, ou bien sont en corrélation négative quelconque ou en corrélation positive insignifiante avec celle ci. Au contraire, si les pertes d'énergie sont en corrélation positive considérable avec l'énergie initiale, t devient négatif et l'assymétrie change de sens.* (Cela résulte du fait que $t = B_n - B_{n-1}$.)

Cette remarque explique ce fait connu que la plupart des courbes de distribution présentent une assymétrie droite. Les exemples opposés d'assymétrie gauche sont rares; un des plus interessants est celui de la durée de la vie humaine, si l'on fait abstraction des individus qui meurent avant la maturité (14—15 ans). On sait que la courbe de la durée de vie croit lentement jusqu'à 65—70 ans pour s'abaisser brusquement ensuite. D'après ce qui précède, la raison essentielle de ce fait consisterait dans la corrélation positive considérable qui existe entre l'énergie potentielle (sans faire aucune hypothèse sur la nature de cette énergie) d'un homme et l'énergie qu'il dépense quotidiennement. On pourrait conclure de la les conséquences suivantes qu'il serait intéressant de vérifier statistiquement: plus un régime social permet de dépenser à chaque individu son énergie d'une façon régulière conformément à son état physique, d'autant plus la courbe de

[3]) Dans la suite nous verrons qu'on peut toujour supposer M_n linéaire, mais il n'est pas exclu que dans certains cas il soit avantageux de ne pas s'imposer cette restriction.

[4]) Nous indiquerons plus loin, d'une façon plus précise la transformation géométrique correspondante.

durée de vie est assymétrique, — on devrait donc s'attendre à ce que civilisation amène une augmentation d'assymétrie dans la courbe de dur de vie et que l'assymétrie soit moins accentuée chez les classes pauvr que chez les classes riches. (La sélection opérée par les sociétés d'assuran diminue cette assymétrie.)

4. Supposons à présent que $B_n = \frac{1}{2}\varphi(y)$ soit quelconque et admettor que $M_n = n_0 - n = -y$; la dernière condition exprime que l'espéran mathématique de l'énergie x_n diminue de la même quantité, dont n augment Dans ces conditions on pourra donc affirmer que la probabilité l'inégalité $y > y_1$ est égale à

$$(5) \qquad f(y_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{y_1}{\sqrt{\varphi(y_1)}}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz = \frac{1}{2}\left(1 - \Phi\left(\frac{y_1}{\sqrt{\varphi(y_1)}}\right)\right).$$

Nous en concluons que, quelle que soit la distribution statistiqu donnée, elle pourra être repésentée par la formule (5). En d'autres terme chaque loi statistique donnée de distribution sera caractérisée par u *fonction de dispersion* $\varphi(y)$ qu'il est aisé de déterminer en utilisant table des valeurs de la fonction $\Phi(z)$ de Laplace: si $\varphi(y)$ est approx mativement constant, sa valeur représente *le coefficient de dispersion* la distribution normale correspondante. Le cas suivant géométriqueme le plus simple est celui, où $\varphi(y)$ représente une ligne droite; c'est le ca auquel nous avons été amené plus haut. Un autre cas analytique simp qui, comme nous le verrons tout à l'heure, se présente aussi naturellemen est celui où $\varphi(y) = s + ty - ry^2$ avec[5]) $r > 0$. On voit que le ca où $\varphi(y)$ est linéaire correspond à une distribution limitée d'un coté et il mitée de l'autre; par contre, le nouveau cas que nous venons de signal corresqond aux distributions bornées des deux côtés.. D'une façon général on pourra toujours approcher la fonction de dispersion $\varphi(y)$ qui se donnée sur un segment fini, au moyen d'une somme de puissances fra tionnaires inférieures*) à 2 et l'on devra profiter de l'indétermination d exposants pour avoir une approximation aussi bonne que possible avec minimum de termes.

5. Indiquons à présent un type de phénomènes qui conduisent l'expression $\varphi(y) = s + ty - ry^2$; ce cas se présente, lorsque pour d

[5]) On ne peut supposer le coefficient de y^2 positif, l'expression de $\varphi(y)$ resta valable pour *toutes* les valeurs de y, car il faut que z varie de $-\infty$ à $+\infty$, lorsq y croit en parcourant toute la courbe de distribution; cependant le cas de $r <$ assez petit, pourra également se présenter en pratique (voir la fin du § 2).

*) Voir mon Mémoire „Sur l'ordre de la meilleure approximation." p. (Mémoires publiés par l'Académie de Belgique, 1912.)

aleurs de n assez grandes ($n > N$), x_n se réduit à un nombre fixe M, de orte que B_n finit par être identiquement nul. Examinons, le cas, où énergie initiale est une constante $\Sigma = A$, et supposons que, pour $n > N$,

$$S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = L \geqq A \tag{6}$$

de sorte que $\alpha_n = 0$, pour $n > N$).

Admettons de plus que la dépendance entre les nombres α soit limitée la seule relation (6). Soit $\text{E.M.}(\alpha_k) = a$, $\text{E.M.}(\alpha_k - a)^2 = b$ (pour $\leqq N$); on a donc $L = Na$, et d'une façon générale, lorsqu'on sait que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_h = S_h,$$

'espérance mathématique de chaque α_k ($h < k \leqq N$) devient égale à

$$\frac{L - S_h}{N - h}.$$

Cela étant, on a pour déterminer

$$B_n = \text{E.M.}(S_n - na)^2$$

a relation de récurence

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= B_n + b + 2\,\text{E.M.}(S_n - na)(\alpha_{n+1} - a) \\ &= B_n + b + 2\,\text{E.M.}\left(S_n \frac{L - S_n}{N - n}\right) - 2na^2 \\ &= B_n + b + \frac{2naL}{N-n} - 2\frac{B_n + n^2a^2}{N-n} - 2na^2 = \frac{N-n-2}{N-n} B_n + b. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$B_n = \frac{n(N-n)b}{N-1}; \tag{7}$$

l'autre part, on a, évidemment, $M_n = A - na$. Donc, finalement, en posant $y = n - \frac{A}{a}$, la probabilité de l'inégalité

$$y_1 < y < y_2$$

est égale à

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{y_1}{\sqrt{\varphi(y_1)}}}^{\frac{y_2}{\sqrt{\varphi(y_2)}}} e^{-t^2}\,dt, \tag{8}$$

où $\varphi(y) = s + ty - ry^2$ avec

$$s = \frac{bA}{(N-1)a^2}\left(N - \frac{A}{a}\right), \quad t = \frac{b}{(N-1)a^2}\left(N - \frac{2A}{a}\right), \quad r = \frac{b}{(N-1)a^2}. \tag{9}$$

Supposons, par exemple, qu'on effectue n tirages d'une urne contenant pN boules blanches et qN boules noires ($p + q = 1$), sans remettre la

boule enlevée; il s'agit de former la courbe de distribution du nomb de tirages n qu'il faut effectuer pour obtenir $A = hN$ boules blanch ($h < p$). En remarquant que pour N assez grand, le nombre m de boul blanches tirées pendant n tirages[6]) satisfait approximativement à la l de Gauss, on en conclut que les considérations qu'on vient de développ s'appliquent actuellement. Indiquons un exemble numérique qui mont qu'on peut trouver une approximation très satisfaisante au moyen de formule (8) même dans le cas où N n'est pas très grand, seulement a lieu de prendre les valeurs s, t, r qui résulteraient de l'application direc des formules théoriques (9), qui supposent l'exactitude rigoureuse de loi de Gauss, il faut simplement employer une méthode (dont no parlerons plus loin) de calcul de ces constantes pour approcher autant q possible la courbe statistique correspondante. En effet, le probabilité que la dernière $hN^{\text{ème}}$ boule blanche sera tirée pendant le $n^{\text{ème}}$ tirage e donnée par la formule rigoureuse

$$P_n = P_{hN} \frac{hN(hN+1)\dots(hN+\alpha-1)\,qN(qN-1)\dots(qN-\alpha+1)}{\alpha!\,(N-hN)\,(N-hN-1)\dots(N-hN-\alpha+1)},$$

où $\alpha = n - Nh$, $P_{hN} = \frac{pN!\,(N-hN)!}{N!\,(pN-hN)!}$.

Ainsi, en posant $N = 16$, $p = \frac{1}{2}$, $A = hN = 3$, on a dans la second ligne du tableau suivant $1000\,P_n$, à une unité près,

$n =$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$1000\,P_n =$	100	183	217	196	147	91	45	17	4
$1000\,P_n' =$	88	177	222	204	143	88	42	17	5

et dans la troisième ligne on a les valeurs de $1000\,P_n'$ correspondantes la formule[7]) (8), où

$$\varphi(y) = 6{,}46 + 0{,}68\,y - 0{,}07\,y^2.$$

Seulement avec notre formule nous avons encore $1000\,P_n' = 13$, pour somme de toutes les valeurs de $n < 3$, et $1000\,P_n' = 1$, pour $n > 11$, sorte que, comme on devait s'y attendre, aux extrémités la concordan est insuffisante, à moins qu'on ne différentie pas les classes de $n = 3$ $n < 3$ d'une part, et celles de $n = 11$ et $n > 11$ de l'autre.

6. Les courbes qui correspondent aux cas de $\varphi(y)$ linéaire ou d second degrè se déduisent de la courbe normale par des transformatio géométriques simples qu'il importe de signaler. Remarquons d'abord qu

[6]) Pourvu qu'on ait $\lambda < \frac{n}{N} < 1 - \lambda$, λ étant un nombre fixe différent de 0.

[7]) La médiane correspond rigoureusement à $5\frac{1}{4}$.

y et $-y'$ (points *correspondants*) représentent les limites de l'écart de médiane également probables à droite et à gauche, respectivement, on a

0) $$\frac{y}{\sqrt{s+ty-ry^2}} = \frac{y'}{\sqrt{s-ty'-ry'^2}};$$

où

1) $$\frac{1}{y'} - \frac{1}{y} = \frac{t}{s}.$$

a relation (11) montre que *les points* (qui sont équidistants dans la ourbe symétrique) *correspondants à des écarts également probables à auche et à droite sont harmoniques par rapport au segment ayant pour trémités* 0 (*la médiane*) *et* $-\frac{2s}{t}$.

Soient d'autre part $\pm Y$ les deux écarts qui auraient les mêmes probabilités que y et $-y'$, si t et r étant nuls, s restait invariable; on devra galer alors (10) à $\pm \frac{Y}{\sqrt{\quad}}$, d'ou on tire facilement

2) $$\frac{1}{yy'} - \frac{1}{Y^2} = \frac{r}{s}.$$

ette relation exprime que, pour $r = 0$, $yy' = Y^2$, ce qu'on peut repréenter géométriquement, en disant que les points $-y'y$ et Y^2 sont ymétriques; au contraire, si $r > 0$, ces deux nouveaux points donnent ne nouvelle assymétrie qui consiste en ce que ces deux points sont harmoniques par rapport au segment $\left(0, -\frac{2s}{r}\right)$. Sans insister sur les conructions géométriques qui transforment d'après ce qui précède la courbe ormale en nos courbes de distribution[8]), notons encore une conséquence e l'égalité (11). Soient $f(y)$ et $f(-y')$ les ordonnées de notre courbe ui correspondent aux écarts droits et gauches également probables; on oit avoir

$$f(y)\,dy = f(-y')\,dy';$$

ais, d'autre part, en différentiant (11), nous avons

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dy'}{y'^2}.$$

ar conséquent

3) $$y^2 f(y) = y'^2 f(-y').$$

En d'autres termes, *les ordonnées des points correspondants de notre ourbe de distribution sont inversement proportionnelles aux carrés de urs abscisses.*

---

[8]) Remarquons, en passant, que pour $r > \frac{1}{2}$ et $t = 0$ la courbe de distribution ra symmétrique et présentera 2 sommets.

7. Pour le calcul approché de nos courbes théoriques on peut emploj diverses méthodes. La méthode la plus naturelle est la méthode direc Elle consiste à noter d'après les données statistiques les points de la cour de dispersion $\varphi(y)$, comme nous l'avons indiqué au § 4, correspond aux différentes classes plus au moins larges de la distribution. On cherch à approcher cet ensemble de points, soit au moyen d'une ligne droi soit au moyen d'une parabole etc. La détermination graphique de droite qui s'écarte le moins possible d'un ensemble de points est particuliè ment simple: on construit le plus petit polygone convexe contenant points de l'ensemble; le segment parallèle à l'axe des ordonnées int cepté par ce contour convexe aura un maximum unique AB; la dro cherchée passera par le milieu de AB parallélement à la direction commu des tangentes au contour en A et en B (cette direction ne serait indét minée que dans le cas, où A et B sont des sommets; mais cette circo stance ne peut se présenter, si le polygone est obtenu par le procé indiqué plus haut, puisque deux sommets ne peuvent pas avoir la mê abscisse). On peut aussi appliquer le méthode des moindres carrés so une forme convenable.

Je ne crois pas que la méthode des moments qui est généraleme adoptée soit toujours préférable à celle que nous venons d'indiquer: si nombre de classes est petit et surtout si le nombre d'individus dans une cla extrême est considérable, le remplacement des intégrales par des somm conduit à des erreurs qui sont plus importantes que celle qu'on fait da le calcul de la médiane. La seconde méthode qu'on peut appe méthode mixte est pratiquement la plus simple. On commence par dét miner la médiane, et ensuite après l'avoir prise comme origine, on d termine les coefficients s, t, r par la méthode des moments. Considér d'abord le cas, où $r = 0$; donc

$$z = \frac{y}{\sqrt{s + ty}}. \tag{4}$$

Par conséquent, en résolvant cette équation par rapport à y on trou la solution unique admissible

$$y = \frac{z}{2}\left[tz + \sqrt{4s + t^2 z^2}\right].$$

Donc

$$a = \text{E. M. } y = \text{E. M. } \frac{tz^2}{2} = \frac{t}{4}. \tag{14}$$

De même,

$$b = \text{E. M. } y^2 = \text{E. M. } \left[\frac{t^2 z^4}{4} + \frac{z^2}{4}(4s + t^2 z^2)\right] = \frac{3}{8}t^2 + \frac{s}{2}. \tag{15}$$

Ainsi en calculant les moments du premier et second ordre on aura uccessivement t et s.

La formule (14) exprime que la distance entre la moyenne et la édiane est égale à $\frac{t}{4}$.

On vérifie sans peine que la *mode* μ (c'est à dire l'abscisse du sommet e notre courbe) satisfait à l'équation cubique

$$t(s+ty)(4s+ty)+2y(2s+ty)^2=0,$$

'où $\left(\text{en négligeant les puissances supérieures de } \frac{t^2}{s}\right)$ on tire la valeur pprochée

16) $$\mu=-\frac{t}{2}\left(1-\frac{1}{8}\frac{t^2}{s}\right).$$

Il résulte de (16) que pour $\frac{t^2}{s}$ assez petit $\left(<\frac{1}{2}, \text{ par exemple}\right)$, la ègle de M. Pearson, d'après la quelle la médiane se trouve entre la ıode et la moyenne à une distance de la première 2 fois plus grande qu'à seconde, est fort bien vérifiée.

On peut, enfin, employer la méthode des moments, communément sitée. Il faudra seulement avoir recours au troisième moment qui permettra avec les deux premiers de déterminer la troisième inconnue qu'est position de le médiane.

On a

17) $$c=\text{E. M. } y^3=\text{E. M.}\left[\frac{t^3}{2}z^6+\frac{3}{2}stz^4\right]=\frac{15}{16}t^3+\frac{9}{8}st.$$

ar conséquent, en prenant pour origine la moyenne au lieu de la médiane, s nouvelles abscisses x sont liées aux anciennes y par la relation l'après (14))

$$x=y-\frac{t}{4}$$

de (15) et (17) nous tirons successivement

$$\beta=\text{E. M. } x^2=b-\frac{t^2}{16}=\frac{5}{16}t^2+\frac{s}{2},$$

$$\gamma=\text{E. M. } x^3=c-\frac{3}{4}tb+\frac{t^3}{32}=\frac{11}{16}t^3+\frac{3}{4}st.$$

n éliminant s des deux dernières formules, nous ramenons la détermination de tous les éléments inconnus à la résolution de l'équation du 3me degré

18) $$7t^3+48\beta t-32\gamma=0.$$

Dans le cas, où $r > 0$, les calculs deviennent moins simples, et nous nou bornerons, à lui appliquer la méthode mixte, en supposant, par conséquen la médiane déterminée directement. Il nous suffira donc de connaîtr les 3 premiers moments seulement.

Or de l'équation

$$z = \frac{y}{\sqrt{s + ty - ry^2}}$$

nous tirons

$$y^2(z^2 r + 1) - z^2(ty + s) = 0,$$

d'où

$$y = \frac{z\left(tz + \sqrt{4s + z^2(t^2 + 4sr)}\right)}{2(rz^2 + 1)}.$$

Donc,

$$a = \text{E. M. } y = \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2 e^{-z^2}}{z^2 r + 1}\, dz = \frac{t}{2} I(r),$$

et d'une façon analogue, en désignant par $I'(r)$ et $I''(r)$ les dérivé première et seconde de $I(r)$ respectivement, on obtient

$$b = \text{E. M. } y^2 = s I(r) - \frac{t^2}{2} I'(r),$$

$$c = \text{E. M. } y^3 = \frac{t^3}{4} I''(r) - \frac{3}{2} st I'(r).$$

En éliminant s et t de ces trois équations, on ramène le problème à résolution de l'équation transcendante

$$c = 2a^3 \frac{I''(r)}{I^3(r)} - 3a \frac{b I^2(r) + 2a^2 I'(r)}{I^4(r)} I'(r). \tag{19}$$

Les valeurs de r étant, en général, assez petites, on peut négliger puissance de r et remplacer l'équation (19) par l'équation approch linéaire qui en résulte. Le n'insterai pas ici sur ces détails, en remarqua seulement que le calcul du 4me moment permettrait d'éliminer $I(r)$, tenant compte de l'identité

$$I'(r) = \frac{1}{2r^2} - I(r)\left[\frac{1}{r^2} + \frac{3}{2r}\right],$$

et de remplacer l'équation (19) par une équation algébrique.

Avant de terminer j'indiquerai un exemple. J'emprunte les donn statistiques du livre[9]) „Les courbes de distribution et leur interpôlat par les méthodes de Pearson et Bruns“ du Prof. Lachtin (Moscou, 192

[9]) Page 115.

On a compté le nombre de fleurs qui se trouvent sur chacune des 158 tiges de muguet qu'on a cueuillies dans un même endroit près de Moscou. Les deux dernières colonnes du présent tableau sont empruntées

Nombre de fleurs n sur une tige	Valeur de z d'après (21)	Nombre théorique de tiges d'après (21)	Nombre effectif observé	Nombre théorique d'après la formule de Pearson (20)
I	II	III	IV	V
	$-3{,}537$			
3	$-2{,}209$	1,05	3	1,99
4	$-1{,}213$	48,9	46	49,95
5	$-0{,}4115$	274,6	270	268,90
6	0,2627	422,0	430	426,07
7	0,8476	278,0	280	278,67
8	1,3665	102,5	96	100,87
9	1,840	25,5	27	25,21
10	2,262	4,6	5	5,07
11	2,657	0,7	1	0,91
		1157,85	1158	1157,64

au livre cité; en particulier, la dernière colonne correspond à la courbe de la 4me classe de Pearson donnée par la formule

$$y_0 \frac{e^{\nu \operatorname{arctg} \frac{x-l}{\delta}}}{\left[1+\left(\frac{x-l}{\delta}\right)^2\right]^m}, \tag{20}$$

où $y_0 = 0{,}0021397$, $\nu = 31{,}1756$, $l = 1{,}94924$, $\delta = 4{,}58207$, $m = 17{,}8871$. Les colonnes II et III ont été calculées d'après la formule

$$P_{x_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2} dz, \quad \text{où} \quad z_1 = \frac{x_0 - 6{,}592}{\sqrt{0{,}346\, x_0 - 0{,}0076}}, \quad z_2 = \frac{x_0 - 5{,}592}{\sqrt{0{,}346\, x_0 + 0{,}3384}}, \tag{21}$$

en désignant par P_{x_0} la probabilité qu'une tige admette $n = x_0$ fleurs, c'est à dire qu'on ait $x_0 - \frac{1}{2} < n < x_0 + \frac{1}{2}$. Les paramètres de la formule (21) sont obtenus par la méthode des moments; ainsi on obtient la moyenne $M = 6{,}179$ et les moments: du second ordre $\beta = 1{,}174$ et du troisième ordre $\gamma = 0{,}6179$. En résolvant ensuite l'équation (18)

$$7t^3 + 56{,}352\, t - 19{,}7728 = 0,$$

on a trouvé $t = 0{,}346$; donc, d'après (14), la médiane est $M - \frac{t}{4} = 6{,}092$, et d'après (15), $s = 2{,}2732$. Il y a lieu de noter que la courbe de Pearson possède un paramètre de plus que la notre.

(Eingegangen am 3. November 1924.)

Bedingt konvergente Reihen.

Von

W. Threlfall in Dresden.

Vor langer Zeit hatte ich unabhängig den Satz bewiesen, dessen erste gedruckter Beweis (im Rahmen allgemeinerer Untersuchungen) von Herr Steinitz[1]) herrührt:

Ist $\sum_1^\infty c_\nu$ *bedingt konvergent, so gibt es eine konvergente Umordnun*

$$\sum_1^\infty c_{\lambda_\nu} + \sum_1^\infty c_\nu .$$

Einen anderen Beweis hat dann Groß[2]) veröffentlicht; da meine noch kürzer ist, so teile ich ihn hier mit, einer Anregung von Herr Landau folgend.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei

$$\sum_1^\infty c_\nu = 0 . \tag{1}$$

Erster Fall. Es gibt ein reelles φ, so daß

$$\sum_1^\infty \Re(e^{\varphi i} c_\nu) \tag{2}$$

absolut konvergiert. Dann ist

$$\sum_1^\infty \Im(e^{\varphi i} c_\nu)$$

bedingt konvergent, also bei passender Umordnung

$$\sum_1^\infty \Im(e^{\varphi i} c_{\lambda_\nu}) = 1 ,$$

$$\sum_1^\infty e^{\varphi i} c_{\lambda_\nu} = i .$$

---

[1]) *Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme.* Journal für die reine u angewandte Mathematik **143** (1913), S. 128–175; **144** (1914), S. 1–40; **146** (191 S. 1–52; vgl. insb. **144**, S. 40, wo auf die schriftliche Mitteilung meines Beweises h gewiesen ist.

[2]) *Bedingt konvergente Reihen.* Monatshefte für Mathematik und Physik **28** (191 S. 221–237.

Zweiter Fall. Für jedes reelle φ sei (2) bedingt konvergent. Dann ist speziell

$$\sum_1^\infty \Re(c_\nu)$$

bedingt konvergent, also die Summe der positiven unter diesen Gliedern zu ∞ divergent. Ich halbiere die rechte Halbebene durch die positive Abszissenachse, die zu beiden Hälften zähle. Für mindestens eine dieser Viertelebenen ist $\Sigma \Re(c)$ zu $+\infty$ divergent. Und so fort (stets Halbierung des Winkels). So ergibt sich die Existenz eines reellen φ_0 derart, daß es zu jedem δ mit $0 < \delta \leqq \frac{\pi}{4}$ eine wachsende Indexfolge $h_1(\delta), h_2(\delta), \ldots$ gibt mit

$$\varphi_0 - \delta < \arc c_{h_\nu(\delta)} < \varphi_0 + \delta, \tag{3}$$

$$\left|\sum_1^n c_{h_\nu(\delta)}\right| \to \infty. \tag{4}$$

Da keine Richtung bevorzugt ist, sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\varphi_0 = 0$. Dann folgt aus (3), (4)

$$|c_{h_\nu(\delta)}| \leqq \Re c_{h_\nu(\delta)} + |\Im c_{h_\nu(\delta)}| \leqq 2\,\Re c_{h_\nu(\delta)},$$

$$\sum_1^n \Re c_{h_\nu(\delta)} \to \infty. \tag{5}$$

Ich setze $\delta_m = \frac{\pi}{4m}$ für $m = 1, 2, \ldots$. Zuerst nehme ich von Anfang an so viele $h_\nu(\delta_1)$, daß

$$\Sigma \Re c > 1.$$

(Das geht nach (5).) Dann, hinter dem letztbenutzten $h_\nu(\delta_1)$ beginnend, so viele $h_\nu(\delta_2)$, daß die über sie erstreckte

$$\Sigma \Re c > 1,$$

usf. Bei der ausgewählten Gesamtfolge $l_1, l_2, \ldots$ ist also, $c_{l_\nu} = q_\nu$ gesetzt,

$$|\arc q_\nu| < 1, \tag{6}$$

$$\arc q_\nu \to 0, \tag{7}$$

$$\sum_1^n \Re q_\nu \to \infty. \tag{8}$$

Wegen (1) und (8) bleiben unendlich viele c_ν übrig; diese seien in ihrer alten Reihenfolge mit $p_1, p_2, \ldots$ bezeichnet. $\varphi(n)$ sei die Anzahl der q_ν, welche vor p_n standen. Dann ist $\varphi(n) \geqq 0$, nicht fallend und strebt gegen ∞. Aus (1) folgt

$$\sum_1^n p_\nu + \sum_1^{\varphi(n)} q_\nu \to 0. \tag{9}$$

Ich betrachte nun die folgende Anordnung. Die p_ν behalten unter einander die alte Reihenfolge, die q_ν auch. Aber jetzt sind die q_ν so ver teilt, daß $\chi(n)$ von ihnen vor p_n stehen, wo $\chi(n)$ dadurch definiert ist daß zuerst

$$\sum_{\varphi(n)+1}^{\chi(n)} \Re q_\nu > 1.$$

Das geht nach (8); $\chi(n)$ fällt mit wachsendem n nicht, da nach (6 jedes $\Re q_\nu \geqq 0$ ist. Wegen $q_\nu \to 0$ ist

$$\sum_{\varphi(n)+1}^{\chi(n)} \Re q_\nu \to 1; \tag{10}$$

wegen (7) ist bei gegebenem $\delta > 0$ zuletzt

$$|q_\nu - \Re q_\nu| \leqq \delta \Re q_\nu;$$

also ist nach (10)

$$\sum_{\varphi(n)+1}^{\chi(n)} q_\nu \to 1,$$

folglich nach (9)

$$\sum_{1}^{n} p_\nu + \sum_{1}^{\chi(n)} q_\nu \to 1. \tag{11}$$

In der neuen Gesamtanordnung $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ist für $k > \chi(1)$ b passenden $n(k) \geqq 1$, $s(k)$ auf $\chi(n) \leqq s \leqq \chi(n+1)$

$$\sum_{1}^{k} c_{\lambda_\nu} = \sum_{1}^{n} p_\nu + \sum_{1}^{\chi(n)} q_\nu + \sum_{\chi(n)+1}^{s} q_\nu.$$

Hierin ist bei $k \to \infty$ nach (6) und (11)

$$\left|\sum_{\chi(n)+1}^{s} q_\nu\right| \leqq \sum_{\chi(n)+1}^{\chi(n+1)} |q_\nu| \leqq 2\Re \sum_{\chi(n)+1}^{\chi(n+1)} q_\nu \to 0,$$

also nach (11)

$$\sum_{1}^{s} c_{\lambda_\nu} \to 1.$$

Dresden, im Dezember 1924.

(Eingegangen am 6. Dezember 1924.)

Über Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen Satzes.

Von

Alexander Ostrowski in Göttingen.

Inhaltsübersicht.

		Seite
	Einleitung	215
I. Kap.	Normale Scharen meromorpher Funktionen . . .	224
§ 1.	Gleichmäßige Konvergenz von Folgen meromorpher Funktionen (Hilfssatz 1)	224
§ 2.	Normale Scharen meromorpher Funktionen (Satz 1) . .	227
§ 3.	Charakterisierung normaler Funktionenscharen auf der Riemannschen Kugel (Satz 2)	231
§ 4.	Quantitative Charakterisierung normaler Funktionenscharen in der Gaußschen Zahlenebene	237
II. Kap.	Juliasche Folgen und Ausnahmefunktionen . . .	241
§ 1.	Orientierende Sätze (Sätze 3 und 4)	241
§ 2.	Ein Hilfssatz (Hilfssatz 2)	243
§ 3.	Eigenschaften der Nullstellen und Pole der Juliaschen Ausnahmefunktionen	245
§ 4.	Die Darstellbarkeit Juliascher Ausnahmefunktionen als Quotienten kanonischer Produkte	249
§ 5.	Nachweis der Ausnahmeeigenschaft von Quotienten kanonischer Produkte als Folge von a), b), c), d)	252
§ 6.	Eine graphische Deutung der Bedingungen a), b), c), d)	255
§ 7.	Der Hauptsatz (Satz 5)	256

Einleitung.

In dem Ideenkreis des Picardschen Satzes verdankt man einigen vor etwa fünf Jahren erschienenen Arbeiten von Herrn G. Julia[1])

[1]) Vgl. zahlreiche Noten in den C. R. **168** (1919) und eine Note in **170** (1920) der C. R., ferner die zusammenfassenden Arbeiten in den Ann. de l'Éc. Norm. (3) **36** (1919); (3) **37** (1920), endlich die Darstellung im Buche: G. Julia, Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé, Paris 1924 (Collection Borel) (wird später mit Julia, Leç. zitiert).

besonders schöne und überraschende Fortschritte. Während vor diese Arbeiten die auf die Weiterbildung der Picardschen Fragestellung gerich teten Bemühungen vor allem der Abschätzung der *Anzahlen* von a-Stelle einer vorgegebenen Funktion bzw. verschiedener mit diesen Anzahlen zu sammenhängender Konstanten und Mittelwerte galten, liefern die Sätz von Herrn Julia wesentliche Aufschlüsse über die *Verteilung der a-Stelle selbst.* Es handelt sich vor allem um zwei Fragestellungen.

Erstens sei $z = \sigma(t)$ eine für $1 \leqq t < \infty$ von $z = 1$ aus ins Unendlich laufende stetige Kurve (σ), $f(z)$ eine für $R \leqq |z| < \infty$ meromorphe analy tische Funktion. Herr Julia zeigt nun unter gewissen Annahmen, da es unter den aus (σ) durch die Drehung um den Nullpunkt hervorgehen den Kurven $z = e^{\theta i}\sigma(t)$ eine gibt (etwa für θ_0) derart, daß wenn man de Mittelpunkt eines Kreises mit beliebig kleinem Radius längs dieser Kurv gleiten und dabei den Radius proportional zum Abstand vom Nullpunk wachsen läßt, im dabei überstrichenen Gebiet: $|z - e^{\theta_0 i}\sigma(t)| \leqq \varrho\,|\sigma(t)|$ di Funktion $f(z)$ alle Werte annimmt, höchstens bis auf zwei Werte. Diese Verhalten folgert Herr Julia daraus, daß die Funktionenschar $f(z\sigma(t)) = f_t(z)$ wie man nach Herrn P. Montel sagt, (für $0 < |z| < \infty$) *nicht normal* ist daß es nämlich einen von 0 und ∞ verschiedenen Punkt z_0 der Ebene gibt so daß für jeden noch so kleinen Kreis um z_0 nicht in jeder unendliche Folge der Funktionen $f_t(z)$ mit ins Unendliche wachsendem t eine in diesen Kreis gleichmäßig konvergente Teilfolge enthalten ist[2]). Wir nennen ein solche Kurve $z = \sigma(t)$, für die die Funktionenschar $f_t(z)$ für $0 < |z| < \infty$ nicht normal ist, eine *Juliasche Kurve* (*J-Kurve*) *für* $f(z)$. Diese ganz Begriffsbildung baut sich allerdings erst auf der Carathéodory-Landau schen Präzisierung des Begriffs gleichmäßiger Konvergenz für meromorph Funktionen auf. (Wir gehen hierauf sowie auf alle andern Begriffsbildungen die wir hier erwähnen, im ersten Kapitel dieser Abhandlung ausführlich ein.

Herr Julia beweist nun, daß für Funktionen $f(z)$, die wenigstens eine Wert auslassen (insbesondere für $\infty > |z| \geqq R$ regulär sind) jede σ-Kurv eine J-Kurve ist, allgemeiner sogar dann, wenn $f(z)$ einen *asymptotische* Wert hat (d. h. wenn es eine σ-Kurve gibt, auf der der Wert von $f(z$ gegen eine Konstante konvergiert). Andererseits hat Herr Julia an Bei spielen gezeigt, daß es Funktionen ohne J-Kurven gibt. —

Zweitens betrachtet Herr Julia eine beliebige ins Unendliche kon vergierende Folge komplexer Zahlen σ_ν und fragt, wann die Funktionen folge $f(\sigma_\nu z) = f_\nu(z)$ nicht für $0 < |z| < \infty$ normal ist. Dann gibt e

[2]) Streng genommen ordnet sich das Verhalten der Funktionenschar $f(z\sigma(t$ nicht direkt dem Montelschen Begriff des nicht normalen Charakters unter. Genauer Formulierungen geben wir im § 1 des zweiten Kapitels.

ämlich Punkte z_0 $(0 < |z_0| < \infty)$ derart, daß die Folge $f_\nu(z)$ in keiner Umgebung von z_0 normal ist („im Punkte z_0 nicht normal ist"), woraus ich schließen läßt, daß, wenn Ω ein beliebig kleiner Kreis um den Punkt $=1$ ist, $f(z)$ in der Gesamtheit der Kreise $z_0 \Omega \sigma_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ alle Werte annimmt, höchstens bis auf zwei Werte. Eine solche Folge bezeichnen wir als eine *Juliasche Folge* (*J-Folge*) *für* $f(z)$ und einen Punkt $(z_0 \neq 0, z_0 \neq \infty)$, in dessen beliebig kleiner Umgebung die Folge $f_\nu(z)$ nicht normal ist, als einen *J-Punkt von* (σ_ν) *für* $f(z)$, die Menge der J-Punkte als die *J-Menge von* (σ_ν) *für* $f(z)$.

Was die Bedingungen für das Auftreten von J-Folgen anbetrifft, so lautet das allgemeinste in dieser Richtung gefundene Resultat von Herrn Julia, daß solche Folgen stets auftreten, wenn $f(z)$ wenigstens einen asymptotischen Wert besitzt, und daß dann sogar jede Folge σ^n $(|\sigma| > 1, n = 1, 2, \ldots)$ eine J-Folge ist.

Die erste Aufgabe, die man sich bei systematischer Untersuchung dieser Fragestellungen stellen wird, ist nun natürlich die Bestimmung notwendiger und hinreichender Bedingungen für die Existenz von J-Kurven und J-Folgen. Wir zeigen zuerst, daß die Frage nach der Existenz der J-Kurven von der besonderen Gestalt der σ-Kurven unabhängig ist und sich auf die Frage nach der Existenz von J-Folgen zurückführen läßt. Es ist nämlich für die Existenz einer J-Kurve die Existenz wenigstens einer J-Folge notwendig und hinreichend, und wenn es wenigstens eine J-Folge gibt, ist jede σ-Kurve eine J-Kurve (Satz 3). Damit reduziert sich die Frage darauf, alle Funktionen aufzustellen, die keine J-Folgen haben. Man kann sie etwas ungenau als solche Funktionen $f(z)$ charakterisieren, für die $f(tz) = f_t(z)$ eine für $0 < |z| < \infty$ normale Funktionenschar darstellt. Wir werden solche Funktionen als *Juliasche Ausnahmefunktionen* bezeichnen.

— Übrigens könnte man sich bei dieser Untersuchung an sich durchaus auf σ-Folgen von der Form σ^n beschränken. Man kann nämlich zeigen, daß, wenn $f(z)$ auch nur eine J-Folge hat, dann jede Folge σ^n $(n = 1, 2, \ldots)$ mit $|\sigma| > 1$ eine J-Folge von $f(z)$ ist. Dies folgt aus der folgenden Tatsache: Ist σ_ν eine J-Folge von $f(z)$, $\varkappa_\nu$ eine beliebige Folge komplexer Zahlen, deren absolute Beträge zwischen festen von ν unabhängigen positiven Schranken liegen, so ist auch die Folge $\sigma_\nu \varkappa_\nu$ eine J-Folge für $f(z)$ (Satz 4). Das Interesse dieses Satzes besteht vor allem darin, daß er zeigt, wie wenig „arithmetischer" Natur die Bedingungen für eine J-Folge sind; die Eigenschaft einer σ_ν-Folge, eine J-Folge zu sein, hängt nach ihm nur von den absoluten Beträgen der σ_ν, ja sogar nur von dem asymptotischen Verhalten dieser absoluten Beträge ab. Es ist indessen günstiger, die σ_ν-Folgen nicht in der speziellen Form (σ^n) anzunehmen,

sondern bei weiteren Untersuchungen gerade von der durch den Satz gegebenen Bewegungsfreiheit Gebrauch zu machen. —

Es ist mir nun gelungen, alle Juliaschen Ausnahmefunktionen bestimmen. Es zeigt sich, daß es sich dabei um eine durch eine Rei von Eigenschaften ausgezeichnete Funktionenklasse handelt, so daß „i allgemeinen" jede Funktion $f(z)$ sowohl J-Kurven als auch J-Folgen ha Es ergibt sich (wir geben hier das Resultat der Einfachheit halber n für in der ganzen Ebene meromorphe Funktionen an, vollständig wird im Satz 5 formuliert), daß eine Juliasche Ausnahmefunktion $f(z)$ e Quotient von zwei ganzen Funktionen der Ordnung 0 ist: $dz^p \frac{\Pi\left(1-\frac{z}{a_\nu}\right.}{\Pi\left(1-\frac{z}{b_\mu}\right.}$

Dabei genügen die Nullstellen des Zählers und des Nenners den Bedi gungen: In jedem Kreisring von fester relativer Breite q: $r < |z| <$ liegt eine gleichmäßig in r beschränkte Anzahl dieser Nullstellen und Pol ferner ist die Differenz zwischen der Anzahl der Nullstellen und derjenigen d Pole in einem beliebig großen Kreis $|z| \leqq r$ in r ihrem absoluten Betra nach gleichmäßig beschränkt; sodann muß für eine geeignete positive Ko stante c allgemein $\left|\frac{a_\mu}{b_\nu} - 1\right| > c$ sein. Auf Grund dieser drei Bedingung lassen sich nun die Nullstellen und Pole einer Juliaschen Ausnahm funktion sukzessive in der Reihenfolge der absoluten Beträge wählen, wo man nur noch die folgende vierte Bedingung zu berücksichtigen hat: rechnet man den Ausdruck $\mathfrak{M}(r) = r^p \frac{\prod\limits_{|a_\nu| \leqq r} \left(\frac{r}{|a_\nu|}\right)}{\prod\limits_{|b_\nu| \leqq r} \left(\frac{r}{|b_\nu|}\right)}$ für die absolut Beträge der Nullstellen $r = |a_\mu|$ bzw. der Pole $r = |b_\mu|$, so dürfen, bald dieser Ausdruck größer als eine für $f(z)$ feste Konstante c_1 geword ist, nur Pole hinzukommen, bis $\mathfrak{M}(r) \leqq c_1$ wird. Und solange $\mathfrak{M}$ kleiner als eine für $f(z)$ feste Konstante c_2 ist, dürfen nur Nullstell hinzukommen, bis $\mathfrak{M}(r) \geqq c_2$ wird. Diese vier übrigens nicht ganz u abhängigen Bedingungen, die offenbar zur Konstruktion aller in der ganz Ebene meromorphen Juliaschen Ausnahmefunktionen ausreichen, stell nun notwendige und hinreichende Bedingungen für den Juliaschen A nahmecharakter einer meromorphen Funktion.

Dieser Bestimmung der Juliaschen Ausnahmefunktion ist im wese lichen das zweite Kapitel der vorliegenden Abhandlung gewidmet. wichtigste dabei (auf dem von uns eingeschlagenen Wege) zu überw dende Schwierigkeit besteht darin, daß man auf die Eigenschaften Nullstellen und Polen schließen muß, noch bevor man beweisen ka

aß der Exponentialfaktor eine Konstante ist. Diese Schwierigkeit wird un mit Hilfe der Jensenschen Formel überwunden, die eine direkte erechnung des Ausdrucks $\mathfrak{M}(r)$ sozusagen „über den Kopf des Expo-entialfaktors hinweg" gestattet[3]).

Vor allem aber können wir uns auf eine Analyse des Begriffs der ormalen Funktionenscharen stützen, die gerade in dem Punkte die heorie weiter vertieft, in dem die Untersuchungen von Herrn Julia ngreifen. Wenn nämlich $\mathfrak{F}$ eine in einem Gebiet[4]) G nicht normale char meromorpher Funktionen ist, gibt es, wie Herr Julia durch die nwendung des Borelschen Überdeckungssatzes zeigt, einen Punkt P in G wir nennen solche Punkte Juliasche Punkte (J-Punkte) von $\mathfrak{F}$), in em $\mathfrak{F}$ nicht normal ist. Dann gehört zu jeder Umgebung $\mathfrak{U}$ von P ne Teilfolge aus $\mathfrak{F}$, die keine in $\mathfrak{U}$ gleichmäßig konvergente Unterfolge esitzt, aber von $\mathfrak{U}$ abhängen kann. Wir stellen nun die Frage, wann in eine feste Teilfolge f_ν existiert, die in *keiner* Umgebung $\mathfrak{U}$ von P leichmäßig konvergente Teilfolgen enthält. Bezeichnet man solche unkte P als *Ausnahmepunkte von* $\mathfrak{F}$, so zeigt zuerst entweder die Wieder-olung der Juliaschen Schlußweise oder eine direkte Überlegung auf rund der sukzessiven Unterteilung des Gebietes G, daß in G stets we-igstens ein Ausnahmepunkt existiert, daß daher in jeder Umgebung eines -Punktes von $\mathfrak{F}$ wenigstens ein Ausnahmepunkt liegt. Danach besteht ie Menge der J-Punkte aus der Menge der Ausnahmepunkte und der lenge ihrer Häufungsstellen. Sodann beweisen wir aber, daß die Menge er Ausnahmepunkte abgeschlossen ist, so daß jeder J-Punkt zugleich ein usnahmepunkt ist (Satz 1). Danach kann man in jedem Punkt P, in em $\mathfrak{F}$ nicht normal ist, aus $\mathfrak{F}$ eine Teilfolge herausgreifen, die keine in rgendeiner Umgebung von P gleichmäßig konvergierende Unterfolge enthält.

[3]) Man kommt auf den Ausdruck $\mathfrak{M}(r)$ übrigens auch dann, wenn man ohne enutzung der Jensenschen Formel die Untersuchung von vornherein für den Quo-ienten von zwei kanonischen Produkten der Ordnung 0 durchführt; dieser Ausdruck ritt bei der Diskussion der kanonischen Produkte von der Ordnung 0 bereits in en Untersuchungen von Herrn Littlewood zum Wimanschen Satz auf. Die Art, ie die Jensensche Formel in unserer Untersuchung benutzt wird, unterscheidet ich wesentlich von den Anwendungen der Jensenschen Formel, die wir in unserer Mitteilung: Über die Bedeutung der Jensenschen Formel für einige Fragen der omplexen Funktionentheorie, Acta Szeged 1 (1923), S. 80–87 gegeben haben, und ie sich in einem Spezialfalle, worauf mich Herr F. Riesz aufmerksam gemacht hat, ereits in einer Arbeit von Herrn P. Fatou finden: Sur l'évanouissement d'une ranche de fonction uniforme aux points d'une ligne singulière, Bulletin d. Sc. Math. 2) 45 (1921), S. 68–69.

[4]) Unter einem *Gebiet* verstehen wir im folgenden eine zusammenhängende *ffene* ebene Punktmenge, unter einem *Bereich* die Vereinigungsmenge eines Gebietes nd seiner Randpunkte.

Mit Hilfe solcher Teilfolgen lassen sich oft die Beweise wesentlich a kürzen. Die Existenz solcher Teilfolgen in einem J-Punkt P — wir nenne sie *Ausnahmefolgen* in P — liegt tiefer als die von Herrn Julia bewiese Tatsache. Die Abgeschlossenheit der Menge der Ausnahmepunkte fol nämlich erst mit Hilfe funktionentheoretischer Überlegungen und brauc bei allgemeinen stetigen Funktionen nicht zuzutreffen, während die andere Resultate: die Existenz der J-Punkte und der Ausnahmepunkte, die Übe einstimmung der Menge der J-Punkte mit der Vereinigungsmenge der Au nahmepunkte und ihrer Häufungsstellen — auch für allgemeinere Familie stetiger komplexer Funktionen gültig bleiben. Dafür ist aber die Existe einer Ausnahmefolge eine sehr viel einfachere charakterisierende Eigenscha eines J-Punktes P als eine analoge Behauptung für jeden Kreis um P

Andererseits ist die Einführung der Ausnahmefolgen in einem Punkt deshalb wichtig, weil solche Folgen sich auch durch ihren Wertevorrat der Nähe von P vollständig charakterisieren lassen. Damit ist in d Analyse des Begriffs der normalen Schar analytischer Funktionen d Punkt erreicht, wo die Beziehungen zum Picardschen Ideenkreis umkeh bar werden. Wir beweisen nämlich, daß eine Folge von in einer Um gebung von P meromorphen Funktionen dann und nur dann eine Au nahmefolge in P ist, wenn die Funktionen jeder Teilfolge dieser Folge jeder noch so kleinen Umgebung von P in ihrer Gesamtheit alle Wer annehmen, höchstens bis auf zwei Werte (Satz 1).

Zugleich gibt dies die Möglichkeit, eine J-Folge direkt durch d Wertevorrat zu definieren, unabhängig von irgendwelchen auf die Konverge bezüglichen Begriffsbildungen. Wir bezeichnen eine Folge komplexer Zahlen mit $\sigma_\nu \to \infty$ als eine *eigentliche* J-Folge für $f(z)$, wenn es einen Punkt gibt, der von 0 und ∞ verschieden ist, derart, daß wenn Ω ein belieb kleiner Kreis um z_0 ist, die Funktion $f(z)$ auf *jeder* unendlichen Teilfol der Kreise $\sigma_\nu \Omega$ alle Werte annimmt, höchstens bis auf zwei Werte. Dann i leicht zu sehen, daß eine J-Folge für $f(z)$ sich definieren läßt, als eine b liebige Zahlenfolge σ_ν mit $\sigma_\nu \to \infty$, die eine eigentliche J-Folge für $f(z)$ enthä Doch wird der Begriff der eigentlichen J-Folge im Folgenden nicht benut

Eine wirklich durchsichtige Darstellung dieser Verhältnisse erzielt m erst, wenn man sich entschließt, auch in diesem Zusammenhang d Riemannsche Kugel zu ihrem Rechte kommen zu lassen und die A weichung zweier komplexer Zahlenwerte durch die „Kugeldistanz" e sprechender Bildpunkte mißt[5]). Erstens erhält man dann eine äuße

[5]) Solche Kugeldistanzen werden im Lehrbuch der Funktionentheorie v L. Bieberbach (Bd. I, S. 287) gelegentlich einer Konvergenzuntersuchung zu ei von der Ausnahmestellung des unendlichfernen Punktes unabhängigen Beschreibung g metrischer Verhältnisse in der Gaußschen Ebene der *unabhängigen* Variablen benut

egante charakteristische Bedingung für den normalen Charakter einer har $\mathfrak{F}$ meromorpher Funktionen in einem Gebiet G, nämlich die gleichäßige Kugelstetigkeit von $\mathfrak{F}$ in jedem Punkt von G. Die Ausnahmenkte von $\mathfrak{F}$ — wenn $\mathfrak{F}$ nicht normal ist — sind dann die Punkte, in nen die geeignet definierte Schwankung der Funktionenmenge $\mathfrak{F}$ nicht 0 . Und die Abgeschlossenheit der Menge der Ausnahmepunkte folgt aus r Tatsache, daß die Kugelschwankung einer Schar meromorpher Funknen in einem Punkt entweder 0 oder π ist (Satz 2).

Diese Untersuchungen über normale Scharen meromorpher Funknen werden im ersten Kapitel der vorliegenden Abhandlung dargestellt. ie ersten zwei Paragraphen beschäftigen sich mit dem Carathéodory-andauschen Konvergenzbegriff und den Sätzen über normale Scharen, e für die Untersuchungen des zweiten Kapitels wichtig sind. Der dritte aragraph bespricht die Darstellung auf der Kugel, und seine Ergebnisse ürften die in den beiden ersten Paragraphen besprochenen Ergebnisse von erschiedenen Seiten beleuchten, ohne daß sie in den Untersuchungen es zweiten Kapitels benutzt werden. Dasselbe gilt für den Inhalt des erten Paragraphen, in dem eine Charakterisierung normaler Funktionenharen durch quantitative Eigenschaften anderer Art gegeben wird als e gleichmäßige Kugelstetigkeit. Wir führen nur die Charakterisierung an, e sich für normale Scharen $\mathfrak{F}$ regulärer Funktionen in einem Gebiet G s Spezialfall ergibt: *Zu jedem Teilbereich H von G und jeder positiven onstanten c gehört ein $\omega(H, c)$, derart, daß alle Funktionen von $\mathfrak{F}$, ie in wenigstens einem Punkte von H absolut kleiner als c sind, dann H durchweg absolut kleiner als $\omega(H, c)$ sind.* Diese Eigenschaft für den *festen* inneren Punkt von G wird bereits von Herrn Julia formuert, indessen liefert erst die Formulierung der Gleichmäßigkeit in jedem sten Teilbereich eine umkehrbare Bedingung. Ebenso finden sich einige er auf meromorphe Funktionen bezüglichen Resultate des vierten Paraaphen bei Herrn Julia *für feste Punkte* in G bewiesen, jedoch ohne ie in diesem Zusammenhang für die Umkehrbarkeit durchaus wesentliche leichmäßigkeit in jedem Teilbereich H von G.

Indessen spielen quantitative Formulierungen in der vorliegenden ntersuchung keine wesentliche Rolle, und es dürfte sich empfehlen, die § 3 und 4 des ersten Kapitels zuerst zu überschlagen. Dagegen werden uantitative Formulierungen von Bedeutung, wenn man die weitere Frage ach der Charakterisierung von J-Folgen für eine vorgegebene Funktion ufwirft. Wir haben diese Frage für den Fall von für $R < |z| < \infty$ reguären Funktionen weiter untersucht und sind zu Ergebnissen gelangt, die ohl in mehreren Beziehungen als abschließend angesehen werden können. a die dabei benutzten Methoden nicht mehr direkt auf die Montelschen

Begriffsbildungen zurückgehen, sondern mehr quantitativer Natur sin würde uns die Darstellung dieser Untersuchungen in dieser Arbeit zu we führen, wir geben indessen im folgenden einige der Resultate an. Die B weise sollen in einer zweiten Arbeit dargestellt werden.

Wir verstehen im folgenden unter $f(z)$ eine für $|z| > R$ bis auf ei wesentliche Singularität im Unendlichen eindeutige und reguläre Funktio unter $M(r)$ bzw. $m(r)$ $\underset{|z|=r}{\text{Max}}\,|f(z)|$ bzw. $\underset{|z|=r}{\text{Min}}\,|f(z)|$. Wir fragen zuers wann *jede* σ_ν-Folge mit $\sigma_\nu \to \infty$ eine J-Folge für $f(z)$ ist. Wir behaupte

1. *Für die Existenz wenigstens einer Folge σ_ν mit $\sigma_\nu \to \infty$, die kei J-Folge für $f(z)$ ist, ist notwendig und hinreichend die Existenz ein Folge von Kreisringen $r_n' \leqq |z| \leqq r_n''$ mit $\frac{r_n''}{r_n'} \to \infty$, in denen für beliebi $\varepsilon > 0$ von einem $n = n_0(\varepsilon)$ an:*

$$m(r) \geqq (M(r))^{1-\varepsilon}, \qquad r_n' \leqq r \leqq r_n''$$

gilt.

Ein anderes Kriterium lautet:

1°. *Damit jede Folge σ_ν mit $\sigma_\nu \to \infty$ eine J-Folge für $f(z)$ ist, notwendig und hinreichend die Existenz einer Folge positiver Zahlen r_n m*

$$r_n \to \infty, \qquad r_1 < r_2 < \ldots, \qquad \overline{\lim}\,\frac{r_{n+1}}{r_n} < \infty, \qquad m(r_n) < c,$$

unter c eine beliebig anzunehmende feste positive Konstante verstande

Zweitens fragen wir, wann man von der J-Menge *jeder* σ_ν-Fol mit $\sigma_\nu \to \infty$ behaupten kann, daß sie auf jedem Kreise um den Nullpun wenigstens einen Punkt besitzt. Hierfür gilt das Kriterium:

2. *Für die Existenz einer σ_ν-Folge mit $\sigma_\nu \to \infty$, für die die z gehörige J-Menge nicht auf jedem Kreise um den Nullpunkt Punkte h ist notwendig und hinreichend die Existenz einer Folge von Kreisring $r_n' \leqq |z| \leqq r_n''$ mit $\overline{\lim}\,\frac{r_n''}{r_n'} > 1$, $r_n' \to \infty$, $r_n'' \to \infty$, so daß für jedes $\varepsilon >$ von einem $n = n_0(\varepsilon)$ an*

$$\lg m(r) \geqq (\lg M(r))^{1-\varepsilon}, \qquad r_n' \leqq r \leqq r_n''$$

gilt.

Ein anderes Kriterium lautet:

2°. *Damit für jede Folge σ_ν mit $\sigma_\nu \to \infty$ die zugehörige J-Menge a jedem Kreise um den Nullpunkt wenigstens einen Punkt hat, ist notwend und hinreichend die Existenz einer Folge positiver Zahlen r_n mit*

$$r_n \to \infty, \qquad r_1 < r_2 < \ldots, \qquad \frac{r_{n+1}}{r_n} \to 1, \qquad m(r_n) < c,$$

unter c eine beliebig anzunehmende feste positive Konstante verstande

Hierin ist natürlich die von Herrn Julia gefundene hinreichende Bedingung — die Existenz eines endlichen asymptotischen Wertes — enthalten. Die Form unserer Bedingungen hängt offenbar aufs innigste mit der Fragestellung des Wimanschen Satzes zusammen, in 1. mit der von Herrn Lindelöf verschärften Formulierung desselben[6]). — Endlich läßt sich im allgemeinen Falle eine Konstruktion aller J-Folgen aus $M(r)$ und $m(r)$ angeben:

3. *Ist $\mathfrak{M}(c)$ für ein beliebig anzunehmendes $c > 0$ die Menge der > 0, für die $m(r) \leqq c$ ist, so beschreibe man für ein $m > 1$ um jeden Punkt r_0 von $\mathfrak{M}(c)$ das Intervall $\frac{r_0}{m} \leqq r \leqq m r_0$ und bezeichne die Vereinigungsmenge dieser Intervalle für ein festes m mit $\mathfrak{M}_m(c)$. Dann ist eine Folge σ_ν mit $\sigma_\nu \to \infty$ dann und nur dann eine J-Folge für $f(z)$, wenn unendlich viele σ_ν in einer und derselben Menge $\mathfrak{M}_m(c)$ enthalten sind.*

Wir benutzen endlich diese Gelegenheit, um auf eine Arbeit von Herrn P. Montel aus dem Jahre 1917 hinzuweisen, in der namentlich ein Konvergenzsatz bewiesen ist, den ich ohne Kenntnis der Montelschen Arbeit einige Jahre später in allgemeinerer Fassung gefunden und veröffentlicht habe[7]). Der Satz besagt, daß aus der Gleichmäßigen Beschränktheit einer Folge von in einem von einer Jordanschen Kurve J begrenzten Gebiet G analytischen und auf einem Bogen L von J stetigen Funktionen von z und aus ihrer gleichmäßigen Konvergenz auf L ihre gleichmäßige Konvergenz in jedem Teilbereich B von G folgt. Herr Montel bewies diesen Satz explizite nur für stückweise analytische Berandung, sein Beweis gilt jedoch unter Hinzunahme der bekannten Sätze über die Randerzuordnung bei konformer Abbildung auch für den allgemeinen Fall; die von Herrn Montel benutzte einschränkende Voraussetzung erklärt sich damit, daß er den Satz sodann gerade zum Studium der Frage nach der Randerzuordnung heranzieht. Dagegen ist in diesem Beweis die Voraussetzung der Gleichmäßigkeit der Konvergenz auf L wesentlich, von ihr kann bei der Überlegung von Herrn Montel nur auf einer Punktmenge von *Jordanschem* Maße 0 abgesehen werden. Meine in der ersten der oben zitierten Mitteilungen angegebene und in der zweiten Mitteilung bewiesene

---

[6]) Die *Existenz* ganzer transzendenter Funktionen mit den obigen Eigenschaften läßt sich besonders einfach mit Hilfe der Methode beweisen, die Borel zur Aufstellung ganzer Funktionen mit beliebig starkem Wachstum benutzt hat und die auf der Betrachtung von Potenzreihen mit geeigneten Lücken beruht.

[7]) P. Montel, Sur la représentation conforme, J. d. M. p. e. a. (7) **3** (1917), S. 1–54, insbesondere S. 25. Vgl. andererseits: Auszug aus einem Briefe von A. Ostrowski an L. Bieberbach, Jahresber. d. D. M. V. **31** (1922), S. 85; A. Ostrowski, Über die Bedeutung der Jensenschen Formel für einige Fragen der komplexen Funktionentheorie, Acta Szeged **1** (1923), S. 80–87.

Ergänzung besteht nun darin, daß man für die gleichmäßige Konvergen im Innern von G von der Voraussstzung der Gleichmäßigkeit der Konver genz auf L absehen kann. Dies folgt bei mir aus dem Satze, daß ein Folge von im Innern des Einheitskreises regulären und gleichmäßig be schränkten Funktionen f_ν überall im Innern des Einheitskreises gleichmäßi konvergiert, wenn sie auf einer Punktmenge der Kreisperipherie vom posi tiven Lebesgueschen Maß konvergiert. Dieser Satz ist nun wiederum gleich zeitig mit mir (und ganz unabhängig von mir) von Herrn A. J. Khinchin veröffentlicht worden[8]), auf dessen diesbezügliche Mitteilungen ich hie noch hinweisen möchte.

Endlich möchte ich noch auf die vor einigen Wochen erschienen interessante Abhandlung von Herrn Milloux[9]) aufmerksam machen, di gewisse Berührungspunkte mit meinen Untersuchungen aufweist. Es finde sich in ihr keines der in der vorliegenden Arbeit aufgestellten Resultate die Entwicklungen von Herrn Milloux hängen indessen mit meinen Be weismethoden für die oben ohne Beweis angegebenen Sätze in ihrer au die quantitative Durcharbeitung der Montelschen Begriffsbildungen ge richteten Grundtendenz zusammen.

Erstes Kapitel.

Normale Scharen meromorpher Funktionen.

§ 1.

Gleichmäßige Konvergenz von Folgen meromorpher Funktionen.

Wir gehen zuerst auf den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz vo Folgen meromorpher Funktionen ein, auf dem unsere Überlegungen be ruhen[10]). Ist $f_\nu(z)$ eine Folge von in einem (offenen) Gebiet G mero morphen Funktionen, so sagen wir, f_ν konvergieren gleichmäßig *in* G, wen für jeden inneren Punkt P von G entweder die Folge $f_\nu(z)$ oder di Folge $\frac{1}{f_\nu(z)}$ in einer gewissen hinreichend kleinen Umgebung von P in gewöhnlichen Sinne gleichmäßig konvergiert.

Man erkennt leicht, daß die Grenzwerte für die einzelnen Punkte bzw. ihre reziproken Werte sich zu einer in G meromorphen Funktio

[8]) Moskauer Mathem. Sammlung **31** (1922), S. 147–151. Fundamenta mathe maticae **4** (1923), S. 72–75.

[9]) J. d. M. p. e. a. (9) **3** (1924), S. 345–401.

[10]) Vgl. Carathéodory und Landau, Beiträge zur Konvergenz von Funktionen folgen. Berl. Sitzgsber. (1911), S. 604 für die zeitlich erste Formulierung. Ferne Montel, Ann. de l'Éc. Norm. (3) **29** (1912), S. 487–535; (3) **33** (1916), S. 223–302 Julia. Leç., S. 81.

$F(z)$ zusammenschließen, die auch eventuell durchweg den konstanten Wert ∞ haben kann. Ist aber $F(z)$ in einem Punkt P von G endlich, so konvergiert in einer Umgebung dieses Punktes bereits die Folge $f_\nu(z)$ selbst gleichmäßig im gewöhnlichen Sinne gegen $F(z)$, übrigens aber auch, falls $F(z)$ in P nicht den Wert 0 hat, die Folge $\frac{1}{f_\nu(z)}$ gegen $\frac{1}{F(z)}$.

Offenbar konvergiert gleichzeitig mit f_ν auch die Folge $\frac{1}{f_\nu}$ in G gleichmäßig, und zwar gegen $\frac{1}{F(z)}$.

Diese Definition weicht von der im Falle von in G regulären Funktionen üblichen etwas ab. Wir wollen daher, wenn eine Folge von auf einer Punktmenge Γ definierten Funktionen in jedem Punkt von Γ konvergiert, und zwar gleichmäßig im gewöhnlichen Sinne für die ganze Punktmenge Γ, sagen, diese Folge konvergiere *auf* Γ gleichmäßig.

Für die Definition der gleichmäßigen Konvergenz in G ist es offenbar nicht wesentlich, vorauszusetzen, daß alle f_ν im ganzen Gebiete G definiert sind, es genügt, wenn für jeden Punkt P in G und eine geeignete Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ von P alle f_ν, höchstens bis auf endlich viele, in $\mathfrak{U}(P)$ definiert sind.

Aus der obigen Definition schließen wir nun: Ist G^* ein samt seinen sämtlichen Randpunkten in G enthaltenes Gebiet, $F(z)$ nicht identisch gleich a und in allen Randpunkten von G^* von a verschieden, sind ferner $a_1, \ldots, a_k$ die a-Stellen von $F(z)$ in G^*, so hat von einem ν an jedes f_ν in G^* genau k a-Stellen $a_1^{(\nu)}, \ldots, a_k^{(\nu)}$ und bei geeigneter Numerierung gilt $a_\varkappa^{(\nu)} \to a_\varkappa$. Wir können a beim Beweis endlich annehmen, da wir sonst f_ν mit $\frac{1}{f_\nu}$ vertauschen könnten. Sind dann $b_1, \ldots, b_l$ die im Innern und auf dem Rande von G^* liegenden Pole von $F(z)$ ($F(z)$ verschwindet nach unseren Annahmen für $k > 0$ nicht identisch), so kann man um $b_1, \ldots, b_l$ kleine Kreise abgrenzen, in denen $F(z)$ absolut größer als $|a| + 2$ ist. Von einem ν an ist dann in diesen Kreisen $|f_\nu(z)| > |a| + 1$. Entfernt man dann aus G^* die inneren Punkte dieser Kreise, sofern sie zu G^* gehören, so gilt auf dem übrigbleibenden Gebiet $\bar{G}^*$ die gleichmäßige Konvergenz der $f_\nu(z)$ gegen $F(z)$ im gewöhnlichen Sinne. Daher gibt es für jedes ν von einem ν an im Innern von $\bar{G}^*$ genau k a-Stellen $a_\varkappa^{(\nu)}$, die resp. gegen $a_\varkappa$ konvergieren. Auf dem Rande von $\bar{G}^*$ (und ebenso auf dem Rande von G^*) liegen aber sicher von einem ν an keine a-Stellen von $f_\nu(z)$, da $F(z)$ dort überall von a verschieden ist.

Ebenso sieht man sofort ein: Ist H ein Teilbereich von G, und besitzt $F(z)$ auf H genau k a-Stellen, so besitzt von einem ν an jedes $f_\nu(z)$ auf H höchstens k a-Stellen.

Sind f_ν und g_ν zwei Folgen meromorpher Funktionen, die gleichmäßi in G gegen $F(z)$ bzw. $G(z)$ konvergieren, so folgt daraus nicht imme die gleichmäßige Konvergenz von $f_\nu g_\nu$ gegen $F(z)G(z)$ im ganzen Ge biete G, z. B. dann nicht, wenn $G(z) \equiv \infty$ ist und $F(z)$ in G eine Nul stelle hat. Es genügt offenbar für die gleichmäßige Konvergenz von $f_\nu g$ gegen $F(z)G(z)$, daß $F(z)$ in jedem Punkt von G endlich bleibt, in de $G(z)$ verschwindet, und umgekehrt. Ist also insbesondere $F(z) \equiv \infty$, so da nach unseren Bedingungen $G(z)$ in G keine Nullstellen haben, bzw. wen $F(z) \equiv 0$ ist, keine Pole. Sind daher z. B. $a_1, \ldots, a_k$; $b_1, \ldots, b_l$ endlich Konstanten, und gilt etwa $a_\varkappa^{(\nu)} \to a_\varkappa$, $b_\varkappa^{(\nu)} \to b_\varkappa$, so konvergiert die Folg rationaler Funktionen $\dfrac{\prod\limits_\varkappa (z - a_\varkappa^{(\nu)})}{\prod\limits_\varkappa (z - b_\varkappa^{(\nu)})}$ für $\nu \to \infty$ in der ganzen Ebene gleich mäßig gegen $\dfrac{\prod (z - a_\varkappa)}{\prod (z - b_\varkappa)}$, wenn für alle $\varkappa$ und λ $a_\varkappa \neq b_\lambda$ ist.

Etwas umständlicher ist der Beweis, daß für $a_\nu \to a$ mit endlichem auch $f_\nu(z) + a_\nu \to F(z) + a$ gilt. Es genügt, den Fall zu betrachten, da $F(z)$ nicht durchweg ∞ ist, und wir brauchen nur die Punkte P zu unte suchen, in denen $F(z) = \infty$ ist. Es sei K ein Kreis um P, in de $|F(z)| \geqq |a| + 2$ und, bis auf den Mittelpunkt, $F(z) \neq \infty$ ist, und d her von einem ν an $|f_\nu(z)| \geqq |a_\nu| + 1$ gilt. Auf der Peripherie dies Kreises konvergieren offenbar $f_\nu(z) + a_\nu$ gleichmäßig gegen $F(z) +$ daher auch $\dfrac{1}{f_\nu(z) + a_\nu}$ gegen $\dfrac{1}{F(z) + a}$, da aber $\dfrac{1}{F(z) + a}$ und $\dfrac{1}{f_\nu(z) + a_\nu}$ v einem ν an in K regulär sind, gilt die letzte Tatsache in Innern von w. z. b. w.

Ferner folgt: Ist $a_\nu \to a$, $b_\nu \to b$, $c_\nu \to c$, $d_\nu \to d$, wo a, b, c, d, en liche Zahlen sind und $|ad - bc| > 0$ ist, so folgt aus der gleichmäßig Konvergenz der f_ν in G gegen $F(z)$ auch die gleichmäßige Konvergenz in der Funktionen $\dfrac{a_\nu f_\nu + b_\nu}{c_\nu f_\nu + d_\nu}$ gegen $\dfrac{aF + b}{cF + d}$. Denn ist $c \neq 0$, so können die Zerlegung benutzen:

$$\frac{a_\nu f_\nu + b_\nu}{c_\nu f_\nu + d_\nu} = \frac{a_\nu}{c_\nu} + \frac{b_\nu c_\nu - a_\nu d_\nu}{c_\nu (c_\nu f_\nu + d_\nu)}.$$

Ist aber $c = 0$, so ist sicher $a \neq 0$, und wir können die Funktionenfol $\dfrac{c_\nu f + d_\nu}{a_\nu f_\nu + b_\nu}$ betrachten. — Endlich schalten wir den Beweis des folgenden den späteren Untersuchungen vielfach nützlichen Hilfssatzes ein:

Hilfssatz 1. *Es sei $f_\nu(z)$ eine Folge von in einem den unendli fernen Punkt nicht im Innern enthaltenden Gebiet G meromorphen Fu*

ionen, die in G gleichmäßig gegen $F(z)$ konvergiert, ϑ_ν eine Folge gegen 1 *convergierender Konstanten. Dann konvergiert auch die Funktionenfolge* $f_\nu(\vartheta_\nu z)$ *gleichmäßig in G gegen* $F(z)$.

Denn es sei z_0 ein innerer Punkt von G. Ist $F(z_0) \neq \infty$, so konvergiert $f_\nu(z)$ gegen $F(z)$ gleichmäßig im gewöhnlichen Sinne auf einem Kreise um z_0: $|z - z_0| \leqq r$. Daher sind die Funktionen $f_\nu(z)$ von einem ν an in diesem Kreise gleichmäßig beschränkt, etwa absolut $< c$. Dann sind die Ableitungen der $f_\nu(z)$ nach der Cauchyschen Abschätzung im Kreise K

$$|z - z_0| \leqq \frac{r}{2}$$

absolut kleiner als $\frac{2c}{r}$. Setzt man $|z_0| + r = R$, ist $\varepsilon > 0$ beliebig klein $(< c)$ und $n_0(\varepsilon)$ so gewählt, daß für $|z - z_0| \leqq r$ und $\nu > n_0$ $|F(z) - f_\nu(z)| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$, $|\vartheta_\nu - 1| < \frac{\varepsilon r}{4cR}$ ist, so gilt für $|z - z_0| \leqq \frac{r}{4}$ und für $\nu > n_0$, da dann wegen $|\vartheta_\nu z - z| \leqq R\frac{\varepsilon r}{4cR} = \frac{\varepsilon r}{4c} < \frac{r}{4}$ die Verbindungsstrecke der Punkte $\vartheta_\nu z$ und z im Kreise K liegt,

$$|F(z) - f_\nu(\vartheta_\nu z)| \leqq |F(z) - f_\nu(z)| + |f_\nu(\vartheta_\nu z) - f_\nu(z)| \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon r}{4c} \cdot \frac{2c}{r} = \varepsilon.$$

Ist aber $F(z_0) = \infty$, so konvergiert definitionsgemäß $\frac{1}{f_\nu(z)}$ auf einem Kreise $|z - z_0| \leqq r$ im gewöhnlichen Sinne gleichmäßig gegen $\frac{1}{F(z)}$, und daraus folgt wie oben, daß auch $\frac{1}{f_\nu(\vartheta_\nu z)}$ im Kreise $|z - z_0| \leqq \frac{r}{4}$ im gewöhnlichen Sinne gleichmäßig gegen $\frac{1}{F(z)}$ konvergiert. Damit ist unser Hilfssatz bewiesen.

§ 2.

Normale Scharen meromorpher Funktionen.

Eine Menge $\mathfrak{F}$ von in einem Gebiet G eindeutigen meromorphen Funktionen heißt nach Herrn Montel in G *normal*, wenn jede unendliche Teilfolge von $\mathfrak{F}$ eine in G gleichmäßig konvergente Unterfolge enthält. Ist dies nicht der Fall, so nennen wir $\mathfrak{F}$ *anormal* in G. Enthält $\mathfrak{F}$ nur abzählbar viele Funktionen, so ist es offenbar nicht nötig vorauszusetzen, daß alle diese Funktionen im ganzen Gebiet G definiert sind; es genügt vielmehr, wenn es zu jedem Punkt P von G eine Umgebung von P gibt, in der nur endlich viele der Funktionen von $\mathfrak{F}$ nicht definiert sind.

Ferner nennen wir $\mathfrak{F}$ *normal* in einem Punkt P, wenn es einen Kreis um P gibt, in dem $\mathfrak{F}$ normal ist; sonst nennen wir $\mathfrak{F}$ *anormal* in P. Die

Funktionenschar $\mathfrak{F}$ ist dann und nur dann normal in G, wenn sie in jedem Punkt von G normal ist[11]), wie aus dem Borelschen Überdeckungssatz leicht zu schließen ist. Punkte, in denen $\mathfrak{F}$ anormal ist, nennen wir *Juliasche Punkte* (*J-Punkte*) *von* $\mathfrak{F}$ und ihre Menge die *J-Menge von* $\mathfrak{F}$.

Es gilt nun der Satz[12]), daß wenn eine in G definierte Schar $\mathfrak{F}$ eindeutiger meromorpher Funktionen dort wenigstens drei verschiedene Werte ausläßt, sie in G normal ist. Wir können nämlich annehmen, eventuell nach einer geeigneten linearen Transformation, daß die ausgelassenen Werte $0, 1, \infty$ sind. Ist nun z_0 ein Punkt von G, K ein ganz in G liegender Kreis $|z - z_0| \leqq r$, $f_\nu(z)$ eine Folge aus $\mathfrak{F}$, und ist für unendlich viele $f_\nu(z)$ das Minimum des absoluten Betrages auf dem Kreise $|z - z_0| \leqq \frac{r}{3}$ nicht größer als 1, so können wir annehmen, indem wir eine entsprechende Teilfolge der $f_\nu(z)$ herausgreifen und diese wiederum mit $f_\nu(z)$ bezeichnen, daß für jede Funktion $f_\nu(z)$ der absolute Betrag $|f_\nu(z)|$ in einem Punkt z_ν mit $|z_\nu - z_0| \leqq \frac{r}{3}$ nicht größer als 1 ist. Da nun $f_\nu(z)$ im Kreise um z_ν mit dem Radius $\frac{2r}{3}$ regulär und von 0 und 1 verschieden ist, ist $|f(z)|$ nach dem Schottkyschen Satz[13]) auf dem Kreise um z_ν mit dem halben Radius $\frac{r}{3}$, insbesondere also im Punkte z_0 kleiner als eine absolute Konstante c (e^{100} z. B.). Da aber dann alle $f_\nu(z)$ im Kreise um z_0 mit dem Radius r regulär und von 0 und 1 verschieden sind, und im Mittelpunkt absolut $\leqq c$ sind, sind ihre absoluten Beträge im Kreise um z_0 mit dem halben Radius $\frac{r}{2}$ wiederum nach dem Schottkyschen Satz gleichmäßig in ν beschränkt, und es läßt sich daher, nach dem Auswahlsatz von Hrn. Montel eine in einer Umgebung von z_0 gleichmäßig konvergente Teilfolge aus den $f_\nu(z)$ herausgreifen. — Ist aber nur für endlich viele $f_\nu(z)$ auf $|z - z_0| \leqq r$ das Minimum des absoluten Betrages $\leqq 1$, so können wir dieselbe Überlegung auf $\frac{1}{f_\nu(z)}$ anwenden, und eine auf dem Kreise $|z - z_0| \leqq \frac{r}{4}$ gleichmäßig konvergente Teilfolge dieser Folge herausgreifen. Damit ist die normale Charakter von $\mathfrak{F}$ in jedem beliebigen Punkt P von G und damit in G überhaupt bewiesen.

---

[11]) Diese von Herrn Julia entdeckte Tatsache bildet den Ausgangspunkt seiner Untersuchungen zum Picardschen Satz.

[12]) Der Beweis dieses Satzes ist implizite in den Entwicklungen der oben zitierten Arbeit von Carathéodory und Landau enthalten, der Satz selbst ist explizite von Montel aufgestellt worden.

[13]) In der von Herrn Landau präzisierten Formulierung.

Ist also $\mathfrak{F}$ in G anormal, so nehmen die Funktionen von $\mathfrak{F}$ in ihrer Gesamtheit in G alle Werte an, höchstens bis auf zwei Werte. Dies läßt sich nun nach einer fundamentalen Bemerkung von Herrn Julia folgendermaßen verschärfen: Wenn $\mathfrak{F}$ in G anormal ist, gibt es Punkte P in G, in denen $\mathfrak{F}$ anormal ist, — *J-Punkte von $\mathfrak{F}$* —; in einem beliebig kleinen Kreise um einen J-Punkt von $\mathfrak{F}$ müssen daher die Funktionen von $\mathfrak{F}$ in ihrer Gesamtheit alle Werte annehmen, höchstens bis auf zwei Werte. Indessen ist auch diese Formulierung noch nicht umkehrbar, und wir müssen unsere Analyse der Struktur einer anormalen Funktionenschar noch etwas weiter treiben, um einen umkehrbaren Zusammenhang zwischen dem anormalen Charakter einer Funktionenschar und ihrem Wertevorrat aufzustellen[14]).

Ist $\mathfrak{F}$ in G anormal, so enthält $\mathfrak{F}$ eine Teilfolge f_ν, die keine im Gebiet G gleichmäßig konvergente Unterfolge enthält[15]). Eine solche Folge ohne in G gleichmäßig konvergente Unterfolgen werden wir als eine *Ausnahmefolge in G* bezeichnen.

Ist f_ν eine Folge von in einer festen Umgebung eines Punktes P meromorphen Funktionen, mit der Eigenschaft, daß keine unendliche Teilfolge der f_ν in einer noch so kleinen Umgebung von P gleichmäßig konvergiert, so nennen wir f_ν eine *Ausnahmefolge in P*. Wir zeigen nun zunächst: *Ist $\mathfrak{F}$ eine in einem Gebiet G anormale Funktionenschar, so gibt es in G wenigstens einen Punkt*, in dem eine Teilfolge von $\mathfrak{F}$ eine Ausnahmefolge ist. Es gibt offenbar ein Quadrat Q mit der Seitenlänge a etwa, das ganz in G liegt, so daß $\mathfrak{F}$ in Q anormal ist. Es gibt daher eine Folge $f_\nu(z)$ aus $\mathfrak{F}$, die eine Ausnahmefolge in Q ist. Zeichnen wir nun in Q vier Quadrate mit parallelen Seiten von der Länge $\frac{2}{3}a$ ein, die jeweils je eine Ecke mit Q gemeinsam haben und offenbar alle übereinandergreifen, so muß die Folge f_ν in wenigstens einem von ihnen, das wir mit Q_1 bezeichnen wollen, anormal sein und eine Ausnahmefolge in Q_1 $f_{1,\nu}$ enthalten. Wir tragen dabei bei der Umnumerierung der in f_ν herausgegriffenen $f_{1,\nu}$ dafür Sorge, daß sie *nicht umgeordnet werden*, so daß kein f_ν etwa in der Folge $f_{1,\nu}$ einen größeren Index ν bekommen kann. Ebenso finden wir ein Teilquadrat Q_2 von Q_1 mit der Seitenlänge $(\frac{2}{3})^2 a$, in dem eine Teilfolge $f_{2,\nu}$

[14]) Ein solcher Zusammenhang wird zwar durch den folgenden Satz bereits auf dieser Stufe der Untersuchung hergestellt; *Eine Funktionenschar $\mathfrak{F}$ ist dann und nur dann in G normal, wenn es zu jedem Punkt P von G und jeder Teilfolge f_ν von $\mathfrak{F}$ eine unendliche Unterfolge der f_ν gibt, die in einer gewissen Umgebung von P drei verschiedene Werte ausläßt.* Indessen ist das weiter unten aufgestellte Kriterium von wesentlich größerer Tragweite.

[15]) Es ist leicht zu zeigen, daß eine Menge von in G meromorphen Funktionen, die keine in G gleichmäßig konvergierende Unterfolge besitzt, abzählbar ist.

von $f_{1,\nu}$ eine Ausnahmefolge ist, und allgemein eine Folge von ineinander eingeschachtelten Quadraten Q_i, in denen eine entsprechende Teilfolge $f_{i,\nu}$ von $f_{i-1,\nu}$ eine Ausnahmefolge ist, wobei die Nummern ν der $f_{i,\nu}$ mit jeder weiteren Auswahl nicht vergrößert werden. Diese Quadrate konvergieren gegen einen Punkt P in Q, und die Funktionenfolge $f_{1,1}, f_{2,2}, \ldots, f_{i,i}, \ldots$ enthält in keiner Umgebung von P eine konvergente Teilfolge, da in jede solche Umgebung ein Quadrat Q_k fallen muß, während alle $f_{i,i}$ bis auf endlich viele der Folge $f_{k,\nu}$ angehören. Die Funktionenfolge $f_{i,i}$ ist daher eine Ausnahmefolge in P.

Aus dem Bewiesenen folgt zunächst, daß *es in jeder Umgebung eines J-Punktes von $\mathfrak{F}$ wenigstens einen Punkt gibt* (der auch mit diesem J-Punkt übereinstimmen kann), *in dem eine gewisse Teilfolge von $\mathfrak{F}$ eine Ausnahmefolge ist.*

Ist $f_\nu(z)$ eine Ausnahmefolge in einem Punkt P, so nehmen die Funktionen einer jeden unendlichen Teilfolge der f_ν in ihrer Gesamtheit in jeder noch so kleinen Umgebung von P alle Werte an, höchstens bis auf zwei Werte. Wir behaupten nun, daß dies sich umkehren läßt. *Hat eine Folge von in einer Umgebung von P meromorphen Funktionen f_ν die Eigenschaft, daß die Funktionen jeder unendlichen Teilfolge der f_ν in ihrer Gesamtheit in jeder noch so kleinen Umgebung von P alle Werte annehmen, höchstens bis auf zwei Werte, so ist die Folge f_ν eine Ausnahmefolge im Punkte P.* Denn sonst hätten f_ν eine in einem Kreise K um P gleichmäßig konvergente Teilfolge, und wir können annehmen, daß die Folge f_ν selbst in K gleichmäßig konvergiert. Ist der Grenzwert von f_ν in P endlich $= a$, so nimmt die Grenzfunktion in einer Umgebung von P nur Werte aus einer beliebig kleinen Umgebung von a an, und dasselbe ist von einem ν an für alle f_ν der Fall, im Widerspruch zur Voraussetzung. Ist aber der Grenzwert der f_ν in P gleich ∞, so schließt man ebenso, daß die Werte der Funktionen $\frac{1}{f_\nu}$ in einer geeigneten Umgebung von P von einem ν an absolut beliebig klein sein müssen, was wiederum der Voraussetzung widerspricht.

Ist die Folge $f_\nu(z)$ eine Ausnahmefolge in P, so nehmen in jeder Umgebung von P *alle* Funktionen f_ν bis auf endlich viele sowohl Werte vom absoluten Betrage $\geqq n$ an, als auch Werte, die absolut kleiner als $\frac{1}{n}$ sind, wo wir $n > 1$ beliebig groß annehmen können. Denn wären in irgendeiner Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ von P unendlich viele Funktionen $f_\nu($ durchweg absolut kleiner als n, so würde sich aus diesen Funktionen nach dem Montelschen Auswahlsatz eine in einer Umgebung von P gleichmäßig konvergente Teilfolge herausgreifen lassen. Und ebenso können n

endlich viele f_ν in $\mathfrak{U}(P)$ durchweg absolut größer als $\frac{1}{n}$ bleiben, da sich sonst aus der Folge $\frac{1}{f_\nu}$ eine in einer Umgebung von P gleichmäßig konvergierende Unterfolge herausgreifen ließe.

Wir behaupten nun, daß für jeden J-Punkt P einer Funktionenschar $\mathfrak{F}$ sich aus $\mathfrak{F}$ eine Ausnahmefolge in P herausgreifen läßt. Denn gibt es in einem J-Punkt z_0 von $\mathfrak{F}$ keine Ausnahmefolge von $\mathfrak{F}$, so gibt es nach dem oben Bemerkten eine gegen z_0 konvergierende Folge von Punkten z_ν, etwa mit $|z_\nu - z_0| \leqq \frac{1}{2\nu}$, so daß zu jedem z_ν eine Ausnahmefolge in z_ν aus $\mathfrak{F}$ gehört. Daher gibt es zu jedem z_ν eine Funktion f_ν aus $\mathfrak{F}$, die im Kreise $|z - z_\nu| \leqq \frac{1}{2\nu}$, daher auch im Kreise $|z - z_0| \leqq \frac{1}{\nu}$ sowohl Werte vom absoluten Betrage $\geqq \nu$, als auch Werte vom absoluten Betrage $\leqq \frac{1}{\nu}$ annimmt. Die Funktionenfolge $f_\nu(z)$ kann nun in keiner Umgebung von z_0 eine gleichmäßig konvergente Teilfolge haben. Denn konvergierte etwa eine Folge f_{ν_k} in einer Umgebung von z_0 gleichmäßig, und wäre $\lim f_{\nu_k}(z_0)$ endlich, etwa $= a$, so wären die absoluten Beträge der f_{ν_k} in einer Umgebung von z_0 von einem k an kleiner als $|a| + 1$, könnten also nicht für unendlich viele k größer als ν_k sein. Wäre aber $\lim f_{\nu_k}(z_0) = \infty$, so wären die absoluten Beträge der f_{ν_k} in einer Umgebung von z_0 von einem k an durchweg > 1, könnten also nicht $\leqq \frac{1}{\nu_k}$ werden.

Zusammenfassend erhalten wir den

Satz 1. *Ist eine Funktionenschar $\mathfrak{F}$ in einem Punkte P anormal, so läßt sich aus ihr eine unendliche Teilfolge herausgreifen, die in keiner Umgebung von P eine gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt, — eine Ausnahmefolge in P. Eine in einer Umgebung von P definierte Folge meromorpher Funktion ist dann und nur dann eine Ausnahmefolge, wenn die Funktionen jeder unendlichen Teilfolge dieser Folge in ihrer Gesamtheit in einer beliebig kleinen Umgebung von P alle Werte annehmen, höchstens bis auf zwei Werte.*

§ 3.

Charakterisierung normaler Funktionenscharen auf der Riemannschen Kugel.

Man erhält sehr viel einheitlicheren Überblick über die Eigenschaften normaler Funktionenscharen, wenn man zur Darstellung der Funktionswerte das Hilfsmittel benutzt, das die Ausnahmestellung des unendlich fernen Punktes zurücktreten läßt, nämlich die wohlbekannte, aber in dem

hier vorliegenden Zusammenhang noch nicht systematisch benutzte Darstellung komplexer Zahlenwerte auf der Kugel. Wir benutzen die stereographische Projektion auf die um den Nullpunkt als Mittelpunkt mit dem Radius 1 beschriebene Kugel vom „Nordpol“ aus. Das dabei einem Linienelement dz im Punkte z entsprechende Linienelement ds auf der Kugel ergibt sich, wie bekannt und leicht zu verifizieren ist, mit Hilfe der Formel

$$ds = \frac{2\,dz}{1+|z|^2}.$$

Die Punkte z mit $|z| \leqq 1$ werden auf Punkte der unteren Halbkugel abgebildet, die Linienelemente innerhalb des Einheitskreises werden dabei mit einem zwischen 1 und 2 liegenden Faktor multipliziert, der im Nullpunkt gleich 2 wird und mit der Annäherung an den Einheitskreis gegen 1 konvergiert. Die außerhalb des Einheitskreises liegenden Punkte gehen in Punkte der oberen Halbkugel über, die entsprechenden Linienelemente werden dabei verkleinert.

Wir nennen die kleinste Bogendistanz zwischen den Bildpunkten zweier Punkte z_1, z_2 die *Kugeldistanz zwischen* z_1 *und* z_2 und bezeichnen sie mit $|z_1, z_2|$. Offenbar gilt $|z_1, z_2| = |z_2, z_1|$, $|z_1, z_3| \leqq |z_1, z_2| + |z_2, z_3|$. Ferner geht der Bildpunkt von $\frac{1}{z}$ aus dem von z bekanntlich durch Spiegelung an der reellen Achse hervor[16]); daraus folgt, daß allgemein $\left|\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right| = |z_1, z_2|$ ist. Endlich sieht man leicht, daß für $|z| \leqq 1$ $2|z| \geqq |0, z| \geqq \frac{\pi}{2}|z|$ ist, wo das Gleichheitszeichen nur für $z = 0$ bzw. $|z| = 1$ gilt.

Nunmehr läßt sich die Definition der gleichmäßigen Konvergenz in einem Gebiete G für eine Folge von in G meromorphen Funktionen $f_\nu(z)$ gegen $F(z)$ folgendermaßen fassen: *Gehört zu jedem in* G *liegenden abgeschlossenen Bereich* B *und jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $n(\varepsilon, B)$, *so daß in* B $|f_\nu(z), F(z)| \leqq \varepsilon$ *für* $\nu \geqq n$ *wird, so sagen wir, die Folge* $f_\nu(z)$ *konvergiere gleichmäßig in* G *gegen* $F(z)$. Es genügt natürlich, daß zu jedem Teilbereich B von G und jedem $\varepsilon > 0$ ein $n(\varepsilon, B)$ gehört, so daß $|f_\nu(z), f_\mu(z)| \leqq \varepsilon$ für alle z in B und $\nu \geqq n$, $\mu \geqq n$ wird.

Wird die Abweichung der Werte einer Funktion voneinander durch die Kugeldistanzen gemessen, so ist eine meromorphe Funktion in ihren Polen „kugelstetig“. Namentlich lassen sich aber die Bedingungen für den normalen Charakter einer Funktionenschar von unserer neuen Auffassung aus prägnant formulieren.

---

[16]) Vgl. z. B. L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. 1, S. 51–52

Unter der *Kugelschwankung einer Funktion* auf einer Punktmenge rstehen wir die obere Grenze der Kugeldistanzen zwischen zwei be-bigen, von der Funktion auf dieser Punktmenge angenommenen Werten. erner verstehen wir unter der *Kugelschwankung einer Schar von auf ner Punktmenge definierten Funktionen* die obere Grenze der Kugel-hwankungen der einzelnen Funktionen auf dieser Punktmenge. Offenbar önnen so definierte Kugelschwankungen π nicht übersteigen.

Wird die Punktmenge, auf der die Kugelschwankungen bestimmt erden, „verkleinert", so werden dabei die Kugelschwankungen offenbar cht größer. Betrachtet man daher eine in einer Umgebung eines unktes P definierte Funktion bzw. Funktionsschar und bestimmt ihre ugelschwankung auf einer Folge von gegen P konvergierenden Um-ebungen von P, so konvergieren diese Schwankungen gegen einen Grenz-ert, der von der Wahl der Folge der Umgebungen unabhängig ist. Wir ezeichnen diesen Grenzwert als die *Kugelschwankung der Funktion bzw. r Funktionenschar in* P. Ist die Kugelschwankung der Funktion zw. der Funktionenschar in P gleich 0, so nennen wir diese Funktion zw. Funktionenschar in P *kugelstetig* bzw. *gleichmäßig kugelstetig*. Ist ne Funktionenschar $\mathfrak{F}$ in jedem Punkte eines Gebietes G definiert und leichmäßig kugelstetig — „*in G gleichmäßig kugelstetig*" —, so ergibt sich us dem Borelschen Überdeckungssatz: *Zu jedem (abgeschlossenen) Teil-ereich B von G und jedem $\varepsilon > 0$ gehört ein $\delta > 0$, so daß für jede unktion $f_\nu(z)$ aus $\mathfrak{F}$ $|f_\nu(z_1), f_\nu(z_2)| \leqq \varepsilon$ wird, sobald z_1, z_2 zwei Punkte us B mit $|z_1, z_2| \leqq \delta$ sind.* Wir behaupten nun

Satz 2. *Eine Schar $\mathfrak{F}$ von in einem Gebiet G meromorphen Funk-onen ist in G dann und nur dann normal, wenn sie in G gleich-äßig kugelstetig ist. Ist $\mathfrak{F}$ in G nicht normal, so fällt die Gesamtheit irer J-Punkte in G mit der Gesamtheit der Punkte zusammen, in denen ie Kugelschwankung von 0 verschieden ist, und zwar ist in solchen unkten die Kugelschwankung von $\mathfrak{F}$ gleich π.*

Wir beweisen zuerst, daß, wenn die Kugelschwankung von $\mathfrak{F}$ in inem Punkt z_0 von G kleiner als π ist, $\mathfrak{F}$ in P normal sein muß. Denn t f_ν eine Teilfolge von $\mathfrak{F}$, so können wir, um zu beweisen, daß sie eine n einer Umgebung von z_0 gleichmäßig konvergente Teilfolge enthält, zu-ächst eine solche Unterfolge herausgreifen, die in z_0 selbst konvergiert, nd wir können annehmen, daß f_ν selbst bereits in z_0 konvergieren, etwa egen w_0. Ferner gibt es nach Voraussetzung eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von z_0, n der die Schwankung der Folge f_ν kleiner als π ist. Daraus folgt aber, aß die Funktionen f_ν in $\mathfrak{U}$ von einem ν an Werte aus einem ganzen Gebiet icht annehmen, nämlich aus einer Umgebung des zum Bildpunkt von w_0 uf der Kugel diametralen Punktes. Daher ist die Folge f_ν in $\mathfrak{U}$ normal,

da sie nach einer geeigneten linearen Transformation in eine Folge vo für $\nu > \nu_0$ in $\mathfrak{U}$ gleichmäßig beschränkten Funktionen übergeht. Dahe enthalten f_ν eine in $\mathfrak{U}$ gleichmäßig konvergente Unterfolge, und $\mathfrak{F}$ ist i der Tat in P normal.

Zweitens zeigen wir, daß eine in einer Umgebung $\mathfrak{U}$ von z_0 gleich mäßig konvergente Funktionenfolge f_ν in z_0 die Kugelschwankung 0 hat Denn ist etwa $F(z)$ die Grenzfunktion, so können wir zu einem $\varepsilon >$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ derart finden, daß für $|z, z_0| \leqq \delta$ z in U enthalte und $|F(z), F(z_0)| \leqq \varepsilon$ ist. Daraus folgt, daß für $|z, z_0| \leqq \frac{\delta}{2}$ und fü $\nu \geqq \nu_0 = \nu_0(\delta, \varepsilon)$ $|f_\nu(z), f_\nu(z_0)| \leqq 2\varepsilon$ ist. Daher ist auch die Kugel schwankung der Folge f_ν $(\nu > \nu_0)$ im Punkte z_0 nicht größer als 4ε, un da die Kugelschwankung jeder der Funktionen f_ν $(\nu \leqq \nu_0)$ in z_0 gleich ist, ist die Schwankung der ganzen Folge f_ν in z_0 nicht größer als 4ε daher muß, da $\varepsilon > 0$ beliebig klein ist, die Kugelschwankung der Folge in z_0 gleich 0 sein.

Wir zeigen endlich, daß die Kugelschwankung einer in z_0 normale Funktionenschar $\mathfrak{F}$ in z_0 gleich 0 ist. Denn wäre die Kugelschwankun von $\mathfrak{F}$ in z_0 etwa $\varepsilon > 0$, so würde es eine Funktionenfolge f_ν aus und zwei Punktfolgen z_ν, z'_ν mit $z_\nu \to z_0$, $z'_\nu \to z_0$ geben, derart, da $\overline{\lim} |f_\nu(z_\nu), f_\nu(z'_\nu)| > \frac{\varepsilon}{2}$ ist; daher müßte es eine unendliche Teilfolge d f_ν geben, für die durchweg $|f_\nu(z_\nu), f_\nu(z'_\nu)| > \frac{\varepsilon}{2}$ ist; für jede Unterfolg dieser Teilfolge wäre dann die Kugelschwankung in z_0 nicht kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ so daß unsere Teilfolge keine in einer Umgebung von z_0 gleichmäß konvergente Unterfolge haben könnte, und $\mathfrak{F}$ wäre nicht normal. M diesen drei Tatsachen ist unser Satz 2 vollständig bewiesen.

Zugleich liefern uns unsere Überlegungen eine tiefere Einsicht in d Eigenschaften von Ausnahmefolgen. Zuerst ergibt sich ein neuer Bewe für die Tatsache, daß es in jedem J-Punkt von $\mathfrak{F}$ eine Ausnahmefol gibt. Denn da in einem solchen Punkt z_0 die Kugelschwankung von gleich π ist, gibt es eine Teilfolge f_ν von $\mathfrak{F}$ und zwei Punktfolgen z_ν, z so daß $z_\nu \to z_0$, $z'_\nu \to z_0$ und $|f_\nu(z_\nu), f_\nu(z'_\nu)| \to \pi$ gilt. Eine solche Fol ist aber offenbar eine Ausnahmefolge in z_0, da keine Teilfolge dies Folge in einer noch so kleinen Umgebung von z_0 gleichmäßig konve gieren kann.

Zweitens können wir nun zeigen: *Ist f_ν eine Ausnahmefolge mer morpher Funktionen in z_0, $\varepsilon > 0$ und Ω ein beliebig kleiner Kreis um z so nimmt jede der Funktionen f_ν für $\nu > \nu_0(\varepsilon, \Omega)$ in Ω alle Werte a höchstens mit Ausnahme gewisser Werte, die jedenfalls innerhalb zwe Kugelkreise mit dem Radius ε liegen.* Denn wäre dies falsch, so wür

s einen Kreis Ω um z_0, ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge der f_ν geben, so aß jede Funktion f_ν dieser Teilfolge in Ω drei Werte w_ν, w_ν', w_ν'' aus-ißt mit $|w_\nu, w_\nu'| \geqq \varepsilon$, $|w_\nu', w_\nu''| \geqq \varepsilon$, $|w_\nu'', w_\nu| \geqq \varepsilon$. Wir können offenbar nnehmen, daß bereits die Funktionenfolge f_ν selbst diese Eigenschaft hat. ine solche Funktionenfolge ist aber normal in Ω. Denn wir können aus er Folge der Indizes ν eine solche Teilfolge herausgreifen, für die w_ν egen einen Grenzwert w konvergiert, aus dieser Teilfolge wieder eine eitere, für die die Folge w_ν' gegen w' konvergiert, und dann eine weitere nterfolge, für die auch w_ν'' gegen w'' konvergiert. Wir können daher an-ehmen, daß von vornherein $w_\nu \to w$, $w_\nu' \to w'$, $w_\nu'' \to w''$ gilt. Dann folgt uch $|w, w'| \geqq \varepsilon$, $|w', w''| \geqq \varepsilon$, $|w'', w| \geqq \varepsilon$. Man kann dann jedem ε ine solche lineare Transformation $w^* = \frac{a_\nu w + b_\nu}{c_\nu w + d_\nu}$ zuordnen, für die die ahlenwerte w_ν, w_ν', w_ν'' bzw. in $0, 1, \infty$ übergeführt werden, und für die ugleich $a_\nu \to a$, $b_\nu \to b$, $c_\nu \to c$, $d_\nu \to d$, $|ad - dc| > 0$ ist. Nun lassen ie Funktionen $f_\nu^* = \frac{a_\nu f_\nu + b_\nu}{c_\nu f_\nu + d_\nu}$ in Ω die Werte $0, 1, \infty$ aus, bilden also ine normale Funktionenfamilie. Daher ist nach dem am Schluß von I § 1 ezeigten auch die Folge f_ν normal.

Unsere obige hiermit bewiesene Behauptung hat noch stark qualitativen harakter. Man kann ihr nun die folgende quantitative Tatsache an die eite stellen: *Zwei beliebig kleinen positiven Zahlen ε, δ entspricht ein ositives $\varphi(\varepsilon, \delta) < 1$, so daß, wenn eine in einem Kreise Ω um z_0 mit em Radius r meromorphe Funktion $f(z)$ im Kreise $|z - z_0| \leqq \varphi(\varepsilon, \delta) r$ ie Kugelschwankung $\geqq \delta$ hat, sie im Kreise Ω alle Werte annimmt, öchstens mit Ausnahme von Werten, deren Bilder auf der Riemannschen Kugel innerhalb von zwei Kugelkreisen mit dem Radius ε liegen.* Denn äre dies falsch, so würde es eine Folge f_ν von im Einheitskreise K mero-norphen Funktionen geben, von denen jede in K drei Werte w_ν, w_ν', w_ν'' mit $|w_\nu, w_\nu'| \geqq \varepsilon$, $|w_\nu', w_\nu''| \geqq \varepsilon$, $|w_\nu'', w_\nu| \geqq \varepsilon$ ausläßt und deren Kugel-chwankungen in einer Folge von Kreisen K_ν um den Nullpunkt mit gegen) konvergierenden Radien nicht kleiner als δ sind, wo ε, δ feste positive Konstanten sind. Da aber dann keine unendliche Teilfolge der f_ν im Nullpunkt die Schwankung 0 hat, ist eine solche Funktionenfolge in ihm ine Ausnahmefolge, daher müssen nach dem oben Gezeigten alle f_ν von einem ν an in K alle Werte annehmen, höchstens bis auf Werte, deren Bilder innerhalb von zwei Kugelkreisen mit den Radien $\leqq \frac{\varepsilon}{4}$ liegen, ent-gegen der Annahme.

Man kann auch eine recht genaue Abschätzung für $\varphi(\varepsilon, \delta)$ herleiten nd überhaupt die meisten Abschätzungen aus dem Picardschen Ideen-reis in die Sprache der Kugeldistanzen übersetzen, wobei sie eine sehr

viel prägnantere und elegantere Form annehmen. Wir werden indesse diese Andeutungen erst in einer späteren Abhandlung ausführen, da die uns hier zu weit führen würde.

Wir bemerken endlich, daß auch der von uns vor einigen Jahren ve öffentlichte Satz über die Güte der Konvergenz bei gleichmäßig konve genten Folgen analytischer Funktionen[17]): „*Die Güte der Konvergenz eine Folge regulärer Funktionen in zwei Teilbereichen eines zusammenhänge den Gebietes G gleichmäßiger Konvergenz — bzw. auf zwei in G verla fenden Kurven — ist von vergleichbarer Größenordnung*“ — auch für gleich mäßig konvergente Folgen meromorpher Funktionen richtig bleibt, wen „die Güte der Konvergenz“ mit Hilfe der Kugeldistanzen gemessen wir Die Konstanten hängen dann allerdings nicht nur von der geometrische Konfiguration, sondern auch von der Grenzfunktion ab.

Es ist noch von Interesse zu bemerken, daß die oben hergeleitete Tatsachen zum größten Teil vom analytischen Charakter der betrachtete Funktionen unabhängig sind. Ist etwa $\mathfrak{F}$ eine Menge von kugelstetige Funktionen $f(z)$, von denen aber sonst nichts vorausgesetzt wird (nehme die Funktionen $f(z)$ nur reele Werte an, so genügt es natürlich, ihre Wer mit Hilfe der stereographischen Projektion auf dem Einheitskreise da zustellen), so kann man ebenso wie oben die Schwankung der Funktione menge in einem Bereich und in einem Punkt definieren und die in eine Gebiet G gleichmäßig stetigen Funktionenmengen betrachten. Wiederu ergibt sich als eine notwendige und hinreichende Bedingung für den no malen Charakter einer Funktionenmenge in einem Gebiet G die gleich mäßige Stetigkeit dieser Funktionenmenge in G. Charakteristisch für ei in G anormale Funktionenmenge ist die Existenz von Punkten — wir wolle sie als *Ausnahmepunkte* bezeichnen —, in denen eine gewisse unendlich Teilfolge aus $\mathfrak{F}$ keine in einer noch so kleinen Umgebung des betreffende Ausnahmepunktes konvergente Unterfolge enthält. Andererseits wird ma J-Punkte von $\mathfrak{F}$ als solche Punkte definieren, in deren beliebiger Un gebung $\mathfrak{F}$ anormal ist. Wiederum gilt offenbar der Satz, daß es in jede beliebigen Umgebung eines J-Punktes von $\mathfrak{F}$ wenigstens einen Ausnahm punkt gibt, so daß die Menge der J-Punkte aus den Ausnahmepunkte und deren Häufungsstellen besteht. Dagegen gilt, wie man an Beispiele zeigen kann, im allgemeinen nicht mehr der Satz, daß die Menge d Ausnahmepunkte abgeschlossen ist, daß also jeder J-Punkt zugleich e

[17]) Über vollständige Gebiete gleichmäßiger Konvergenz von Folgen analytisch Funktionen, Hamb. Math. Abh. 1, S. 329–330; ferner: Über allgemeine Konvergen sätze der komplexen Funktionentheorie, Jahresber. d. D. M. V. 32, S. 193; Über d Bedeutung der Jensenschen Formel für einige Fragen der komplexen Funktione theorie, Acta Szeged 1, S. 80–87.

usnahmepunkt ist. Diese Tatsache, die Abgeschlossenheit der Menge der usnahmepunkte, folgt im Falle analytischer Funktionenfolgen daraus, daß e Schwankung einer Menge analytischer Funktionen in einem Punkt ent- eder 0 oder π ist. Im allgemeinen sind aber beliebige zwischen 0 und π egende Werte der Schwankung möglich.

§ 4.

Quantitative Charakterisierung normaler Funktionenscharen in der Gaußschen Zahlenebene.

Für eine tiefergehende Diskussion ist es von Interesse, den quanti- tiven Kern, der im Begriff einer normalen Schar meromorpher Funk- onen steckt, unter Benutzung der Gaußschen Zahlenebene zu charak- risieren. Wir behaupten:

(A) *Ist $\mathfrak{F}$ eine in einem Gebiet G normale Schar meromorpher unktionen, so gehört zu jedem Teilbereich H von G und zu jeder posi- ven Konstanten c ein endliches $N(H, c)$ derart, daß keine Funktion us $\mathfrak{F}$, die in wenigstens einem Punkte von H absolut $\leqq c$ ist, in H ehr als $N(H, c)$ Pole haben kann.*

Denn wäre die Behauptung falsch, so würde es einen Teilbereich H on G geben, ferner ein $c > 0$ und eine solche Folge f_ν von Funktionen us $\mathfrak{F}$, daß jedes f_ν in wenigstens einem Punkt von H absolut $\leqq c$ ist, abei aber allgemein f_ν mehr als ν Pole in H hat. Die Grenzfunktionen er in G gleichmäßig konvergenten Teilfolgen von f_ν müßten dann in H nendlich viele Pole haben und daher identisch gleich ∞ sein. Keine eilfolge der f_ν kann aber gleichmäßig gegen ∞ konvergieren, da jedes f_ν n H einen Wert annimmt, der absolut $\leqq c$ ist. — Diese Tatsache läßt ich unter Benutzung der Riemannschen Kugel in zwei Richtungen ver- llgemeinern:

(A°) *Ist $\mathfrak{F}$ eine in einem Gebiet G normale Schar meromorpher unktionen, so gehört zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem Teilbereich H von G ine ganze Zahl $N(H, \varepsilon)$, derart, daß jede Funktion aus $\mathfrak{F}$ in H jeden Vert höchstens N-mal annimmt, bis auf gewisse Werte, die innerhalb ines Kugelkreises vom Radius ε liegen.* — Denn sonst würde es einen eilbereich H von G, ein $\varepsilon > 0$, eine unendliche Folge von Funktionen f_ν us G, ferner zwei unendliche Zahlenfolgen w_ν, w'_ν mit $|w_\nu, w'_\nu| \geqq \varepsilon$ eben, derart, daß f_ν jeden der beiden Werte w_ν, w'_ν in H mehr als -mal annimmt. Wir können nach der Annahme aus f_ν eine in G gleich- näßig konvergente Teilfolge herausgreifen, aus dieser ferner eine solche Unterfolge, daß für entsprechende Indizes $w_\nu \to w$, $w'_\nu \to w'$, $|w, w'| \geqq \varepsilon$

gilt. Die Grenzfunktion müßte aber dann in H jeden der Werte w, w unendlich oft annehmen, daher sowohl identisch gleich w, als auch iden tisch gleich w' sein[18]).

(A$^{\infty}$) *Ist $\mathfrak{F}$ eine in einem Gebiet G normale Schar meromorph Funktionen und sind K_1, K_2 zwei Kreisflächen auf der Riemannsche Kugel, die ganz außerhalb voneinander liegen, so gehört zu jedem Tei bereich H von G ein $N(H, K_1, K_2)$ derart, daß keine Funktion, die in wenigstens einen Wert aus K_1 annimmt, in H irgendeinen Wert aus mehr als $N(H, K_1, K_2)$-mal annehmen kann.* — Denn sonst gäbe es ein Teilfolge f_ν von $\mathfrak{F}$ und einen Teilbereich H von G, derart, daß jedes f_ν in wenigstens einen Wert aus K_1 annimmt und wenigstens einen Wert aus mehr als ν-mal annimmt. Jede in G gleichmäßig konvergente Teilfolg von f_ν müsste dann gegen eine Funktion konvergieren, die in H weni stens einen Wert aus K_1 annimmt, andererseits aber wenigstens eine Wert aus K_2 unendlich oft annimmt, also dieser Konstanten aus K_2 iden tisch gleich ist.

(B) *Ist $\mathfrak{F}$ eine in einem den unendlichen fernen Punkt nicht i Innern enthaltenden Gebiet G normale Schar meromorpher Funktione so gehört zu jedem Teilbereich H von G und jedem $c > 0$ ein solch $\Omega(H, c)$, daß jede Funktion f aus $\mathfrak{F}$ innerhalb der um ihre in H liegend Pole mit den Radien $\Omega(H, c)$ beschriebenen Kreise durchweg absolut $\geqq c$ i*

Die Behauptung folgt offenbar sofort daraus, daß die Funktione von $\mathfrak{F}$ in G gleichmäßig kugelstetig sind. Ohne Benutzung der frühere Entwicklungen läßt sie sich wie folgt einsehen: wäre sie falsch, so würd es eine unendliche Folge von Funktionen f_ν aus $\mathfrak{F}$, ferner zwei unendlich Punktfolgen z_ν, z'_ν mit $z_\nu - z'_\nu \to 0$, wobei die Punkte z_ν in einem Tei bereich H von G liegen, geben, derart, daß jedes f_ν in z_ν einen Pol ha in z'_ν dagegen einen Wert annimmt, der absolut kleiner ist als eine fes positive Konstante c. Es gibt dann eine solche in G gleichmäßig kon vergente Unterfolge f_{ν_k} von f_ν, für die z_{ν_k} und damit auch z'_{ν_k} gegen eine Punkt P konvergieren. Die Grenzfunktion der f_{ν_k} müßte dann in P einer seits einen Pol, andererseits einen Wert vom absoluten Betrage $\leqq c$ habe

(C) *Ist $\mathfrak{F}$ eine in einem den unendlich fernen Punkt nicht im Inne enthaltenden Gebiet G normale Schar meromorpher Funktionen, so g hört zu jedem Teilbereich H von G, jedem noch so großen $c > 0$ u*

---

[18]) Dieselbe Überlegung lehrt offenbar: *Enthält $\mathfrak{F}$ keine Teilfolge, die gegen ei feste Konstante a konvergiert, so nimmt in jedem Teilbereiche H von G jede Funkti von $\mathfrak{F}$ den Wert a höchstens $N_a(H)$-mal an; ist diese Voraussetzung für jede Konstante aus einem festen Bereich erfüllt, so läßt sich $N_a(H)$ gleichmäßig für alle a aus diese Bereich wählen.*

dem noch so kleinen $\varrho > 0$ ein $\Omega(H, c, \varrho)$ mit der folgenden Eigenschaft: Ist eine Funktion f von $\mathfrak{F}$ in wenigstens einem Punkt von H absolut $\leqq c$, so ist f in H außerhalb der um die Pole von f mit den Radien ϱ beschriebenen Kreise kleiner als $\Omega(H, c, \varrho)$.

Denn es sei H_1 ein Teilbereich von G, der H ganz im Innern enthält, H_2 ein Teilbereich von G, der H_1 ganz im Innern enthält. Es genügt, den Beweis unter der Voraussetzung zu führen, daß *jede* Funktion von $\mathfrak{F}$ in H in wenigstens einem Punkte absolut $\leqq c$ ist. Ferner genügt es, $\varrho < 1$ anzunehmen. Wir nehmen zuerst an, daß die Funktionen von $\mathfrak{F}$ in H_1 keine Pole haben. Wäre dann die Behauptung falsch, so würde es eine Teilfolge f_ν von Funktionen aus $\mathfrak{F}$ geben, von denen jede in einem Punkt von H absolut $\leqq c$ und in einem Punkt von H absolut $\geqq \nu$ ist. Jede Grenzfunktion $F(z)$ der Folge f_ν müßte dann in H sowohl einen Wert vom absoluten Betrage $\leqq c$ als auch den Wert ∞ annehmen. Da sie aber dann nicht identisch ∞ ist, müßte jede der Funktionen einer gegen $F(z)$ konvergenten Teilfolge der f_ν, bis auf endlich viele, in H_1 wenigstens einen Pol haben, entgegen der Annahme.

Haben aber Funktionen von $\mathfrak{F}$ in H_1 Pole, so können sie nach (A) in H_1 höchstens $N = N(H_1, c)$ Pole haben. Hat dann eine Funktion f aus $\mathfrak{F}$ in H_1 die Pole $a_1, \ldots, a_n$, so bilden wir $\Pi_f = \prod_{\nu=1}^{n} (z - a_\nu)$, so daß das Produkt $f^* = f\Pi_f$ in H_1 regulär ist. Wir behaupten nun, daß die Funktionen f^* in G eine normale Funktionenschar bilden. Es genügt, zu beweisen, daß, wenn eine Folge f_ν von Funktionen aus $\mathfrak{F}$ in G gleichmäßig konvergiert, die entsprechende Folge f_ν^* eine in G gleichmäßig konvergente Teilfolge enthält. Man kann nun aus den f_ν eine unendliche Teilfolge von Funktionen herausgreifen, die in H_1 gleich viele Pole haben, wobei sich diese Pole in konvergente Folgen anordnen lassen. Und wir können annehmen, daß dies bereits für die Funktionen f_ν der Fall ist. Dann konvergieren auch die Polynome Π_{f_ν} in G gleichmäßig gegen ein Polynom $\Pi(z)$. Ist nun P ein Punkt von G, der keine Nullstelle von $\Pi(z)$ ist, so ist die Konvergenz der f_ν^* in einer Umgebung von P nach den Bemerkungen in I § 1 klar. Ist aber P eine Nullstelle von $\Pi(z)$, so zeichne ich um P eine Kreislinie K, deren Inneres mit $\mathfrak{K}$ bezeichnet sei, die samt ihrem Inneren ganz in H_2 liegt und alle von P verschiedenen Nullstellen von $\Pi(z)$ außerhalb läßt. Nach Voraussetzungen hat von einem ν an jedes f_ν in $\mathfrak{K}$ wenigstens einen Pol. Ich kann daher nach (B) den Radius r von K so klein wählen ($\leqq \frac{1}{2}\Omega(H_2, 1)$), daß jede der Funktionen f_ν von einem ν an auf K und in $\mathfrak{K}$ absolut $\geqq 1$ ist, so daß die Funktionen f_ν^* von einem ν an in $\mathfrak{K}$ und auf K keine Nullstellen haben. Andererseits konvergiert die Folge f_ν^* in einer Umgebung jedes

Punktes von K gleichmäßig, daher gilt dasselbe für die Folge $\frac{1}{f_\nu^*}$; d Funktionen dieser Folge sind aber von einem ν an in $\mathfrak{R}$ und auf K r gulär, daher konvergiert die Folge $\frac{1}{f_\nu^*}$ auf $\mathfrak{R}$ im gewöhnlichen Sinne gleic mäßig, womit der normale Charakter der Menge der Funktionen f^* e wiesen ist.

Ist $d > 1$ größer als der Durchmesser von H_1 (die größte Distanz zwische zwei Punkten von H_1), so gilt in H allgemein $|\Pi_{f_\nu}| \leqq d^N$, und dah nimmt jede Funktion der in G normalen Funktionenschar f^* in weni stens einem Punkt von H einen Wert vom absoluten Betrage $\leqq cd$ Da diese Funktionen in H_1 regulär sind, sind sie nach dem bereits b wiesenen Spezialfall von (C) in H absolut kleiner als eine Konstante Beschreibt man nun um die Pole einer Funktion f aus $\mathfrak{F}$ Kreise mit d Radien ϱ, $1 > \varrho > 0$, so gilt außerhalb dieser Kreise $|\Pi_f| \geqq \varrho^N$, u daher in H wegen $|f^*| \leqq C$: $|f| \leqq C\varrho^{-N}$, w. z. b. w.

Zugleich liefert unser Beweisverfahren Aufschluß über die Abhängi keit von $\Omega(H, c, \varrho)$ von ϱ.

Wir behaupten nun, daß *die Eigenschaften* (B), (C) *eine in G no male Schar meromorpher Funktionen vollständig charakterisieren.* genügt zu beweisen, daß sich aus jeder Teilfolge f_ν einer Schar von in meromorphen Funktionen, die den Bedingungen (B), (C) genügt, eine einer Umgebung eines beliebigen Punktes P von G gleichmäßig konvergen Folge herausgreifen läßt. Wir können dabei annehmen, daß die Wer der f_ν in P selbst bereits eine konvergente Zahlenfolge bilden, da w uns sonst auf eine geeignete unendliche Teilfolge der f_ν beschränk könnten. Es sei K ein (samt seiner Peripherie) ganz in G liegender Kre Ist der Grenzwert der f_ν in P beschränkt, so können wir annehmen, d die Werte aller f_ν in P beschränkt, und zwar etwa absolut $\leqq c$ sin dann lehrt die Anwendung von (B) auf K, daß P außerhalb der um d Pole der f_ν in K mit den Radien $\Omega(K, c+1)$ beschriebenen Kreise lie daß also nach (C) die Funktionen f_ν im Kreise um P mit dem Radi $\frac{1}{2}\Omega(K, c+1)$ gleichmäßig beschränkt sind und daher eine in diesem Kr gleichmäßig konvergente Teilfolge haben. Konvergieren aber die Wer der f_ν in P gegen ∞, und sind die Werte der f_ν in K bis auf endli viele f_ν, von denen wir dann absehen können, durchweg absolut $\geqq 1$, ist die Funktionenfolge $\frac{1}{f_\nu}$ in K gleichmäßig beschränkt und hat dah eine in einer Umgebung von P gleichmäßig konvergierende Teilfolge. Gi es aber trotz der Konvergenz der f_ν in P gegen ∞ unendlich viele die in wenigstens einem Punkte von K absolut $\leqq 1$ sind, so können w annehmen, daß dies für alle f_ν zutrifft. Dann müssen in jedem noch

kleinen Kreis um P von einem ν an Pole der f_ν liegen, da sonst nach (C), angewandt auf $H = K$ und $c = 1$, unendlich viele f_ν in P gleichmäßig beschränkt wären; daher sind nach (B) im Kreise um P mit dem Radius $\frac{1}{2}\Omega(K, 1)$ die absoluten Beträge der f_ν von einem ν an durchweg $\geqq 1$, so daß die Folge $\frac{1}{f_\nu}$ wiederum eine in einer Umgebung von P gleichmäßig konvergierende Teilfolge haben muß.

Zweites Kapitel.

Juliasche Folgen und Ausnahmefunktionen.

Wir wenden uns nunmehr zur Untersuchung der Juliaschen Fragestellungen bei Funktionen vom meromorphen Charakter in der Umgebung einer wesentlich singulären Stelle, die wir offenbar in den unendlich fernen Punkt verlegen können.

§ 1.

Orientierende Sätze.

Es sei $f(z)$ eine für $|z| \geqq R$ bis eventuell auf $z = \infty$ meromorphe Funktion. Es sei $z = \sigma(t)$ $(1 \leqq t < \infty)$ Parameterdarstellung einer stetigen Kurve, die vom Punkt $z = 1$ (für $t = 1$) außerhalb des Kreises $|z| = 1$ ins Unendliche verläuft. Wir werden eine solche Kurve als eine σ-Kurve bezeichnen. Es sei ferner $f(z\sigma(t)) = f_t(z)$ gesetzt. Dann nennen wir $z = \sigma(t)$ eine *Juliasche Kurve* (*J-Kurve*) *für* $f(z)$, wenn es einen von 0 und ∞ verschiedenen Punkt z_0 gibt, in dem die Funktionenschar $f_t(z)$ $(t > t_0)$ für jedes noch so große t_0 nicht normal ist. Ist dann Ω ein beliebig kleiner Kreis um einen solchen Punkt z_0, und betrachtet man den von allen Kreisen $\sigma(t)\,\Omega$ überdeckten Bereich, so nimmt $f(z)$ in diesem Bereich alle Werte an, höchstens mit Ausnahme von zwei Werten, und sogar unendlich oft.

Es sei ferner σ_ν eine Folge komplexer Zahlen mit $\sigma_\nu \to \infty$ und etwa $|\sigma_\nu| \geqq 1$. Man setze ferner $f(\sigma_\nu z) = f_\nu(z)$. Gibt es einen von 0 und ∞ verschiedenen Punkt z_0, in dem die Funktionenschar $f_\nu(z)$ nicht normal ist, so nennen wir die Folge σ_ν eine *Juliasche Folge* (*J-Folge*) *für* $f(z)$ und die Gesamtheit der Punkte z_0 mit der obigen Eigenschaft die *J-Menge* $(J(\sigma_\nu))$ von (σ_ν) für $f(z)$. Enthält eine σ_ν-Folge eine J-Folge für $f(z)$, so ist sie selbst eine J-Folge für $f(z)$.

Während es für jede im Endlichen reguläre Funktion mit einer wesentlichen Singularität für $z = \infty$ sowohl J-Folgen als auch J-Kurven gibt, braucht dies, wie Herr Julia gezeigt hat, bei Funktionen vom meromorphen Charakter nicht mehr der Fall zu sein. Wir zeigen nun zunächst, daß alle derartigen Ausnahmen nur simultan auftreten können.

Satz 3. *Es sei $f(z)$ für $|z| \geqq R$ bis eventuell auf $z = \infty$ meromorph. Es gibt dann und nur dann J-Kurven für $f(z)$, wenn es wenigstens eine J-Folge für $f(z)$ gibt, und dann ist jede σ-Kurve eine J-Kurve für $f(z)$.*

Beweis. Es sei $z = \sigma(t)$ $(1 \leqq t < \infty,\ \sigma(1) = 1)$ eine J-Kurve für $f(z)$. Dann ist in einem Punkt z_0 $(z_0 \neq 0,\ z_0 \neq \infty)$ die Funktionenschar $f(z\sigma(t))$ $(t > t_0)$ für jedes $t_0 > 1$ nicht normal, es gibt daher eine unendliche Folge positiver Zahlen t: $1 \leqq t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$, $t_\nu \to \infty$, so daß die Funktionenfolge $f(z\sigma(t_\nu))$ eine Ausnahmefolge für z_0 ist, d. h. keine in einer noch so kleinen Umgebung von z_0 konvergente Teilfolge enthält. Man setze nun $\sigma(t_\nu) = \sigma_\nu$, dann ist offenbar σ_ν eine J-Folge für $f(z)$, und z_0 ist ein Punkt der zugehörigen J-Menge.

Es sei nun umgekehrt σ_ν eine J-Folge für $f(z)$, und z_0 sei ein Punkt der J-Menge $J(\sigma_\nu)$ für $f(z)$. Wir können annehmen, indem wir nötigenfalls uns auf eine Teilfolge der σ_ν beschränken, daß bereits die Funktionenfolge $f(\sigma_\nu z)$ selbst eine Ausnahmefolge in z_0 ist. Es sei ferner $z = \sigma(t)$ irgend eine σ-Kurve. Dreht man diese Kurve um den Nullpunkt, so geht durch jeden der Punkte σ_ν wenigstens eine Kurve $z = e^{i\theta_\nu}\sigma(t)$, etwa für $t = t_\nu$ hindurch, so daß $\sigma_\nu = e^{i\theta_\nu}\sigma(t_\nu)$ ist. Es sei θ eine Häufungsstelle der θ_ν und etwa $\theta_{\nu_k} \to \theta$. Man sieht nun leicht, daß die Funktionenfolge $f(z\sigma(t_{\nu_k}))$ in der Umgebung des Punktes $e^{i\theta}z_0$ nicht normal ist; denn wäre eine Teilfolge von $f(z\sigma(t_{\nu_k}))$ in einer Umgebung von $e^{i\theta}z_0$ gleichmäßig konvergent, so folgt, wenn man $e^{i(\theta-\theta_{\nu_k})} = \vartheta_k$ $(\vartheta_k \to 1)$ setzt, daß die entsprechende Teilfolge von $f(ze^{i\theta}\sigma(t_{\nu_k})) = f(z\vartheta_k\sigma_{\nu_k})$ in einer Umgebung von z_0 gleichmäßig konvergiert. Daraus folgt nach dem Hilfssatz 1, daß auch die entsprechende Teilfolge von $f(z\sigma_{\nu_k})$ in einer Umgebung von z gleichmäßig konvergiert, entgegen der Voraussetzung. Damit ist der Satz 3 bewiesen.

Zweitens beweisen wir den

Satz 4. *Es sei $f(z)$ für $|z| \geqq R$ meromorph und für $z = \infty$ wesentlich singulär. Ist σ_ν eine J-Folge für $f(z)$, $\varkappa_\nu$ eine Folge komplexer Zahlen mit $\frac{1}{a} \leqq |\varkappa_\nu| \leqq a$, wo $a > 0$ und von ν unabhängig ist, so ist auch $\varkappa_\nu\sigma_\nu$ eine J-Folge für $f(z)$.*

Beweis. Es sei z_0 ein Punkt der J-Menge $J(\sigma_\nu)$. Wir können annehmen, daß die ganze Folge $f(\sigma_\nu t)$ eine Ausnahmefolge in z ist, da wir uns sonst auf die Betrachtung einer geeigneten Teilfolge von (σ_ν) beschränken könnten und nur zu beweisen brauchten, daß die entsprechende Teilfolge von $\varkappa_\nu\sigma_\nu$ eine J-Folge für $f(z)$ ist. Es sei dann $\varkappa$ eine Häufungsstelle der Folge $\varkappa_\nu$. Wir können ferner annehmen, daß $\varkappa_\nu \to$

Dann ist aber $\frac{z_0}{\varkappa}$ *ein Punkt der J-Menge der Folge* $(\varkappa_\nu \sigma_\nu)$. Denn hätte die Folge $f(\varkappa_\nu \sigma_\nu z)$ eine in einer Umgebung von $\frac{z_0}{\varkappa}$ gleichmäßig konvergente Teilfolge $f(\varkappa_{\nu_k} \sigma_{\nu_k} z)$, so würde, $\frac{\varkappa_{\nu_k}}{\varkappa} = \vartheta_k$ gesetzt, die Folge $f(\vartheta_k \sigma_{\nu_k} z)$ in einer Umgebung des Punktes z_0 gleichmäßig konvergieren. Wegen $\vartheta_k \to 1$ folgt aber daraus die gleichmäßige Konvergenz der entsprechenden Folge $f(\sigma_{\nu_k} z)$, w. z. b. w.[19])

Wir werden eine Funktion $f(z)$, für die es keine J-Folgen gibt, als eine *Juliasche Ausnahmefunktion* bezeichnen. Für eine solche Funktion ist offenbar charakteristisch, daß wenn σ_ν eine beliebige Folge komplexer Zahlen mit $\sigma_\nu \to \infty$ ist, es eine unendliche Teilfolge σ_{ν_k} dieser Folge gibt, für die $f(\sigma_{\nu_k} z)$ in einer Umgebung eines jeden von 0 und ∞ verschiedenen Punktes gleichmäßig konvergieren. Offenbar ist jede rationale Funktion von z (allgemeiner, jede Funktion, die sich in der Umgebung des unendlich fernen Punktes rational verhält) eine Juliasche Ausnahmefunktion. Ferner ist mit $f(z)$ auch $\frac{1}{f(z)}$ (und allgemeiner jede lineare Funktion $\frac{\alpha f+\beta}{\gamma f+\delta}$ $(\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$ von $f(z)$) eine Juliasche Ausnahmefunktion.

Wir wenden uns nunmehr zur Bestimmung sämtlicher Juliaschen Ausnahmefunktionen.

§ 2.
Ein Hilfssatz.

Ist $f(z) \not\equiv 0$ eine für $|z| \leqq r$ meromorphe Funktion, so setzen wir

$$\mathfrak{M}(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg |f(re^{i\theta})|\, d\theta. \tag{1}$$

Für diese Mittelwerte gilt die Jensensche Formel:

$$e^{\mathfrak{M}(r,f)} = |d_0| r^p \frac{\Pi\left(\frac{r}{|a_\nu|}\right)}{\Pi\left(\frac{r}{|b_\nu|}\right)}, \tag{2}$$

wo $f(z)$ als für $|z| \leqq r$ meromorph vorausgesetzt wird, in der Umgebung des Nullpunktes von der Form $f(z) = d_0 z^p + d_1 z^{p+1} + \ldots (d_0 \neq 0)$ ist, und a_ν bzw. b_ν alle von 0 verschiedenen Nullstellen und Pole von $f(z)$ durchlaufen, die absolut $\leqq r$ sind, mehrfache entsprechend gezählt.

[19]) Natürlich ist für den Beweis der Sätze 3 und 4 die Existenz einer Ausnahmefolge in einem J-Punkte nicht wesentlich, und man kommt auch mit der von Herrn Julia gefundenen charakteristischen Eigenschaft der J-Punkte aus. Die Benutzung der Ausnahmefolgen macht indessen die Beweise durchsichtiger.

Wir beweisen nun den

Hilfssatz 2. *Es sei $f_\nu(z)$ eine Folge von in einem Kreisring $r_1 < |z| < r_2$ meromorphen Funktionen, die in diesem Kreisring gleichmäßig gegen $F(z)$ konvergieren. Dann konvergiert auch die Folge $\mathfrak{M}(\varrho, f_\nu)$ gegen $\mathfrak{M}(\varrho, F)$, gleichmäßig für feste r_1', r_2'' und alle ϱ mit $r_1 < r_1' \leqq \varrho \leqq r_2' < r_2$, wenn $\mathfrak{M}(\varrho, 0) = -\infty$, $\mathfrak{M}(\varrho, \infty) = \infty$ gesetzt wird.*

Ist $F(z) \equiv \infty$ oder $\equiv 0$, so ist die Behauptung klar. Wir können also annehmen, daß $F(z)$ im Kreisring $\frac{r_1+r_1'}{2} \leqq |z| \leqq \frac{r_2+r_2'}{2}$ bis auf die Pole $b_1, \ldots, b_m$ und die Nullstellen $a_1, \ldots, a_n$ endlich und von 0 verschieden ist. Dann hat jede Funktion $f_\nu(z)$ von einem ν an im Kreisring $r_1 \leqq |z| \leqq r_2$ m gewisse Pole $b_1^{(\nu)}, \ldots, b_m^{(\nu)}$ und n gewisse Nullstellen $a_1^{(\nu)}, \ldots, a_n^{(\nu)}$, so daß für $\nu \to \infty$ $b_k^{(\nu)} \to b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ und $a_k^{(\nu)} \to a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ist, und (von einem ν an) mit diesen Polen und Nullstellen jedenfalls alle Pole und Nullstellen der $f_\nu(z)$ im Kreisring $\frac{r_1+r_1'}{2} \leqq |z| \leqq \frac{r_2+r_2'}{2}$ erschöpft sind. Wir bilden nun die rationalen Funktionen

$$E(a_k^{(\nu)}, z) = \frac{r_2(z - a_k^{(\nu)})}{r_2^2 - z\bar{a}_k^{(\nu)}}, \qquad E(b_k^{(\nu)}, z) = \frac{r_2(z - b_k^{(\nu)})}{r_2^2 - z\bar{b}_k^{(\nu)}},$$

die im Kreise $|z| \leqq r_2$ nur je eine Nullstelle, nämlich $a_k^{(\nu)}$ bzw. $b_k^{(\nu)}$, und für $|z| = r_2$ den absoluten Betrag 1 haben. Nun konvergiert offenbar die Folge der rationalen Funktionen

$$R_\nu(z) = \frac{\prod_{k=1}^{n} E(a_k^{(\nu)}, z)}{\prod_{k=1}^{m} E(b_k^{(\nu)}, z)}$$

für $|z| \leqq r_2$ gleichmäßig gegen $R(z) = \frac{\prod_{k=1}^{n} E(a_k, z)}{\prod_{k=1}^{m} E(b_k, z)}$. Ferner sind (von einem ν an) die Funktionen $\varphi_\nu(z) = \frac{f_\nu(z)}{R_\nu(z)}$ und $\varphi(z) = \frac{f(z)}{R(z)}$ im Kreisring $\frac{r_1+r_1'}{2} \leqq |z| \leqq \frac{r_2+r_2'}{2}$ regulär und von 0 verschieden. Endlich konvergiert die Funktionenfolge $\varphi_\nu(z)$ auf dem Kreisring $r_1' \leqq |z| \leqq r_2'$ gleichmäßig gegen $\varphi(z)$. Denn in einer Umgebung eines Punktes des Kreisringes $\frac{r_1+r_1'}{2} < |z| < \frac{r_2+r_2'}{2}$, der weder ein Pol noch eine Nullstelle von $F(z)$ ist, ist dies klar, da aber dann die gleichmäßige Konvergenz der $\varphi_\nu(z)$ auf einem hinreichend kleinen Kreise um jeden der Punkte a_k, b_k im Kreis

ring $r_1' \leqq |z| \leqq r_2'$ gilt, gilt sie auch in einer abgeschlossenen Umgebung dieser Punkte selbst. Wir brauchen daher den Hilfssatz nur für beide Funktionenfolgen $\varphi_\nu(z)$ und $R_\nu(z)$ getrennt zu beweisen. Für $\varphi_\nu(z)$ folgt die Behauptung durch die nunmehr ohne weiteres erlaubte gliedweise Integration der Folge $\lg|\varphi_\nu(z)|$; für $R_\nu(z)$ und $R(z)$ sind aber die Mittelwerte $\mathfrak{M}(r, R_\nu)$ und $\mathfrak{M}(r. R)$ mit Hilfe des Jensenschen Satzes sofort auszurechnen:

$$e^{\mathfrak{M}(r, E(a_k^{(\nu)}, z))} = |E(a_k^{(\nu)}, 0)| \operatorname{Max}\left(\frac{r}{|a_k^{(\nu)}|}, 1\right) = \frac{r}{r_2} \operatorname{Max}\left(1, \frac{|a_k^{(\nu)}|}{r}\right),$$

$$e^{\mathfrak{M}(r, R_\nu)} = \frac{\left(\frac{r}{r_2}\right)^n \prod_{k=1}^{n} \operatorname{Max}\left(1, \frac{|a_k^{(\nu)}|}{r}\right)}{\left(\frac{r}{r_2}\right)^m \prod_{k=1}^{m} \operatorname{Max}\left(1, \frac{|b_k^{(\nu)}|}{r}\right)} = \left(\frac{r}{r_2}\right)^{n-m} \frac{\prod_{|a_k^{(\nu)}| \geqq r} \left(\frac{|a_k^{(\nu)}|}{r}\right)}{\prod_{|b_k^{(\nu)}| \geqq r} \left(\frac{|b_k^{(\nu)}|}{r}\right)},$$

$$e^{\mathfrak{M}(r, R)} = \left(\frac{r}{r_2}\right)^{n-m} \frac{\prod_{|a_k| \geqq r} \left(\frac{|a_k|}{r}\right)}{\prod_{|b_k| \geqq r} \left(\frac{|b_k|}{r}\right)},$$

Aus diesen Formeln folgt sofort, daß $\mathfrak{M}(r, R_\nu)$ gleichmäßig im Intervall $r_1' \leqq r \leqq r_2'$ gegen $\mathfrak{M}(r, R)$ konvergiert, womit unser Hilfssatz bewiesen ist.

§ 3.

Eigenschaften der Nullstellen und Pole Juliascher Ausnahmefunktionen.

Es seien nun a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$, b_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ zwei unendliche Folgen von 0 verschiedener, ins Unendliche strebender Zahlen, nach nicht abnehmenden absoluten Beträgen geordnet. Wir werden diese Zahlen als Nullstellen (a_ν) bzw. Pole (b_ν) einer analytischen Funktion auffassen. Zu ihnen tritt noch $z = 0$ mit der Ordnungszahl p, als eine p-fache Nullstelle für $p > 0$, als ein p-facher Pol für $p < 0$. Es sei ferner $|a_\nu| = \alpha_\nu$, $|b_\nu| = \beta_\nu$ gesetzt. Ferner bezeichne $N(r)$ die Differenz zwischen der Anzahl der Nullstellen und der Anzahl der Pole vom absoluten Betrage $\leqq r$, wobei auch $z = 0$ mit entsprechender Multiplizität zu berücksichtigen ist. Endlich setzen wir $\mathfrak{M}(r) = r^p \dfrac{\prod_{\alpha_\nu \leqq r} \left(\frac{r}{\alpha_\nu}\right)}{\prod_{\beta_\nu \leqq r} \left(\frac{r}{\beta_\nu}\right)} = r^{N(r)} \dfrac{\prod_{\beta_\nu \leqq r} \beta_\nu}{\prod_{\alpha_\nu \leqq r} \alpha_\nu}$.

Es sei nun $f(z)$ eine *in der ganzen Ebene* bis auf $z=\infty$ mero morphe und für $z=\infty$ wesentlich singuläre Juliasche Ausnahmefunktion Ihre Entwicklung in der Umgebung von $z=0$ habe etwa die Form $f(z)=d_0z^p+d_1z^{p+1}+\dots$ $(d_0\neq 0)$, wo p ganz ist und $\gtreqless 0$ sein kann Wir nehmen nun an, daß die von 0 verschiedenen Nullstellen bzw. Pole von $f(z)$ durch a_ν bzw. b_ν gegeben sind, und beweisen unter dieser Annahme vier Eigenschaften a), b), c), d) der Zahlen p, (a_ν), (b_ν).

Wir beweisen zuerst

a) *Es gibt eine nur von $f(z)$ abhängige Konstante c_1, $c_1>0$, so daß für alle $r>0$*

$$-c_1\leqq N(r)\leqq c_1, \qquad |N(r)|\leqq c_1$$

gilt. — Es genügt, nur die Abschätzung nach oben zu beweisen, d. h. $\overline{\lim_{r\to\infty}}N(r)<\infty$, da wir $f(z)$ mit $\frac{1}{f(z)}$ vertauschen können. Ist nun etwa $\overline{\lim_{r\to\infty}}N(r)=\infty$, so gibt es eine ins Unendliche wachsende Folge positiver Zahlen r_ν, so daß $N(r_\nu)$ — entgegen der Behauptung — ins Unendliche wächst. Wir ändern nun die Zahlen r_ν folgendermaßen ab: Es sei $a^{(\nu)}$ eine Nullstelle von möglichst großem absolutem Betrag, der nicht größer als r_ν ist, ferner sei $b^{(\nu)}$ ein Pol von möglichst kleinem absolutem Betrag, der größer als r_ν ist. Verbindet man $a^{(\nu)}$ mit $b^{(\nu)}$ durch eine stetige Kurve die bis auf die Endpunkte ganz im Innern des Kreisringes $|a^{(\nu)}|<|z|<|b^{(\nu)}|$ verläuft, so muß auf dieser Kurve in einem Punkte e_ν ein Wert von absolutem Betrage 1 angenommen werden. Nun ist offenbar $N(|e_\nu|)\geqq N(r_\nu)$, denn wenn $|e_\nu|\leqq r_\nu$ ist, so liegen im Kreise $|z|\leqq|e_\nu|$ ebenso viele Nullstellen, aber vielleicht weniger Pole als im Kreise $|z|\leqq r_\nu$, ist aber $|e_\nu|>r_\nu$, so liegen im Kreise $|z|\leqq|e_\nu|$ ebenso viele Pole, aber vielleicht mehr Nullstellen als im Kreise $|z|\leqq r_\nu$. Wir können daher, indem wir nötigenfalls das zuerst angenommene r_ν durch $|e_\nu|$ ersetzen, erreichen, daß $f(z)$ auf jedem Kreise $|z|=r_\nu$ in einem Punkt e_ν Werte vom absoluten Betrage 1 annimmt. — Wir setzen nun $\sigma_\nu=e_\nu$ und betrachten die Funktionenfolge $f_\nu(z)=f(\sigma_\nu z)$. Sie muß eine z. B. im Kreisring $\frac{1}{4}<|z|<2$ gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzen, und wir können, indem wir uns eventuell auf eine Teilfolge der r_ν beschränken und diese umnumerieren, annehmen, daß die Folge $f_\nu(z)$ selbst im Kreisring $\frac{1}{4}<|z|<2$ gleichmäßig gegen eine Funktion $F(z)$ konvergiert. $F(z)$ kann weder identisch gleich 0 noch identisch gleich ∞ sein, da $|f_\nu(1)|$ für jedes ν gleich 1 ist. Es sei s die Gesamtanzahl der Pole und Nullstellen von $F(z)$ im Kreisring $\frac{1}{2}\leqq|z|\leqq 1$. Dann hat jede Funktion $f_\nu(z)$ im Kreisring $\frac{1}{2}\leqq|z|\leqq 1$ von einem ν an höchstens s Pole und Nullstellen, und wir können annehmen, daß dies für alle ν bereits zutrifft.

Nun ist $\mathfrak{M}(r, F)$ gleichmäßig im Intervalle $\frac{1}{2} \leqq r \leqq 1$ absolut beschränkt, und wir können daher nach dem Hilfssatz 2 annehmen, daß es eine Konstante $a > 0$ gibt, so daß für alle $\nu > \nu_0$ und alle r im Intervall $\frac{1}{2} \leqq r \leqq 1$

$$\frac{1}{a} \leqq e^{\mathfrak{M}(r, f_\nu)} \leqq a,$$

daher

$$e^{\mathfrak{M}(1, f_\nu) - \mathfrak{M}(\frac{1}{2}, f_\nu)} \leqq a^2 \tag{3}$$

ist. Nun gilt für $e^{\mathfrak{M}(r, f_\nu)}$ wegen $|\sigma_\nu| = r_\nu$ und $f_\nu(z) = d_0 \sigma_\nu^p z^p + \ldots$ nach (2)

$$e^{\mathfrak{M}(r, f_\nu)} = |d_0| r_\nu^p r^p \frac{\prod\limits_{\alpha_k \leqq r r_\nu} \left(\frac{r r_\nu}{\alpha_k}\right)}{\prod\limits_{\beta_k \leqq r r_\nu} \left(\frac{r r_\nu}{\beta_k}\right)}$$

$$= |d_0| (r_\nu r)^{N(r_\nu)} P \prod_{r_\nu \geqq \beta_k > r r_\nu} \left(\frac{r r_\nu}{\beta_k}\right) \prod_{r_\nu \geqq \alpha_k > r r_\nu} \left(\frac{\alpha_k}{r r_\nu}\right),$$

wo für $r = 1$ beide Produkte gleich 1 zu setzen sind und

$$P = \prod_{\beta_k \leqq r_\nu} \beta_k \prod_{\alpha_k \leqq r_\nu} \left(\frac{1}{\alpha_k}\right)$$

gesetzt ist. Daher folgt für $\frac{1}{2} \leqq r \leqq 1$ wegen $|N(r r_\nu) - N(r_\nu)| \leqq s$

$$2^{-s} \leqq \frac{e^{\mathfrak{M}(r, f_\nu)}}{|d_0| (r r_\nu)^{N(r_\nu)} P} \leqq 2^s, \qquad 2^{-s} \leqq \frac{e^{\mathfrak{M}(\frac{1}{2}, f_\nu)}}{|d_0| \left(\frac{r_\nu}{2}\right)^{N(r_\nu)} P} \leqq 2^s,$$

$$2^{-s} \leqq \frac{e^{\mathfrak{M}(1, f_\nu)}}{|d_0| r_\nu^{N(r_\nu)} P} \leqq 2^s,$$

$$2^{N(r_\nu) - 2s} \leqq e^{\mathfrak{M}(1, f_\nu) - \mathfrak{M}(\frac{1}{2}, f_\nu)} \leqq 2^{N(r_\nu) + 2s},$$

und daher für $\nu \to \infty$ wegen $N(r_\nu) \to \infty$ auch $e^{\mathfrak{M}(1, f_\nu) - \mathfrak{M}(\frac{1}{2}, f_\nu)} \to \infty$, im Widerspruch zu (3), womit a) bewiesen ist.

Nunmehr können wir *zweitens* beweisen:

b) *Für jedes $r > 0$ liegen im Kreisring $r \leqq |z| \leqq 2r$ weniger als c_3 Nullstellen bzw. Pole, wo die ganze Zahl c_3 nur von $f(z)$ abhängt.*

Es genügt, dies für die Nullstellen zu beweisen, da man f mit $\frac{1}{f}$ vertauschen kann. Wäre dies aber für die Nullstellen nicht richtig, so würde es eine ins Unendliche wachsende Folge positiver Zahlen r_ν geben, so daß allgemein im Kreisring

$$r_\nu \leqq |z| \leqq 2 r_\nu \tag{4}$$

wenigstens ν Nullstellen liegen. Nach a) muß dann für alle $\nu > c_1$ im Kreisring (4) wenigstens ein Pol vorkommen. Nun setze man $\sigma_\nu = r_\nu$, dann besitzt die Folge $f_\nu(z) = f(\sigma_\nu z)$ wenigstens eine für

$$\frac{1}{2} < |z| < 4 \tag{5}$$

gleichmäßig konvergierende Teilfolge, und wir können annehmen, daß die Folge $f_\nu(z)$ selbst für (5) gleichmäßig gegen $F(z)$ konvergiert. $F(z)$ ist sicher nicht identisch gleich 0, da jedes $f_\nu(z)$ von einem ν an für $1 \leqq |z| \leqq 2$ wenigstens einen Pol hat. Daher hat $F(z)$ im Kreisring $1 \leqq |z| \leqq 2$ nur endlich viele Nullstellen, etwa s. Dann hat aber auch jedes $f_\nu(z)$ von einem ν an im Kreisring $1 \leqq |z| \leqq 2$ nicht mehr als s Nullstellen, entgegen der Annahme über r_ν, womit b) bewiesen ist. — Die soeben bewiesene Tatsache läßt sich auch so ausdrücken, daß für jedes $\nu > 0$

$$\left|\frac{a_{\nu+c_2}}{a_\nu}\right| \geqq 2, \qquad \left|\frac{b_{\nu+c_2}}{b_\nu}\right| \geqq 2$$

ist. Ferner folgt aus b), daß im Kreisring $r \leqq |z| \leqq qr$, $r > 0$, $q > 2$ höchstens $2c_2 \lg q$ Nullstellen bzw. Pole von $f(z)$ liegen können.

Endlich leiten wir noch die folgende, gleichfalls auf die absoluten Beträge der Nullstellen und Pole, und zwar in der Verbindung

$$\mathfrak{M}(r) = r^p \frac{\prod_{a_k \leqq r} \left(\frac{r}{a_k}\right)}{\prod_{\beta_k \leqq r} \left(\frac{r}{\beta_k}\right)}$$ bezügliche Tatsache her:

c) *Es gibt eine nur von $f(z)$ abhängige Konstante $c_3 > 0$ derart, daß für alle a_ν bzw. b_ν*

$$\mathfrak{M}(a_\nu) \leqq c_3, \qquad \mathfrak{M}(\beta_\nu) \geqq \frac{1}{c_3}$$

ist[20]).

Wäre z. B. etwa $\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \mathfrak{M}(a_\nu) = \infty$, so würde es eine Folge von Nullstellen a_{ν_k} geben, für die $\mathfrak{M}(a_{\nu_k}) \underset{k \to \infty}{\to} \infty$ wäre. Setzen wir $\sigma_k = a_{\nu_k}$, so hat die Folge $f_k(z) = f(\sigma_k z)$ eine im Kreisring $\frac{1}{4} < |z| < 4$ gleichmäßig konvergierende Teilfolge, und wir können annehmen, daß bereits die ganze Folge $f_k(z)$ in diesem Kreisring gleichmäßig gegen $F(z)$ konvergiert

[20]) Die in dieser Tatsache enthaltene Bedingung hat folgende Bedeutung: Werden die Nullstellen und Pole a_ν und b_ν in der Reihenfolge der absoluten Beträge sukzessive gewählt und die Werte des Ausdrucks $\mathfrak{M}(r)$ gleichzeitig berechnet, so dürfen sobald dieser Ausdruck größer als c_3 geworden ist, nur Pole hinzukommen, bis $\mathfrak{M}(r) \leqq c_3$ wird. Wird aber $\mathfrak{M}(r) < \frac{1}{c_3}$, so dürfen nur Nullstellen hinzukommen bis $\mathfrak{M}(r) \geqq \frac{1}{c_3}$ geworden ist.

Da jedes $f_k(z)$ auf $|z|=1$ eine Nullstelle hat, ist $F(z)$ sicher nicht identisch gleich ∞. Daher ist $\mathfrak{M}(r, F) < \infty$ für $\frac{1}{2} \leqq r \leqq 2$, folglich muß nach unserem Hilfssatz 2 auch $\mathfrak{M}(r, f_\nu)$ für $r=1$ und $\nu > \nu_0$ gleichmäßig beschränkt bleiben. Für $r=1$ ist aber

$$\mathfrak{M}(1, f_k(z)) = \mathfrak{M}(1, f(\alpha_{\nu_k} z)) = \lg \mathfrak{M}(\alpha_{\nu_k}) + \lg |d_0|,$$

so daß $\mathfrak{M}(\alpha_{\nu_k})$ nicht gegen ∞ wachsen kann, w. z. b. w. Der Fall aber, daß $\varliminf_{\nu \to \infty} \mathfrak{M}(\beta_\nu) = 0$ ist, wird durch Vertauschung von f mit $\frac{1}{f}$ auf den eben erledigten zurückgeführt.

Für die Folge der Argumente der a_ν und b_ν liefert endlich die folgende Tatsache eine notwendige und, wie sich später ergeben wird, (mit a), b), c)) hinreichende Beschränkung:

d) *Es gibt ein nur von $f(z)$ abhängiges $c_4 > 0$, so daß für alle $\nu > 0$, $\mu > 0$*

$$\left| \frac{b_\nu}{a_\mu} - 1 \right| > c_4$$

ist.

Denn wäre für eine Folge von Paaren ganzer positiver Zahlen (n_k, m_k) mit $n_k \to \infty$, $m_k \to \infty$, etwa $\frac{b_{n_k}}{a_{m_k}} = \vartheta_k$ mit $\vartheta_k \to 1$, so setze man $\sigma_k = a_{m_k}$; dann hat $f_k(z) = f(\sigma_k z)$ eine für $\frac{1}{2} < |z| < 2$ gleichmäßig konvergierende Teilfolge, und wir können annehmen, daß die Folge $f_k(z)$ selbst in diesem Kreisring gleichmäßig gegen $F(z)$ konvergiert. Nun folgt aber für $f_k^*(z) \equiv f(b_{n_k} z) = f_k(\vartheta_k z)$ aus dem Hilfssatz 1, daß auch $f_k^*(z)$ gegen $F(z)$ konvergiert. Dies ergibt aber für $z=1$ einen Widerspruch, da alle $f_k^*(1)$ gleich ∞ und alle $f_k(1)$ gleich 0 sind.

Es sei endlich bemerkt, daß sich die Eigenschaft a) leicht aus den Eigenschaften b), c) herleiten läßt.

§ 4.

Die Darstellbarkeit Juliascher Ausnahmefunktionen als Quotienten kanonischer Produkte.

Wir haben beim Beweis der Eigenschaften a), b), c), d) bisher angenommen, daß $f(z)$ für $z=\infty$ wesentlich singulär ist und sowohl unendlich viele Nullstellen a_ν als auch unendliche viele Pole b_ν hat.

Nimmt man aber an, daß die für $|z| < \infty$ meromorphe Juliasche Ausnahmefunktion $f(z)$ nur endlich viele Pole hat, so ist $f(z)$ eine rationale Funktion; und da man f mit $\frac{1}{f}$ vertauschen kann, gilt genau dasselbe, wenn $f(z)$ als eine Juliasche Ausnahmefunktion mit endlich vielen Nullstellen vorausgesetzt wird.

Wir zeigen, daß eine für $|z| > R$ reguläre Juliasche Ausnahmefunktion $f(z)$ in $z = \infty$ nicht wesentlich singulär sein kann. Denn sonst gäbe es eine Folge z_ν mit $z_\nu \to \infty$ und $|z_\nu| > R$, so daß $|f(z_\nu)| < 1$ ist. Keine Teilfolge von $f(z_\nu z)$ kann gleichmäßig für $0 < |z| < \infty$ gegen die Konstante ∞ konvergieren, da jede dieser Funktionen in $z = 1$ absolut $\leqq 1$ ist. Andererseits müßte jede Grenzfunktion auf jedem Kreis $|z| = r > 0$ unendlich werden, da das Maximum des absoluten Betrages von $f(z)$ für $|z| = r$ mit $r \to \infty$ auch ins Unendliche wächst.

Damit sind insbesondere die Eigenschaften a), b), c), d) auch für die Fälle bewiesen, daß $f(z)$ nur endlich viele Nullstellen oder Pole hat.

Es sei nun $f(z)$ eine in der ganzen Ebene bis auf eine wesentliche Singularität im unendlich fernen Punkt meromorphe Juliasche Ausnahmefunktion mit der Ordnungszahl p für $z = 0$ $(f(z) = d_0 z^p + d_1 z^{p+1} + \ldots$ $d_0 \neq 0)$ und den Nullstellen und Polen a_ν bzw. b_ν, die daher den Bedingungen a), b), c), d) genügen. Wir setzen dann

$$K(z) = z^p \frac{\prod\left(1 - \frac{z}{a_k}\right)}{\prod\left(1 - \frac{z}{b_k}\right)}, \quad f(z) = d_0 K(z) e^{g(z)},$$

wo die Konvergenz beider Produkte aus b) folgt und wir die ganze Funktion $g(z)$ so annehmen können, daß $g(0) = 0$ ist. *Wir behaupten, daß dann $g(z)$ identisch gleich 0 ist.* Denn wäre dies nicht der Fall, so gäbe es eine positive Konstante c, so daß, $\operatorname{Max}_{|z|=r} |g(z)| = M(r)$ gesetzt, für $r > 1$ $M(r) \geqq c\,r$ ist[21]). Nach einer bekannten Borelschen Ungleichung[22]) ist dann für jedes $r > 0$ $\operatorname{Max}_{|z|=r} \Re g(z) \geqq \frac{1}{4} M\left(\frac{r}{2}\right) \geqq \frac{c}{4} r$ und daher $\operatorname{Max}_{|z|=r} |e^{g(z)}| \geqq e^{\frac{c}{4} r}$. Andererseits folgt aus bekannten Sätzen über Maxima und Minima ganze

---

[21]) Da nämlich $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(r e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{k=1}^{\infty} |h_k|^2 r^{2k}$ ist, $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k z^k$ gesetzt

[22]) Wir meinen eine von Borel in Weiterführung eines Hadamardschen Ansatzes hergeleitete Ungleichung, die sich auf die Form bringen läßt:

$$\operatorname{Max}_{|z|=r} |g(z) - g(0)| \leqq \sum_1^{\infty} |h_n| r^n \leqq (\operatorname{Max}_{|z|=\varrho} \Re g(z) - \Re g(0)) \frac{2r}{\varrho - r}, \quad 0 < r < \varrho$$

wo $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n$ für $|z| \leqq \varrho$ regulär ist. Um diese Form aus den Borelschen Formeln (vgl. Acta math. 20 (1897), S. 365–366, 390) zu erhalten, hat man nur zu beachten, daß durch eine Abänderung von $g(0)$ $\operatorname{Max}_{|z|=\varrho} \Re g(z)$ gleich 0 gemacht werden kann, ohne daß sich die drei Teile der obigen Formel ändern. Dann liefern aber die Borelschen Formeln direkt die obige Ungleichung.

Funktionen von der Ordnung 0 auf konzentrischen Kreisen, daß (c', c'', ..., $c^{(8)}$ sind im folgenden gewisse positive Konstanten) für $r \geqq 2$, $|z| \geqq 2$

$$\left|\prod_{|z|=r}\left(1-\frac{z}{b_k}\right)\right| \leqq c' e^{c'' r^{\frac{1}{2}}}, \qquad \left|\prod_{|z-a_k|\geqq 1}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)\right| \geqq c^{(3)} e^{-c^{(4)}|z|^{\frac{1}{2}}}.^{23})$$

Dies liefert für $f(z)$ und für $r \geqq 2$

$$(6) \qquad \max_{\substack{|r-a_k|\geqq 1 \\ |z|=r}} |f(z)| \geqq |d_0| r^p e^{\frac{c}{4} r} \frac{1}{c'} c^{(3)} e^{-(c''+c^{(4)}) r^{\frac{1}{2}}} > r^p c^{(5)} e^{c^{(6)} r}.$$

Ist nun $f(z)$ eine Juliasche Ausnahmefunktion, so muß in der Folge $f(a_k z)$ eine im Kreisring $\frac{1}{2} < |z| < 2$ gleichmäßig konvergierende Teilfolge enthalten sein, etwa $f_\nu(z) \equiv f(a_{k_\nu} z)$, die dort gegen $F(z)$ konvergiert. $F(z)$ ist sicher nicht identisch gleich ∞, da für $z = 1$ $f_\nu(1) = f(a_{k_\nu}) = 0$ ist. Im Kreisring

$$(7) \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} < |z| < \sqrt{2}$$

ist sowohl die Anzahl der Nullstellen als auch die Anzahl der Pole von $f_\nu(z)$ nach b) kleiner als c_2, da diese Nullstellen (bzw. Pole) denen von $f(z)$ für

$$\frac{\alpha_{k_\nu}}{\sqrt{2}} < |z| < \sqrt{2}\,\alpha_{k_\nu}$$

entsprechen. Werden die Nullstellen von $f_\nu(z)$ in (7) etwa mit $a_k^{(\nu)}$ bezeichnet, so geht (6) im Kreisring (7) über in

$$(8) \qquad \max_{\substack{|z|=r \\ |r-|a_k^{(\nu)}||>\frac{1}{\alpha_{k_\nu}}}} |f_\nu(z)| \geqq c^{(5)} (r\alpha_{k_\nu})^p e^{c^{(6)} r \alpha_{k_\nu}} \geqq c^{(7)} \alpha_{k_\nu}^p e^{c^{(8)} \alpha_{k_\nu}},$$

so daß $F(z)$ sicher nicht identisch gleich Null ist.

Beschreiben wir um die Nullstellen und Pole von $F(z)$ in (7), deren Gesamtanzahl kleiner als $2c_2$ ist, Kreise mit den Radien $\frac{1}{10 c_2}$, so muß im Teilgebiet G^* von (7) außerhalb dieser Kreise die Folge $f_\nu(z)$ im gewöhnlichen Sinne gleichmäßig gegen die ihrem absoluten Betrage nach zwischen zwei positiven endlichen Schranken liegenden Werte von $F(z)$ konvergieren und daher dort von einem ν an gleichmäßig beschränkt sein. Andererseits liegt für jedes hinreichend große ν in G^* wenigstens ein Kreis $|z| = r$, auf dem (8) gilt, was der Beschränktheit der $f_\nu(z)$ widerspricht. Daher ist in der Tat, wie behauptet, $e^{g(z)} \equiv 1$.

---

[23]) Die erste dieser Abschätzungen ist in den klassischen Hadamardschen Entwickelungen enthalten, die zweite dem Wortlaut nach erst in den Verallgemeinerungen eines Satzes von Hadamard durch Wiman und Lindgreen (vgl. für genauere Literaturangaben den Artikel der Math. Enz. II C 4 von L. Bieberbach, Neuere Untersuchungen über Funkt. von kompl. Var., S. 435–436). Übrigens ergibt aber auch der gewöhnliche Beweis der Hadamardschen Sätze ohne weiteres die zweite Abschätzung, wenn man die Eigenschaft b) berücksichtigt.

§ 5.

Nachweis der Ausnahmeeigenschaft von Quotienten kanonischer Produkte, als Folge von a), b), c), d).

Wir erbringen jetzt den Nachweis, daß *für zwei beliebige Zahlenfolgen* a_ν, b_ν, *die* mit einem ganzen $p \gtrless 0$ *den Bedingungen* a), b), c), d) *genügen, der mit ihnen gebildete Quotient der entsprechenden kanonischen Produkte* (*deren Konvergenz aus der Bedingung* b) *folgt*)

$$K(z) = z^p \frac{\prod_\nu \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right)}{\prod_\nu \left(1 - \frac{z}{b_\nu}\right)}$$

eine Juliasche Ausnahmefunktion ist. Wir können dabei annehmen, daß beide Zahlenfolgen (a_ν), (b_ν) *unendlich sind.*

Zu diesem Zweck genügt es, für eine beliebige Folge komplexer Zahlen σ_ν mit $\sigma_\nu \to \infty$ zu beweisen, daß die Funktionenfolge $K(\sigma_\nu z)$ in der ganzen Ebene bis auf die Punkte 0 und ∞ normal ist. Wir können dabei die σ_ν als reell positiv $= |\sigma_\nu| = r_\nu$ voraussetzen. Denn wäre die Folge σ_ν eine J-Folge für $f(z)$, so würde nach dem Satz 4 auch die Folge $|\sigma_\nu|$ eine J-Folge für $f(z)$ sein.

Es genügt nun zu zeigen, daß $K(r_\nu z)$ in jedem Kreisring

$$\frac{1}{a} < |z| < a \tag{9}$$

eine gleichmäßig konvergierende Teilfolge besitzt, wenn a eine beliebige positive Zahl > 2 ist. Wir setzen nun

$$K_\nu(z) \equiv K(r_\nu z) = K_\nu'(z) K_\nu''(z) K_\nu'''(z),$$

wo, $|a_k| = \alpha_k$, $|b_k| = \beta_k$ gesetzt,

$$K_\nu'(z) = (r_\nu z)^p \frac{\prod_{\alpha_k \leqq \frac{r_\nu}{2a}} \left(1 - \frac{r_\nu z}{a_k}\right)}{\prod_{\beta_k \leqq \frac{r_\nu}{2a}} \left(1 - \frac{r_\nu z}{b_k}\right)}, \qquad K_\nu''(z) = \frac{\prod_{\frac{r_\nu}{2a} < \alpha_k \leqq 2a r_\nu} \left(1 - \frac{r_\nu z}{a_k}\right)}{\prod_{\frac{r_\nu}{2a} < \alpha_k \leqq 2a r_\nu} \left(1 - \frac{r_\nu z}{b_k}\right)},$$

$$K_\nu'''(z) = \frac{\prod_{\alpha_k > 2a r_\nu} \left(1 - \frac{r_\nu z}{a_k}\right)}{\prod_{\beta_k > 2a r_\nu} \left(1 - \frac{r_\nu z}{b_k}\right)}$$

ist.

Wir schätzen zunächst $K'''(z)$ im Kreisring (9) ab. Da in (9) für die Nullstellen bzw. Pole a_k und b_k von $K_\nu'''(z)$ $\left|\frac{r_\nu z}{a_k}\right| < \frac{1}{2}$, $\left|\frac{r_\nu z}{b_k}\right| < \frac{1}{2}$ gilt, folgt unter Berücksichtigung von b) für eine geeignete Bestimmung des Logarithmus, wegen $|-\lg(1-z)| = \left|z + \frac{z^2}{2} + \ldots\right| \leqq 2|z|$ für $|z| \leqq \frac{1}{2}$:

$$|\lg K_\nu'''(z)| \leqq 2 \sum_{a_k > 2a r_\nu} \frac{|r_\nu z|}{\alpha_k} + 2 \sum_{\beta_k > 2a r_\nu} \frac{|r_\nu z|}{\beta_k}$$

$$< 2a r_\nu \cdot 2c_2 \left(\frac{1}{2a r_\nu} + \frac{1}{4a r_\nu} + \frac{1}{8a r_\nu} + \ldots\right) = 4c_2,$$

es gilt also im Kreisring (9)

$$e^{-4c_2} \leqq |K_\nu'''(z)| \leqq e^{4c_2}.$$

Daher hat die Folge $K_\nu'''(z)$ eine in (9) gleichmäßig konvergente Teiltolge, und wir dürfen annehmen, daß bereits die Folge $K_\nu'''(z)$ selbst in (9) gleichmäßig konvergiert — gegen eine in (9) endliche und von 0 verschiedene Funktion $K'''(z)$.

Die rationalen Funktionen $K_\nu''(z)$ haben nun nach b) eine beschränkte Anzahl von Nullstellen bzw. Polen, höchstens $8c_2 \log a$. Setzt man etwa

$$K_\nu''(z) = \frac{\prod_{k=1}^{n_\nu} \left(1 - \frac{z}{a_{\nu,k}}\right)}{\prod_{k=1}^{m_\nu} \left(1 - \frac{z}{b_{\nu,k}}\right)},$$

wo die Nullstellen $a_{\nu,k}$ und Pole $b_{\nu,k}$ von $K_\nu''(z)$ nach den wachsenden absoluten Beträgen geordnet sind, so kann man eine solche Teilfolge der Indizes ν finden, für die erstens alle Zahlen n_ν einander gleich $= n$ sind, zweitens alle Zahlen m_ν einander gleich $= m$ werden, und für die mit $\nu \to \infty$ zugleich $a_{\nu,k} \to A_k$, $b_{\nu,k} \to B_k$ gilt. Setzt man dann

$$K''(z) = \frac{\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{A_k}\right)}{\prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{z}{B_k}\right)},$$

so folgt nun, da nach d) $\left|\frac{a_{\nu,k}}{b_{\nu,l}} - 1\right| \geqq c_4$ und daher auch $\left|\frac{A_k}{B_l} - 1\right| \geqq c_4$ ist, daß die betreffende Teilfolge der $K_\nu''(z)$ in (9) gleichmäßig gegen $K''(z)$ konvergiert. Man kann daher annehmen, daß auch $K_\nu''(z)$ in (9) bereits gleichmäßig gegen eine rationale Funktion $K''(z)$ konvergieren.

Endlich läßt sich $K_\nu'(z)$ folgendermaßen zerlegen:

$$K_\nu'(z) = (r_\nu z)^p \frac{\prod\limits_{a_k \leqq \frac{r_\nu}{2a}} \left(1 - \frac{r_\nu z}{a_k}\right)}{\prod\limits_{\beta_k \leqq \frac{r_\nu}{2a}} \left(1 - \frac{r_\nu z}{b_k}\right)} = M_\nu(z)\, M_\nu'(z),$$

wo

$$M_\nu(z) = (r_\nu z)^p \frac{\prod\limits_{a_k \leqq \frac{r_\nu}{2a}} \left(\frac{r_\nu z}{a_k}\right)}{\prod\limits_{\beta_k \leqq \frac{r_\nu}{2a}} \left(\frac{r_\nu z}{b_k}\right)}, \qquad M_\nu'(z) = \pm \frac{\prod\limits_{a_k \leqq \frac{r_\nu}{2a}} \left(1 - \frac{a_k}{r_\nu z}\right)}{\prod\limits_{\beta_k \leqq \frac{r_\nu}{2a}} \left(1 - \frac{b_k}{r_\nu z}\right)}$$

gesetzt ist. $M_\nu'(z)$ ist leicht abzuschätzen. Es ergibt sich für (9), wenn der auf der positiven reellen Achse reelle Zweig des Logarithmus bei den einzelnen Linearfaktoren benutzt wird, wegen $\left|\frac{a_k}{r_\nu z}\right| \leqq \frac{1}{2}$, $\left|\frac{b_k}{r_\nu z}\right| \leqq \frac{1}{2}$:

$$|\lg M_\nu'(z)| \leqq 2 \sum_{a_k \leqq \frac{r_\nu}{2a}} \frac{|a_k|}{r_\nu |z|} + 2 \sum_{\beta_k \leqq \frac{r_\nu}{2a}} \frac{|b_k|}{r_\nu |z|} \leqq \frac{4 a c_2}{r_\nu} \left(\frac{r_\nu}{2a} + \frac{r_\nu}{4a} + \ldots\right) = 4 c_2,$$

$$e^{-4c_2} \leqq |M_\nu'(z)| \leqq e^{4c_2}.$$

Daher läßt sich auch aus der Folge der $M_\nu'(z)$ eine in (9) gleichmäßig konvergierende Teilfolge herausgreifen, und wir können von vornherein annehmen, daß diese Auswahl bereits getroffen ist und die Folge $M_\nu'(z)$ selbst in (9) gegen $M'(z)$ gleichmäßig konvergiert. Dann ist insbesondere $M'(z)$ in (9) endlich und von 0 verschieden.

Es bleibt nur noch $M_\nu(z)$ zu untersuchen. $M_\nu(z)$ läßt sich in der Form schreiben

$$M_\nu(z) = (2az)^{N\left(\frac{r_\nu}{2a}\right)}\, \mathfrak{M}\left(\frac{r_\nu}{2a}\right).$$

Da die ganze Zahl $N\left(\frac{r_\nu}{2a}\right)$ absolut $\leqq c_1$ ist, gibt es eine unendliche Teilfolge der ν, für die N einen konstanten Wert, etwa n hat. Aus der entsprechenden Teilfolge der Konstanten $\mathfrak{M}\left(\frac{r_\nu}{2a}\right)$ läßt sich eine weitere (eventuell gegen 0 oder ∞) konvergente Unterfolge herausgreifen, und man kann annehmen, daß bereits für alle ν $M_\nu(z)$ in (9) gleichmäßig gegen $M(z)$ konvergiert, wo $M(z)$ entweder $\equiv 0$ oder $\equiv \infty$ oder allgemeiner

on der Gestalt cz^n ist. Man beachte endlich, daß $M(z)$ nur dann identisch 0 der ∞ ist, wenn $\mathfrak{M}\left(\frac{r_\nu}{2a}\right) \to 0$ bzw. $\mathfrak{M}\left(\frac{r_\nu}{2a}\right) \to \infty$ gilt.

Wir können folglich annehmen, daß in (9) die Funktionenfolgen $M_\nu(z)$, $M_\nu'(z)$, $K_\nu''(z)$, $K_\nu'''(z)$ gleichmäßig resp. gegen $M(z)$, $M'(z)$, $K''(z)$, $K'''(z)$ konvergieren. Da die Funktionen $M'(z)$ und $K'''(z)$ ihren absoluten Beträgen nach zwischen zwei festen positiven Schranken enthalten sind, genügt es, damit auch die Produkte $M_\nu(z)\, M_\nu'(z)\, K_\nu''(z)\, K_\nu'''(z)$ gegen $M(z)\, M'(z)\, K''(z)\, K'''(z)$ gleichmäßig in (9) konvergieren, daß $M(z)$ in (9) nirgends verschwindet, falls $K''(z)$ in (9) Pole hat, und daß $M(z)$ in (9) nirgends unendlich wird, falls $K''(z)$ in (9) Nullstellen hat. Hat nun z. B. $K''(z)$ in (9) einen Pol b, so besitzen auch die rationalen Funktionen $K_\nu''(z)$ von einem ν an in (9) Pole $b^{(\nu)}$, die gegen b konvergieren. Ist $r_\nu |b^{(\nu)}| = \beta^{(\nu)}$, $\frac{r_\nu}{a} < \beta^{(\nu)} < a r_\nu$, so ist nach der Tatsache c) $\mathfrak{M}(\beta_\nu) \geqq \frac{1}{c_3}$. Wegen $\frac{\beta^{(\nu)}}{\frac{r_\nu}{2a}} \leqq 2a^2$ liegen im Kreisring $\frac{r_\nu}{2a} < |z| \leqq \beta^{(\nu)}$ nach der Bedingung b) höchstens $2 c_2 \log 2a^2 = \gamma$ Pole bzw. Nullstellen. Daher gilt

$$\frac{\mathfrak{M}\left(\frac{r_\nu}{2a}\right)}{\mathfrak{M}(\beta^{(\nu)})} \geqq \left(\frac{r_\nu}{2a\beta^{(\nu)}}\right)^{N\left(\frac{r_\nu}{2a}\right)} \left(\frac{r_\nu}{2a\beta^{(\nu)}}\right)^{\gamma} \geqq \frac{1}{(2a^2)^{c_1+\gamma}}, \qquad \mathfrak{M}\left(\frac{r_\nu}{2a}\right) \geqq \frac{1}{c_3 (2a^2)^{c_1+\gamma}},$$

und die rechte Seite der letzten Ungleichung ist von ν unabhängig, so daß $\mathfrak{M}\left(\frac{r_\nu}{2a}\right)$ nicht gegen 0 konvergieren kann. Eine vollständig symmetrische Überlegung zeigt, daß wenn $K''(z)$ in (9) Nullstellen hat, $\mathfrak{M}\left(\frac{r_\nu}{2a}\right)$ nicht gegen ∞ konvergieren kann, womit unsere Behauptung, daß $K(z)$ eine Juliasche Ausnahmefunktion ist, vollständig bewiesen ist.

§ 6.

Eine graphische Deutung der Bedingungen a), b), c), d).

Wir zeigen nun, daß die Form der Bedingungen a), b), c), d) ein Konstruktionsverfahren für alle ihnen genügenden Systeme von Nullstellen a_ν und Polen b_ν anzugeben gestattet. Zuvörderst sei bemerkt, daß die Bedingung d) von den übrigen im wesentlichen unabhängig ist. Sind nämlich die absoluten Beträge der a_ν, b_ν so bestimmt, daß a), b), c) erfüllt sind, so kann man die Werte der a_ν, b_ν auf den ihnen zugewiesenen Kreisen beliebig verteilen, wenn man nur dafür Sorge trägt, daß dann auch die Bedingung d) erfüllt wird, was für hinreichend kleine c_4 ohne weiteres möglich ist. Um aber die allgemeinsten Systeme der absoluten

Beträge α_ν und β_ν (und die ganze Zahl p) zu finden, für die a), b), c) erfüllt sind, betrachte man den Streckenzug

$$(10) \qquad y = px + \sum_{\alpha_k^* \leqq x} (x - \alpha_k^*) - \sum_{\beta_k^* \leqq x} (x - \beta_k^*),$$

wo $x = \lg r$, $\alpha_k^* = \lg \alpha_k$, $\beta_k^* = \lg \beta_k$ gesetzt wurde, so daß $y = \lg \mathfrak{M}(r$ ist. Unsere Aufgabe reduziert sich darauf, eine ganze Zahl p und zwei positive monoton ins Unendliche wachsende reelle Zahlenfolgen α_ν^*, β_ν^* zu finden, für die der Streckenzug (10) den folgenden Bedingungen genügt: a*) Die Richtungen der einzelnen Strecken des Streckenzuges bleiben in einem festen Winkel: $|\operatorname{tg}\theta| \leqq c_1$. b*) In jedes x-Intervall $\xi \leqq x \leqq \xi + \lg 2$ fallen weniger als c_2 „Eckpunkte" α_k^* bzw. β_k^*. c*) Es sei der Streifen $-\log c_3 \leqq y \leqq \log c_3$ mit S bezeichnet. Sobald der Streckenzug außerhalb S verläuft, und zwar *oberhalb* S, können nur die Eckpunkte β_k^* vorkommen, der Streckenzug weist also nur Knicke nach unten auf, und solange der Streckenzug *unterhalb* S verläuft, können nur die Eckpunkte α_k^* auftreten, d. h. also nur Knicke nach oben. Offenbar kann ein diesen Bedingungen genügender Streckenzug ohne weiteres geometrisch rekurrent konstruiert werden, und das Konstruktionsverfahren liefert zugleich eine weitgehende Übersicht über das Maß der Bewegungsfreiheit, die für die Konstruktion nach Vorgabe der drei Zahlen c_1, c_2, c_3 bleibt.

Man kann endlich dieser graphischen Deutung unserer vier Bedingungen leicht entnehmen, daß die Bedingung a) eine Folge der Bedingungen b) und c) ist.

§ 7.

Der Hauptsatz.

Wir betrachten endlich eine für $|z| \geqq R$ eindeutige meromorphe und für $z = \infty$ wesentlich singuläre Funktion $g(z)$. Dann ist $g(z) = g_1(z)\, g_2(z)$, wo $g_1(z)$ eine in der ganzen Ebene (bis eventuell auf $z = \infty$) meromorphe Funktion mit denselben Nullstellen und Polen wie $g(z)$ außerhalb von $|z| = R$ ist, während $g_2(z)$ für $|z| > R$ regulär und von Null verschieden ist, bis eventuell auf den unendlich fernen Punkt. Ist der Zuwachs des Arguments von $g_2(z)$ beim einmaligen Umlauf um den Nullpunkt außerhalb des Kreises $|z| = R$ etwa gleich $2\pi p$ (p ganz, $\gtrless 0$), so kann man setzen $g_2(z) = z^p e^{g_3(z)}$, wo $g_3(z)$ für $|z| > R$ regulär ist, bis eventuell auf $z = \infty$. Nach dem Laurentschen Satz ist $g_3(z) = \varphi(z) + \psi\left(\frac{1}{z}\right)$, wo $\varphi(z)$ in der ganzen Ebene (bis eventuell auf $z = \infty$) regulär ist, während $\psi\left(\frac{1}{z}\right)$ für $|z| > R$ (*mit Einschluß* des unendlich fernen Punktes) regulär ist und sogar, wie wir annehmen können, $\psi\left(\frac{1}{z}\right)_{z=\infty} = 0$ ist. Dann gilt also

$g(z) = z^p g_1(z) e^{\varphi(z)} e^{\psi\left(\frac{1}{z}\right)} = f(z)\, g^*(z)$, wo $f(z) = z^p g_1(z) e^{\varphi(z)}$ in der ganzen Ebene meromorph ist (und für $z = \infty$ wesentlich singulär), während $g^*(z)$ für $|z| > R$ regulär ist und in $z = \infty$ den Wert 1 hat. Da aber dann $g^*(\sigma_\nu z)$ für jede Folge σ_ν mit $\sigma_\nu \to \infty$ in der ganzen Ebene (bis auf eine beliebig kleine Umgebung des Nullpunktes) gleichmäßig gegen 1 konvergiert, ist zugleich mit $g(z)$ auch $f(z)$ eine Juliasche Ausnahmefunktion und umgekehrt. — Unsere Resultate zusammenfassend erhalten wir den folgenden

Satz 5. *Jede für $|z| \geqq R$ meromorphe Juliasche Ausnahmefunktion ist gleich dem Produkt einer in der ganzen Ebene meromorphen Juliaschen Ausnahmefunktion mit einer für $|z| > R$ regulären und für $z = \infty$ den Wert 1 annehmenden Funktion. Und umgekehrt ist jedes solche Produkt eine Juliasche Ausnahmefunktion.*

Jede in der ganzen endlichen Ebene meromorphe Juliasche Ausnahmefunktion ist gleich einem Quotienten von zwei ganzen Funktionen der Ordnung 0

$$J(z) = d z^p \frac{\prod\left(1 - \frac{z}{a_k}\right)}{\prod\left(1 - \frac{z}{a_k}\right)} \quad (p \text{ ganz}, \gtrless 0,\ d \neq 0), \tag{11}$$

deren von 0 *verschiedene Nullstellen und Pole a_ν bzw. b_ν den folgenden vier Bedingungen genügen:*

a) *Für jedes $r > 0$ ist die Differenz zwischen der Anzahl der Nullstellen und der Anzahl der Pole im Kreise $|z| \leqq r$ absolut kleiner als eine feste von r unabhängige Konstante c_1.*

b) *Für jedes $r > 0$ sind die Anzahlen der im Kreisring $r \leqq |z| \leqq 2r$ liegenden Nullstellen des Zählers bzw. des Nenners kleiner als eine von r unabhängige Konstante c_2.*

c) *Setzt man*

$$\mathfrak{M}(r) = r^p \frac{\prod\limits_{|a_k| \leqq r} \left(\frac{r}{a_k}\right)}{\prod\limits_{|b_k| \leqq r} \left(\frac{r}{b_k}\right)},$$

so gibt es eine von k unabhängige Konstante $c_3 > 0$, so daß $\mathfrak{M}(|a_k|) \leqq c_3$, $\mathfrak{M}(|b_k|) \geqq \frac{1}{c_3}$ für alle k ist.

d) *Es gibt eine von k und l unabhängige Konstante $c_4 > 0$, so daß*

$$\left|\frac{a_k}{b_l} - 1\right| \geqq c_4$$

für alle Nullstellen a_k des Zählers und alle Nullstellen b_l des Nenners ist.

Und umgekehrt ist jede Funktion von der Form (11), *deren Nullstellen und Pole diesen Bedingungen genügen, eine Juliasche Ausnahmefunktion.*

Das einfachste Beispiel einer Ausnahmefunktion wird durch

$$f(z)=\frac{\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{z}{q^n}\right)}{\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{z}{q^n}\right)}, \qquad q>1$$

geliefert. Für diese Funktion läßt sich die Ausnahmeeigenschaft sehr leicht direkt beweisen, wenn man von der Funktionalgleichung

$$f(qz)=\frac{1-qz}{1+qz}f(z)$$

Gebrauch macht.

Braunlage i. H., 31. Dezember 1924.

(Eingegangen am 1. Januar 1925.)

Zur Hillschen Theorie der Variation des Mondes.

Von

Aurel Wintner in Budapest.

Hill[1]) wird in seinen Untersuchungen zu den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} &D^2(us) - D(u)D(s) - 2m[uD(s) - sD(u)] \\ &\quad + \frac{9}{4}m^2(u+s)^2 = C, \\ &D[uD(s) - sD(u) - 2mus] + \frac{3}{2}m^2(u^2 - s^2) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

geführt. Hier sind u und s die gesuchten Funktionen, m ein Parameter, C eine Konstante, D die Operation $\zeta \frac{d}{d\zeta}$, ζ die unabhängige Veränderliche; und zwar ist $\zeta = \exp(\sqrt{-1}\,\tau)$, wo τ eine normierte Zeit bedeutet.

Hill macht den Ansatz

$$\begin{cases} u = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \zeta^{2i+1}, \\ s = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_{-i-1} \zeta^{2i+1}, \end{cases} \tag{2}$$

setzt (2) in (1) ein, vergleicht dann die Koeffizienten und gewinnt die folgenden Bedingungsgleichungen:

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left\{(2i+1)^2 + 4(2i+1)m + \frac{9}{2}m^2\right\} a_i^2 + \frac{9}{2}m^2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i a_{-i-1} = C \tag{3}$$

und

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \{[j,i]\, a_i a_{i-j} + [j]\, a_i a_{-i+j-1} + (j)\, a_i a_{-i-j-1}\} = 0, \tag{4}$$

$$j = \pm 1, \pm 2, \ldots \text{ (also } j \neq 0),$$

---

[1]) Coll. Math. Works, Bd. I, Washington 1905, S. 284–335, insbesondere S. 308 bis 310.

mit

$$(5)\quad \begin{cases} [j,i] = -\dfrac{i}{j}\,\dfrac{4(j-1)i+4j^2+4j-2-4(i-j+1)m+m^2}{2(4j^2-1)-4m+m^2}, \\ [j] = -\dfrac{3m^2}{16j}\,\dfrac{4j^2-8j-2+4(j+2)m-9m^2}{2(4j^2-1)-4m+m^2}, \\ (j) = -\dfrac{3m^2}{16j}\,\dfrac{20j^2-16j+2-4(5j-2)m+9m^2}{2(4j^2-1)-4m+m^2}. \end{cases}$$

Hat man nach (4) die Koeffizienten a_j bestimmt, so ergibt sich a_0 aus (3), wir können also (3) beiseite lassen.

Ich will hier auf Grund des unendlichen nichtlinearen Systems (4) die Existenz der von Hill postulierten periodischen Lösung (2) beweisen.

Da nach (5)

$$[j,j] = -1, \qquad [j,0] = 0,$$

so läßt sich (4) folgendermaßen schreiben:

$$(6)\quad a_0 a_j = \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' [j,i]\, a_i a_{i-j} + [j] \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i a_{-i+j-1} + (j) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i a_{-i-j-1}$$
$$(j = \pm 1,\ \pm 2, \ldots),$$

wo das Zeichen $'$ neben dem ersten Σ die Auslassung der Indizes $i = j$ und $i = 0$ bedeutet.

Ich führe zuerst in (6) die Substitution:

$$(7)\quad \begin{aligned} a_0 &= b_0, \\ a_i &= m\,\frac{b_i}{i^4}\,a_0, \quad i \neq 0 \end{aligned}$$

ein und multipliziere die so erhaltenen Gleichungen mit $\frac{j^4}{m b_0^2}$. Dann bekommt man nach einer leichten Rechnung, wenn 1 statt $\frac{1}{0}$ gelesen wird, die folgende Form der Gleichungen (4):

$$(8)\quad b_j = m f_j(m;\ b_1, b_{-1}, b_2, b_{-2}, \ldots) \quad (j = \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$$

mit

$$(9)\quad f_j = \{g_{1j} + g_{2j} + m g_{3j} + m g_{4j} + m^2 g_{5j} + g_{6j} + g_{7j} + m g_{8j} + m g_{9j} + m^2 g_{10j} + m^2 g_{11j}\}\,\frac{1}{1 - \dfrac{4m - m^2}{8j^2 - 2}},$$

$$g_{1j} = -\frac{2(j-1)}{4j^2-1} \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(i-j)^2}\,\frac{j^2}{i^2(i-j)^2}\, b_i b_{i-j},$$

$$g_{2j} = -\frac{2j^2+2j-1}{4j^2-1} \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{i-j}\,\frac{j^3}{i^3(i-j)^3}\, b_i b_{i-j},$$

$$g_{3j} = -\frac{j}{2(4j^2-1)} \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(i-j)^2} \frac{j^2}{i^2(i-j)^2} b_i b_{i-j},$$

$$g_{4j} = -\frac{j-1}{2(4j^2-1)} \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{i-j} \frac{j^3}{i^3(i-j)^3} b_i b_{i-j},$$

$$g_{5j} = -\frac{1}{2(4j^2-1)} \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{i-j} \frac{j^3}{i^3(i-j)^3} b_i b_{i-j},$$

$$g_{6j} = -\frac{3}{16} \frac{2j^2-4j-1}{j^2(4j^2-1)} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} j^4 \frac{a_i a_{-i+j-1}}{a_0 a_0},$$

$$g_{7j} = -\frac{3}{16} \frac{10j^2-8j+1}{j^2(4j^2-1)} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} j^4 \frac{a_i a_{-i-j-1}}{a_0 a_0},$$

$$g_{8j} = \frac{3}{8} \frac{j+2}{j^2(4j^2-1)} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} j^4 \frac{a_i a_{-i+j-1}}{a_0 a_0},$$

$$g_{9j} = \frac{3}{8} \frac{5j-2}{j^2(4j^2-1)} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} j^4 \frac{a_i a_{-i-j-1}}{a_0 a_0},$$

$$g_{10j} = \frac{27}{32} \frac{1}{j^2(4j^2-1)} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} j^4 \frac{a_i a_{-i+j-1}}{a_0 a_0},$$

$$g_{11j} = -\frac{27}{32} \frac{1}{j^2(4j^2-1)} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} j^4 \frac{a_i a_{-i-j-1}}{a_0 a_0}.$$

Hier ist

$$g_{lj} = g_{lj}(b_1, b_{-1}, b_2, b_{-2}, \ldots) \qquad (1 \leqq l \leqq 11;\ j \neq 0)$$

eine quadratische Funktion von unendlich vielen Veränderlichen. Ist $\bar{g}_{lj}$ die beste Majorante des Ausdruckes g_{lj}, d. h. derjenige Ausdruck, der aus g_{lj} entsteht, indem die Koeffizienten durch ihre absoluten Beträge ersetzt werden, so sind die Folgen

$$\{\bar{g}_{1j}(1, 1, 1, \ldots)\},\ \{\bar{g}_{2j}(1, 1, 1, \ldots)\},\ \ldots,\ \{\bar{g}_{11j}(1, 1, 1, \ldots)\}$$

beschränkt. — Z. B. ist die erste Folge beschränkt, da einerseits $\left\{\frac{2j^2}{4j^2-1}\right\}$ beschränkt ist, andererseits auch $\left\{\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(i-j)^2} \frac{j^2}{i^2(i-j)^2}\right\}$ wegen

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(i-j)^2} \frac{1}{i^2(i-j)^2} < \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{i^2(i-j)^2} = O\left(\frac{1}{j^2}\right) \ldots.$$

Wir haben weiter

$$|4m - m^2| \leqq 4|m| + |m|^2 \leqq 5, \text{ wenn } |m| \leqq 1,$$

es gibt also ein $\delta(>0)$ von der Beschaffenheit, daß

$$|4m - m^2| \leqq 5 + \varepsilon < 6, \text{ wenn } |m| \leqq 1 + \delta.$$

Es ist also

$$\left|\frac{4m - m^2}{8j^2 - 2}\right| \leqq \frac{5+\varepsilon}{6} < 1, \quad \text{wenn} \quad |m| \leqq 1 + \delta,$$

und die Funktionen

$$\frac{1}{1 - \frac{4m - m}{8j^2 - 2}} \qquad (j = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

sind unter dieser Voraussetzung regulär und gleichmäßig beschränkt; sei G die gemeinsame obere Grenze.

Setzen wir

$$\frac{1}{1 - \frac{4m - m^2}{8j^2 - 2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu j} m^\nu, \qquad (j = \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{10}$$

so ist nach Cauchy

$$|c_{\nu j}| \leqq \frac{G}{(1+\delta)^\nu},$$

also

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_{\nu j}| \leqq G \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\delta)^\nu}, \qquad (j = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Setzen wir (10) in (9) ein und ordnen dann formal nach Potenzen der Veränderlichen m; b_1, b_{-1}, b_2, b_{-2}, ..., so bekommen wir f_j als eine Potenzreihe von unendlich vielen Veränderlichen, die nach Formen wachsenden Grades geordnet werden kann.

Bedeutet $\bar{f}_j$ die beste Majorante von f_j, so folgt aus dem Obigen, daß

$$\{\bar{f}_j(1; 1, 1, \ldots)\}$$

beschränkt ist. Sei K die obere Grenze dieser Folge.

Ich werde beweisen, daß durch das unendliche System (8) im Kreis

$$|m| < \min(1, K^{-1})$$

die b_j als reguläre Funktionen $b_j(m)$ definiert werden, und zwar so, daß

$$|b_j(m)| \leqq 1. \tag{11}$$

Nach (7) und mit Rücksicht auf (11) definiert (2) eine periodische Lösungsschar.

Unter einer Potenzreihe $\Phi(z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots)$ von unendlich vielen Veränderlichen versteht man formal einen Ausdruck, der geschrieben werden kann in der Form: $\sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu$, wo p_ν ein Mononom von endlich vielen z_n bedeutet; ist $p_\nu + p_\mu$ ein Mononom und $\nu < \mu$, so sei $p_\mu \equiv 0$.

$\bar{\Phi}$ bedeute die beste Majorante von Φ.

Ist im Punkte

$$z_n = {}^0z_n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{12}$$

die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu$ absolut konvergent, so läßt sich mittelst dieser Reihe im Punkte (12) dem Symbol Φ eine Zahl $\Phi({}^0z_1, {}^0z_2, \ldots)$ eindeutig zuordnen. Ich werde dann sagen, daß Φ im Punkte (12) absolut konvergiert.

Ist ein jedes z_n eine Potenzreihe der Veränderlichen u_k:

$$z_n = z_n(u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots) \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{13}$$

so ist Φ auch eine Potenzreihe der Veränderlichen u_k. Sei $\Psi(u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots)$ diese transformierte Potenzreihe. Im Punkte

$$u_k = {}^0u_k \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{14}$$

sollen alle die Potenzreihen (13) absolut konvergieren. Dann ist dem Majorantensymbol $\bar{z}_n(|{}^0u_1|, |{}^0u_2|, \ldots, |{}^0u_k|, \ldots)$ eine Zahl zugeordnet. Ist nun Φ auch im Punkte

$$z_n = \bar{z}_n(|{}^0u_1|, |{}^0u_2|, \ldots, |{}^0u_k|, \ldots) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{15}$$

absolut konvergent, so ist Ψ im Punkte (14) absolut konvergent, und zwar ist

$$\Psi({}^0u_1, {}^0u_2, \ldots, {}^0u_k, \ldots) = \Phi({}^0z_1, {}^0z_2, \ldots, {}^0z_n, \ldots).$$

Es gilt nun der folgende

Satz. *Sei*

$$f_j = f_j(x; y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots) \qquad (j = 1, 2, \ldots) \tag{16}$$

eine Folge von Potenzreihen. Setzen wir voraus, daß es ein Tripel (a, b, M) *solcher positiven Zahlen gibt, für welche*

$$\bar{f}_j(a; b, b, \ldots, b, \ldots) \leqq M \qquad (j = 1, 2, \ldots) \tag{17}$$

dann konvergieren die Reihen (16) *in jedem Punkte der Menge*

$$|x| \leqq a;\ |y_1| \leqq b,\ |y_2| \leqq b,\ \ldots,\ |y_k| \leqq b,\ \ldots \tag{18}$$

absolut). — Sei

$$\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right). \tag{19}$$

Dann besitzt das System

$$y_j = x\bar{f}_j \qquad (j = 1, 2, \ldots) \tag{20}$$

eine im Kreise

$$|x| \leqq a \tag{21}$$

stetige Potenzreihen-Lösung $y_j = y_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots)$, *und zwar haben wir hier*

$$|\bar{y}_j(x)| \leqq b. \tag{22}$$

Natürlich ist

$$y_j(0) = 0. \tag{23}$$

Um diesen Satz nach der von Herrn Lindelöf[2]) auf das (spezielle) endliche System

$$y_j = x f_j(x; y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

(und auch den allgemeinen endlichen Fall) angewandten Methode zu beweisen, führen wir durch die Definition

$$[\sum_{n=0}^{\infty} A_\nu x^\nu]_n = \sum_{n=0}^{n} A_\nu x^\nu$$

die Operation $[\ ]_n$ ein, denken uns für einen Moment, daß die $y_j = y_j(x)$ bestimmt seien, und setzen

$$s_n^j = s_n^j(x) = [y_j(x)]_n.$$

Wir haben dann nach (20) (vorläufig rein formal):

$$s_n^j = x[\bar{f}_j(x; s_{n-1}^1, s_{n-1}^2, \ldots, s_{n-1}^k, \ldots)]_{n-1}, \tag{24}$$

also

$$s_1^j = x[\bar{f}_j(x; s_0^1, s_0^2, \ldots, s_0^k, \ldots)]_0,$$

d. h., da nach (23) $s_0^k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$:

$$s_1^j = x\bar{f}_j(0; 0, 0, \ldots, 0, \ldots). \tag{25}$$

Wir definieren nun die s_1^j durch (25); ihre Koeffizienten sind also $\geqq 0$. Da nach (17)

$$\bar{f}_j(0; 0, 0, \ldots, 0, \ldots) \leqq M,$$

und nach (19) $0 < a \leqq \frac{b}{M}$, so haben wir nach (25):

$$|s_1^j(x)| \leqq b \text{ für } |x| \leqq a \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

---

[2]) Démonstration élémentaire de l'existence des fonctions implicites, Bull. Darboux 23 (1899), Teil I, S. 68.

Setzen wir jetzt voraus, daß wir die s_{n-1}^j schon bestimmt, und gefunden haben, daß ihre Koeffizienten $\geqq 0$ sind, und daß

$$|s_{n-1}^j(x)| \leqq b \text{ für } |x| \leqq \alpha \qquad (j=1,2,\ldots). \tag{26}$$

Dann können wir nach (17) und, da die Koeffizienten der $\bar{f}_j \geqq 0$ sind, die s_{n-1}^j in (24) einsetzen, dann nach Potenzen von x ordnen und die s_n^j mittelst (24) definieren. Die Koeffizienten der s_n^j sind dann $\geqq 0$, und wir haben nach (24), (21) und (26):

$$|s_n^j(x)| \leqq \alpha[\bar{f}_j(\alpha; b, b, \ldots)]_{n-1} \leqq \alpha \bar{f}_j(\alpha; b, b, \ldots),$$

also nach (17) und (19):

$$|s_n^j(x)| \leqq b \text{ für } |x| \leqq \alpha. \tag{27}$$

Aus dem Vorstehenden folgt, daß wir unter der Voraussetzung (21) mittels der Definition

$$y_j(x) = \lim_{n=\infty} s_n^j(x)$$

gewisse Funktionen y_j mit Koeffizienten $\geqq 0$ einführen können. Nach (27) ist dann (22) erfüllt; man sieht leicht, daß auch (20) gilt. Denn die darin beiderseits stehenden Potenzreihen in x sind, da (24) für jedes n besteht, miteinander identisch.

Der Satz bleibt offenbar bestehen, wenn (20) durch

$$y_j = x f_j \qquad (j=1,2,\ldots) \tag{20}'$$

ersetzt wird[3]).

Budapest, 30. Dezember 1924.

---

[3]) Wegen anderen Anwendungen s. meine Noten: Über die Methode der unbestimmten Koeffizienten, Astronomische Nachrichten 223 S. 232–242, 224 S. 111; Zur Hillschen Theorie der charakteristischen Exponenten, l. c. 224, S. 7–10 (1925).

(Eingegangen am 3. Januar 1925.)

Ein Satz über unendliche Systeme von linearen Gleichungen.

Von

Aurel Wintner in Budapest.

Verf. hat kürzlich den Satz bewiesen[1]):

Sei $f_i = f_i(x; y_1, y_2, \ldots)$ eine Potenzreihe von unendlich vielen Veränderlichen, $i = 1, 2, \ldots$, sei $\bar{f}_i$ die beste Majorante von f_i, und

$$\bar{f}_i(a; b, b, \ldots) \leqq M \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots \qquad (a > 0,\ b > 0,\ M > 0),$$

$$\alpha = \operatorname{Min}\left(a, \frac{b}{M}\right);$$

dann kann das System

$$y_i = x f_i, \qquad |y_i| \leqq b \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

in jedem Punkte des Kreisbereiches $|x| \leqq \alpha$ gelöst werden.

Daraus folgt: Ist

$$|c_i| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| \leqq 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

so kann das System

$$y_i = c_i + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} y_k, \qquad |y_i| \leqq 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

gelöst werden; denn setzt man

$$f_i = c_i + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} y_k, \qquad a = 1,\ b = 1,\ M = 1,$$

so ist $\alpha = 1$.

Anders ausgedrückt: Ist

$$|c_i| + \sum_{k=1}^{\infty} |A_{ik} - \delta_{ik}| \leqq 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

wo $\delta_{ii} = 1$, sonst $\delta_{ik} = 0$, so kann das Problem

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{ik} y_k = c_i, \qquad |y_i| \leqq 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

gelöst werden.

Budapest, 26. März 1925.

[1]) Vgl. die unmittelbar vorangehende Abhandlung.

(Eingegangen am 30. März 1925.)

Über die Summabilität der Laplaceschen Reihe durch arithmetische Mittel.

Von

Leopold Fejér in Budapest.

Einleitung.

1. In der Theorie der Fourierschen Reihe hat es sich als nützlich erwiesen: 1) außer den gewöhnlichen *Partialsummen* der Reihe auch ihre *arithmetischen Mittel* (verschiedener Ordnung), 2) außer dem gewöhnlichen *Grenzwert der Funktion* an der betreffenden Stelle auch die zu dieser Stelle gehörigen *Integralmittelwerte* (verschiedener Ordnung) in Betracht zu ziehen. Man konnte so zu allgemeineren Gesetzmäßigkeiten vordringen, besonders durch: 3) Hinzunahme der *neueren Integralbegriffe*.

Diese Bemerkung trifft auch für manche verwandte Orthogonalentwicklungen zu; so auch für die Fourierentwicklung des 3-dimensionalen Raumes: die Laplacesche Reihe.

Im Jahre 1908 und später[1]) habe ich Arbeiten veröffentlicht, in denen ich mich mit den arithmetischen Mitteln der Laplaceschen Reihe beschäftige, besonders mit den Mitteln zweiter Ordnung, die doch das wahre Analogon der Mittel erster Ordnung der Fourierschen Reihe bilden. Was über die interessante Frage der Summabilität der Laplaceschen Reihe von niedrigerer als zweiter Ordnung betrifft, so wurden seitdem in dieser Richtung von verschiedenen Autoren neue Resultate zutage gefördert[2]).

---

[1]) L. Fejér, a) Sur le développement d'une fonction arbitraire suivant les fonctions de Laplace [Comptes Rendus **146** (1908), S. 224–227]. b) A Laplace-féle sorról (ungarisch) [Mathematikai és Term. Értesitő **26** (1908), S. 323–373]. c) Über die Laplacesche Reihe [Math. Annalen **67** (1909), S. 76–109]. Über gewisse durch die Fouriersche und Laplacesche Reihe definierten Mittelkurven und Mittelflächen [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **38** (1914), S. 79–97].

[2]) A. Haar, a) Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme [Math. Annalen **69** (1910), S. 331–371]. b) Über die Legendresche Reihe [Rendiconti di Palermo **32** (1911), S. 132–142]. S. Chapman, a) On the general theory of summabi-

In dieser Arbeit beschäftige ich mich hauptsächlich mit den wichtigen Resultaten von Herrn Gronwall. Mein früh verstorbener Schüler Franz Lukács hat einige prägnante Resultate von Gronwall auf kürzerem Wege gewonnen. Der Beweis, den ich in dieser Arbeit gebe, ist noch kürzer; besonders wenn es sich um Summabilität von niedrigerer als erster Ordnung handelt. Der Grundgedanke des Beweises ist derselbe, den ich für den Fall der Ordnung 2 schon in meiner ersten Arbeit angegeben habe [3]).

Was die Hilfsmittel des Beweises anbelangt, so benutze ich die Ungleichungen

$$(II) \qquad |P_n(\cos\theta)| < A,$$

$$(I) \qquad |P_n(\cos\theta)| < \frac{B}{\sqrt{n}\sqrt{\sin\theta}},$$

$$0 < \theta < \pi,$$

die sich auf das Legendresche Polynom beziehen, und in welchen A, B positive, von n und θ unabhängige, numerische Konstanten bedeuten. Die erste Ungleichung ist trivial, die zweite, von fundamentaler Wichtigkeit, rührt von Stieltjes her, und läßt sich sehr einfach beweisen. Die dritte Abschätzung (die ich für den Fall $\frac{1}{2} < k < 1$ brauche) bezieht sich auf das arithmetische Mittel k-ter Ordnung $\sigma_n^{(k)}$ der „Fourierschen Kernreihe"

$$1 + 2\cos\theta + 2\cos 2\theta + \ldots + 2\cos n\theta + \ldots$$

---

lity with applications to Fourier's and other series [Quarterly Journal of pure and applied Mathematics **43**, No. 169 (1911), S. 1–52]. b) On the summability of Series of Legendre's Functions [Math. Annalen **72** (1912), S. 211–227]. T. H. Gronwall, a) Über die Laplacesche Reihe [Math. Annalen **74** (1913), S. 213–270]. b) Über die Summierbarkeit der Reihen von Laplace und Legendre [Math. Annalen **75** (1914), S. 321–375]. F. Lukács, a) Sur la série de Laplace [Comptes Rendus **157** (1913), S. 632–634]. b) A Laplace sorról (ungarisch) [Math. és Phys. Lapok **23** (1914), S. 356–377]. c) Über die Laplacesche Reihe [Math. Zeitschr. 1 (1922), S. 250–262]. E. Hilb, Über die Laplacesche Reihe [Math. Zeitschr. (1919), S. 17–25, und **8** (1920), S. 79–90]. O. Volk, Über die Reihen von Laplace und Legendre [Münch. Sitzungsber., Jahrg. 1921, S. 167–188]. E. Kogbetliantz, a) Über die (C, δ)-Summierbarkeit der Laplaceschen Reihen [Math. Zeitschr. **14** (1922), S. 99–109]. b) Recherches sur la sommabilité des séries ultrasphériques par la méthode des moyennes arithmétiques [Journal de Mathématiques pures et appliquées, IX série, **3** (1924), S. 107–187]. – Summation mittels einer Methode, die der Summationsmethode von Herrn de la Vallée-Poussin nahe verwandt ist: M. Plancherel, Sur la sommation des séries de Laplace et de Legendre (Circolo di Palermo **38** (1912), S. 41–66].

[3]) Er ist in der Fußnote [2]) auseinandergesetzt.

nd lautet

$$\text{III)} \qquad |\bar{s}_n^{(k)}(\theta)| < \frac{C}{n^k \theta^{1+k}} \quad (C \text{ unabhängig von } n \text{ und } \theta)$$

$$(0 \leqq k \leqq 1; \quad 0 < \theta \leqq \pi; \quad n = 1, 2, \ldots).$$

Diese Ungleichung wurde von den Herren Marcel Riesz und Chapman gefunden. Wie nun Herr Marcel Riesz neuerdings in einer schönen Arbeit[4]) in einigen Zeilen gezeigt hat, ist die Abschätzung (III) geradezu quivalent mit dem folgenden Satze, der sich auf die Binomialreihe bezieht, und lautet:

Wenn $0 \leqq \varrho \leqq 1$, und

$$\frac{1}{(1-z)^\varrho} = \gamma_0 + \gamma_1 z + \ldots + \gamma_n z^n + \ldots,$$

ist

$$\text{III')} \qquad |\gamma_0 + \gamma_1 z + \ldots + \gamma_n z^n| < \frac{H}{|1-z|^\varrho},$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots, \infty; \quad |z| \leqq 1, z \neq 1),$$

wo H eine Konstante bedeutet (die wohl von ϱ abhängt, aber von n und der komplexen Zahl z unabhängig ist).

Auch diesen (von ihm übrigens nicht ausdrücklich formulierten) Satz über die Binomialreihe beweist Herr Marcel Riesz in einigen Zeilen und ganz elementar. Was also die bei dem Beweise über die Summabilität k-ter Ordnung ($\frac{1}{2} < k < 1$) der Laplaceschen Reihe in dieser Arbeit benutzten Hilfsmittel betrifft, so kann ich den Sachverhalt so charakterisieren: außer den Abschätzungen (I) und (II) des Legendreschen Polynoms wird nur die elementare Abschätzung (III') der Partialsummen der Binomialreihe benutzt[4a]), eine Abschätzung, aus welcher (wie Herr Marcel Riesz bewiesen hat) die analogen Sätze über die Summabilität k-ter Ordnung der Fourierreihe ($0 < k \leqq 1$) von Marcel Riesz und Chapman,

---

[4]) Marcel Riesz, Sur la sommation des séries de Fourier [Acta Litterarum ac scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco–Josephinae, sectio scientiarum Mathematicarum 1 (1923), S. 104–113]. Hier findet man auch sehr lehrreiche Ausführungen über die Bedeutung der arithmetischen Mittel beliebiger Ordnung für die Orthogonalreihen überhaupt; weiter viele geschichtliche und bibliographische Daten über die Summabilität der Fourierreihe.

[4a]) Im § 1 meiner Arbeit „Abschätzungen des Legendreschen Polynoms und verwandter Polynome“ [Math. Zeitschr. 24, S. 285–298] zeige ich, daß auch die Stieltjessche Abschätzung (I) des Legendreschen Polynoms aus dem Theoreme (III') mit $\varrho = \frac{1}{2}$) äußerst leicht und elementar gewonnen werden kann. Ich kann also schließlich sagen: das *einzige* wesentliche Hilfsmittel meines Beweises für die Summabilität der Laplaceschen Reihe bildet der Satz (III') über die Partialsummen der Binomialreihe.

sowie ihre Hardysche Verallgemeinerung nach Lebesguescher Richtung unmittelbar abgeleitet werden können.

Nachdem die Durchsichtigkeit des Beweises solcherweise erhöht wurde war es eine Leichtigkeit, die Konvergenz der Mittel der Laplaceschen Reihe höherer als $\frac{1}{2}$-ter Ordnung zum Werte A bei einer auf der ganzen Kugel absolut integrierbaren Funktion $f(\theta, \varphi)$ auch dann nachzuweisen wenn an der Entwicklungsstelle a der Kugel die Funktion *unstetig* wird jedoch so, daß

$$\frac{1}{K_\varepsilon} \iint_{(K_\varepsilon)} |f - A| \, do \to 0, \quad \varepsilon \to +0,$$

wo die Integration über die Kugelkalotte zu erstrecken ist, deren Mittelpunkt der Punkt a der Kugel ist, und deren sphärischer Radius ε ist K_ε bedeutet den Flächeninhalt dieser Kalotte. Ja es genügt schon, daß der gewöhnliche Lebesguesche absolute Mittelwert von $F(\gamma)$ gleich A sei, d. h.

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon |F(\gamma) - A| \, d\gamma \to 0, \quad \varepsilon \to +0.$$

Hier bedeutet $F(\gamma)$ den in der Theorie der Laplaceschen Reihe auftretenden Integralmittelwert der Funktion $f(\theta, \varphi)$, genommen für den sphärischen Kreis mit dem Mittelpunkte a, und mit dem sphärischen Radius γ.

Diese Verallgemeinerung des Gronwallschen Satzes ist für $k \geqq$ ohne Beschränkung, für $\frac{1}{2} < k < 1$ aber nur dann gültig, wenn am Gegenpol b von a die Gronwallsche Gegenpolbedingung erfüllt ist, d. h. wenn nicht nur $\iint |f| \, do$, sondern auch $\iint \frac{|f|}{\sqrt{l}} do$ existiert, wo l die Entfernung des Flächenelementes do vom Gegenpol b bezeichnet. (Diese Bedingung ist sicher erfüllt, wenn f auf der ganzen Kugel beschränkt ist, aber auch dann, wenn für das absolut integrierbare f in einer noch so kleinen Umgebung von b

$$|f| < \text{konst.} \frac{1}{l^s}, \quad s < \frac{3}{2}.)$$

§ 1.

Über die arithmetischen Mittel der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n$ im allgemeinen.

2. Da die *Lage* der Stelle auf der Einheitskugel, an welcher ich die Laplacesche Reihe untersuche, ebenso irrelevant ist wie etwa die Lage der Stelle auf dem Einheitskreise bei der Fourierreihe, so kann ich mich auf die Untersuchung der Laplaceschen Reihe auf dem Nordpol be

schränken. Bezeichnet nun $f(\theta, \varphi)$ die auf der Einheitskugel absolut integrierbare Funktion, so ist ihre (aus konstanten Gliedern bestehende) Laplacesche Reihe am Nordpol

$$\text{(L)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4\pi} \iint_K f \cdot (2n+1) P_n(\cos\theta)\, do = \sum_{n=0}^{\infty} L_n,$$

wo do das Oberflächenelement an der Stelle (θ, φ) der Einheitskugel (θ, φ) bedeutet und die Integration über die ganze Einheitskugel zu erstrecken ist. $P_n(\cos\theta)$ bedeutet das n-te Legendresche Polynom. Da ich die arithmetischen Mittel k-ter Ordnung der Reihe (L) untersuche, so möchte ich daran erinnern, daß man unter den arithmetischen Mitteln k-ter Ordnung $(k \geqq 0)$ einer unendlichen Reihe

$$\text{(1)} \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

die Folge [5])

$$\text{(2)} \qquad \frac{C_n^{(k)} u_0 + C_{n-1}^{(k)} u_1 + C_{n-2}^{(k)} u_2 + \ldots + C_0^{(k)} u_n}{C_n^{(k)}} \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

versteht, wo

$$\frac{1}{(1-r)^{1+k}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(k)} r^n,$$

so daß also das n-te Mittel k-ter Ordnung der Reihe (1) gleich ist dem n-ten Entwicklungskoeffizienten von $\frac{1}{(1-r)^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} u_n r^n$, dividiert durch den n-ten Entwicklungskoeffizienten von $\frac{1}{(1-r)^{k+1}}$.

Bezeichne ich nun das arithmetische Mittel der Reihe

$$\text{(3)} \qquad P_0 + 3P_1 + 5P_2 + \ldots + (2n+1)P_n + \ldots$$

mit

$$s_n^{(k)} = \frac{S_n^{(k)}}{C_n^{(k)}},$$

und das der Laplaceschen Reihe (L) mit

$$\sigma_n^{(k)} = \frac{\Sigma_n^{(k)}}{C_n^{(k)}},$$

so ist

$$\text{(4)} \qquad \sigma_n^{(k)} = \frac{1}{4\pi} \iint_K f s_n^{(k)}\, do.$$

---

[5]) Das n-te Mittel ist also dem absoluten Betrage nach $\leqq |u_0| + |u_1| + \ldots + |u_n|$, wenn $k \geqq 0$.

Um nun das arithmetische Mittel $s_n^{(k)}$ der elementaren Kernreihe (3) abschätzen zu können, bemerke ich, daß, bekanntlich (und übrigens aus (7) sofort ersichtlich)

$$(5) \qquad \frac{1-r^2}{(1-2\cos\theta\cdot r+r^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(\cos\theta)\cdot r^n .$$

Da aber einerseits

$$(6) \qquad \frac{1-r^2}{(1-2\cos\theta\cdot r+r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1-2\cos\theta\cdot r+r^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1-r^2}{1-2\cos\theta\cdot r+r^2},$$

andererseits

$$(7) \qquad \frac{1}{(1-2\cos\theta\cdot r+r^2)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\,r^n,$$

$$(8) \qquad \frac{1-r^2}{1-2\cos\theta\cdot r+r^2} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}2\cos n\theta\cdot r^n,$$

so sieht man, daß die Reihe

$$(3) \qquad P_0(\cos\theta)+3P_1(\cos\theta)+\ldots+(2n+1)P_n(\cos\theta)+\ldots$$

das Cauchysche Produkt der Reihen

$$(9) \qquad P_0(\cos\theta)+P_1(\cos\theta)+\ldots+P_n(\cos\theta)+\ldots$$

$$(10) \qquad 1 \quad + \quad 2\cos\theta \quad +\ldots+ \quad 2\cos n\theta \quad +\ldots$$

ist [6]). Bezeichnet man also das arithmetische Mittel der bei der Fourierreihe auftretenden Reihe (10) mit

$$(11) \qquad \sigma_n^{(k)} = \frac{\mathfrak{S}_n^{(k)}}{C_n^{(k)}},$$

so ist, da doch mit Rücksicht auf [7]) (6)

---

[6]) Diese Bemerkung befindet sich auf S. 81 meiner in der Fußnote [1]) unter zitierten Arbeit.

[7]) Ich belaste also lieber den „trigonometrischen Faktor" $\frac{1-r^2}{1-2\cos\theta\cdot r+r^2}$ m $\frac{1}{(1-r)^{k+1}}$, d. h. ich führe lieber die unvergleichlich leichter zu untersuchende Mittel (oder, besser gesagt: Cesàro-Zähler) der Fourierschen Kernreihe

$$1+2\cos\theta+2\cos 2\theta+\ldots+2\cos n\theta+\ldots$$

ein. Dies war auch der Grundgedanke meines Beweises für die Mittel zweiter Ordnu der Laplaceschen Reihe.

$$\frac{1}{(1-r)^{k+1}}\,\frac{1-r^2}{(1-2\cos\theta\cdot r+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{(1-2\cos\theta\cdot r+r^2)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{1}{(1-r)^{k+1}}\,\frac{1-r^2}{1-2\cos\theta\cdot r+r^2},$$

12) $$S_n^{(k)}=P_0\mathfrak{S}_n^{(k)}+P_1\mathfrak{S}_{n-1}^{(k)}+P_2\mathfrak{S}_{n-2}^{(k)}+\ldots+P_n\mathfrak{S}_0^{(k)}$$

Diese Formel (12) bildet die Grundlage des Beweises. Sie besagt, daß er „Cesàro-Zähler" der Laplaceschen Kernreihe (d. h. der Reihe (3)) leich ist der „Produktkomposition"[8]) der Legendreschen Polynome

$$P_0, P_1, \ldots, P_n$$

nit den Cesàro-Zählern derselben Ordnung der Fourierschen Kernreihe d. h. der Reihe (10)):

$$\mathfrak{S}_0^{(k)}, \mathfrak{S}_1^{(k)}, \ldots, \mathfrak{S}_n^{(k)}.$$

§ 2.

Abschätzung der arithmetischen Mittel erster Ordnung der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n$.

3. Wenn $k=1$, dann liefert (12)

12′) $$S_n^{(1)}=P_0\mathfrak{S}_n^{(1)}+P_1\mathfrak{S}_{n-1}^{(1)}+\ldots+P_n\mathfrak{S}_0^{(1)}.$$

Da aber bekanntlich

$$\mathfrak{S}_n^{(1)}=\frac{\sin^2(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

so ist

12″) $$S_n^{(1)}=P_0\frac{\sin^2(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}+P_1\frac{\sin^2 n\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}+\ldots+P_n\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

Da

I) $$|P_n(\cos\theta)|\leqq\frac{G_1}{\sqrt{n}}\,\frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}\qquad(0<\theta<\pi;\ n=1,2,3,\ldots),$$

so erhalte ich auf Grund von (12″)

$$|S_n^{(1)}|\leqq\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}(1+|P_1|+|P_2|+\ldots+|P_n|)$$

$$\leqq\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{G_1}{\sqrt{\sin\theta}}\left(\frac{1}{G_1}+\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

[8]) *Kreuzweise* Multiplikation und Addition.

d. h.

$$(13) \qquad |S_n^{(1)}| \leqq G_2 \sqrt{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{\sin \theta}} \qquad (0 < \theta < \pi;\ n = 1, 2, \ldots).$$

Hier bedeuten G_1, G_2 und später $G_3, G_4, \ldots$ Konstanten, die von n und θ unabhängig sind.

Weiter ist, mit Rücksicht auf

$$(II) \qquad |P_n(\cos\theta)| \leqq 1 \qquad (0 \leqq \theta \leqq \pi;\ n = 0, 1, 2, \ldots)$$

und $\frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \leqq 2$ für $\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$, auf Grund von (12″)

$$(14) \qquad |S_n^{(1)}| \leqq 2(n+1) \qquad \left(\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi\right).$$

Endlich ist auf Grund von (II) und $\left(\frac{\sin (n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}\right)^2 \leqq (n+1)^2$

$$(15) \qquad |S_n^{(1)}| \leqq (n+1)^2 + n^2 + \ldots + 1^2 \leqq G_3 n^3 \qquad (0 \leqq \theta \leqq \pi).$$

(13), (14), (15) ergeben für $\varepsilon_n^{(1)} = \frac{S_n^{(1)}}{C_n^{(1)}} = \frac{S_n^{(1)}}{n+1}$ die dreifache Abschätzung

$$(16_1) \qquad |s_n^{(1)}(\theta)| \leqq \begin{cases} G_3 n^3 & \text{für } 0 \leqq \theta \leqq \pi, \\ (16_2) \quad \dfrac{G_2}{\sqrt{n}} \dfrac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{\sin \theta}} & \text{für } 0 < \theta < \pi, \\ (16_3) \quad 2 & \text{für } \frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi, \end{cases}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

§ 3.

Beweis des Gronwallschen Satzes für die arithmetischen Mittel erster Ordnung der Laplaceschen Reihe.

4. Aus den Abschätzungen (16) folgt nun der Gronwallsche Satz für die Mittel erster Ordnung durch heute schon allgemein übliche Schlüsse. Ich ziehe auf der Kugel die Parallelkreise $\theta = \varepsilon$ und $\theta = \pi - \varepsilon$ $\left(0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right)$. Diese teilen die Kugel in drei Teile: K_1, K_2, K_3. Es ist dann

$$(17) \qquad |\sigma_n^{(1)}| \leqq \frac{1}{4\pi} \iint_K |f|\,|s_n^{(1)}|\,do = \frac{1}{4\pi} \iint_{K_1} \ldots + \frac{1}{4\pi} \iint_{K_2} \ldots + \frac{1}{4\pi} \iint_{K_3} \ldots$$

$$= J_n' + J_n'' + J_n'''.$$

us Abschätzung (16_2) folgt aber, daß auf K_2 (d. h. für $\varepsilon \leqq \theta \leqq \pi - \varepsilon$)

18) $$\lim_{n=\infty} s_n^{(1)}(\theta) = 0$$

leichmäßig erfüllt ist. Also ist bei festem, sonst beliebig kleinem ε

19) $$\lim_{n=\infty} J_n'' = 0.$$

Weiter ist wegen (16_3)

$$J_n''' \leqq \frac{1}{4\pi} \cdot 2 \cdot \iint_{K_3} |f| \, do,$$

lso

20) $$J_n''' \leqq \delta,$$

enn nur ε genügend klein ist. δ bedeutet eine vorgeschriebene positive Zahl.

Man sieht also schon jetzt, daß die Unbestimmtheitsgrenzen von $\sigma_n^{(1)}$ r $n \to \infty$ nur vom Verhalten von $f(\theta, \varphi)$ am Nordpole abhängen. Um iederholungen zu vermeiden, beschränke ich mich auf den Fall, wo (θ, φ) am Nordpol stetig ist, und dort etwa den Wert 0 annimmt. enn ich dann ε so klein wähle, daß nicht nur (20) befriedigt ist, sondern aß auch

$$|f(\theta, \varphi)| \leqq \delta \quad \text{auf} \quad K_1$$

esteht, so ist

21) $$J_n' \leqq \frac{\delta}{4\pi} \iint_{K_1} |s_n^{(1)}| \, do < \frac{\delta}{4\pi} \iint_{K} |s_n^{(1)}| \, do.$$

Nun ist aber

22) $$\frac{1}{4\pi} \iint_{K} |s_n^{(1)}| \, do$$

-te Lebesguesche Konstante erster Ordnung der Laplaceschen Reihe) on n unabhängig beschränkt. Für den Teil des Integrals, der sich auf e südliche Halbkugel S bezieht, ist das wegen (16_3) selbstverständlich. ir die nördliche Halbkugel mache ich die Zerlegung

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{N} |s_n^{(1)}| \, do = \frac{1}{4\pi} \iint_{\left(0 \leqq \theta \leqq \frac{1}{n}\right)} |s_n^{(1)}| \, do + \frac{1}{4\pi} \iint_{\left(\frac{1}{n} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)} |s_n^{(1)}| \, do = i_n^* + i_n^{**}.$$

Auf Grund von (16_1) ist nun

24) $$i_n^* \leqq \frac{1}{4\pi} G_3 n^2 \iint_{\left(0 \leqq \theta \leqq \frac{1}{n}\right)} do = \frac{1}{4\pi} G_3 n^2 \cdot 2\pi \int_0^{\frac{1}{n}} \sin\theta \, d\theta \leqq G_4,$$

und auf Grund von (16_2) ist

$$(25) \qquad i_n^{**} \leqq \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{G_3}{\sqrt{n}} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}\sqrt{\sin\theta}} \leqq \frac{G_5}{\sqrt{n}} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\theta^{\frac{3}{2}}} \leqq G_6,$$

also ist tatsächlich

$$(26) \qquad \frac{1}{4\pi} \iint_K |s_n^{(1)}|\, do < G_7, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Aus (26), (21), (20), (19), (17) folgt endlich, daß

$$27) \qquad |\sigma_n^{(1)}| \leqq G_7\delta + \delta + \delta \leqq G_8\delta$$

st, wenn nur n genügend groß gewählt wird.

Also ist der Gronwallsche Satz bewiesen:

Die arithmetischen Mittel erster Ordnung der Laplaceschen Reih einer auf der ganzen Kugel absolut integrierbaren Funktion konvergiere für $n \to \infty$ an jeder Stetigkeitsstelle zum Funktionswert.

Natürlich sind die Sätze über gleichmäßige Konvergenz mitbewiese

§ 4.

Abschätzung der Mittel k-ter Ordnung der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P$ wenn $\frac{1}{2} < k \leqq 1$.

5. Wenn $\frac{1}{2} < k \leqq 1$, so ist[9])

$$(III) \qquad |\mathfrak{S}_n^{(k)}(\theta)| < \frac{H_1}{\theta^{1+k}}, \qquad (0 < \theta < \pi;\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Hier bedeuten H_1 und später $H_2, H_3, \ldots$ Konstanten, die von k abhäng können, aber von n und θ unabhängig sind.

Mit Rücksicht auf (12), (I), (III) ist

$$(28) \qquad |S_n^{(k)}(\theta)| \leqq \frac{G_1}{\sqrt{\sin\theta}} \frac{H_1}{\theta^{1+k}} \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\leqq H_2\sqrt{n} \cdot \frac{1}{\theta^{1+k}\sqrt{\sin\theta}};$$

also ist, da $|s_n^{(k)}| = \frac{|S_n^{(k)}|}{C_n^{(k)}} \leqq \frac{H_3|S_n^{(k)}|}{n^k}$,

---

[9]) S. die Einleitung und Formel (11).

29) $$|s_n^{(k)}(\theta)| \leqq H_4 \cdot \frac{1}{n^{k-\frac{1}{2}}} \frac{1}{\theta^{1+k}\sqrt{\sin\theta}},$$

$$\left(0 < \theta < \pi;\ n = 1, 2, \ldots;\ \frac{1}{2} < k \leqq 1\right).$$

Außer dieser Ungleichung (29) brauche ich nur noch die triviale Abschätzung, die sich aus der Tatsache ergibt, daß auf Grund von (II) das n-te Glied der Reihe (3) absolut $\leqq 2n+1$ ist. Auf Grund der Bemerkung in der Fußnote [5]) ist also

30) $$|s_n^{(k)}(\theta)| \leqq 1 + 3 + \ldots + (2n+1) = (n+1)^2 \leqq G_9 n^2$$
$$(0 \leqq \theta \leqq \pi;\ n = 1, 2, \ldots).$$

§ 5.

Über die arithmetischen Mittel der Laplaceschen Reihe von der Ordnung $\frac{1}{2} < k \leqq 1$.

6. Auf Grund von (4) ist

31) $$\sigma_n^{(k)} = \frac{1}{4\pi}\iint_K f s_n^{(k)}\, do = J_n' + J_n'' + J_n''',$$

wo die Zerlegung wieder nach den Kugelteilen $0 < \theta < \varepsilon$, $\varepsilon < \theta < \pi - \varepsilon$, $\pi - \varepsilon < \theta < \pi$ vorgenommen worden ist. Da nach (29) $s_n^{(k)}(\theta)$ für $0 < \varepsilon \leqq \theta \leqq \pi - \varepsilon < \pi$ *gleichmäßig* gegen 0 konvergiert, wenn $n \to +\infty$ strebt, so strebt

32) $$J_n'' \to 0.$$

Weiter ist wieder mit Rücksicht auf (29)

33) $$|J_n'''| \leqq \frac{1}{4\pi} \frac{H_4}{n^{k-\frac{1}{2}}} \iint_{K_3} |f| \cdot \frac{1}{\theta^{1+k}\sqrt{\sin\theta}}\, do$$
$$\leqq \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{H_4}{n^{k-\frac{1}{2}}} \iint_{K_3} \frac{|f|}{\sqrt{\pi-\theta}}\, do \leqq \frac{H_5}{n^{k-\frac{1}{2}}} \iint_{K_3} \frac{|f|}{\sqrt{\pi-\theta}}\, do.$$

Hier ist aber stillschweigend vorausgesetzt, daß neben $\iint_K |f|$ auch

34) $$\iint_K \frac{|f|}{\sqrt{\pi-\theta}}\, do$$

existiert (was nur eine Beschränkung von $|f|$ für den Gegenpol, den Südpol, involviert). Unter der Gegenpolbedingung (34) strebt also

35) $$J_n''' \to 0.$$

Das infinitäre Verhalten von $\sigma_n^{(k)}$ hängt also nur vom Verhalten von $f(\theta, \varphi)$ am Nordpole ab, wenn die Südpolbedingung (34) erfüllt ist.

Nun ist aber weiter

$$(36) \qquad J_n' = \frac{1}{4\pi}\iint_{K_1} f s_n^{(k)}\, do = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\varepsilon}\int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi)\, s_n^{(k)}(\theta) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\varepsilon} F(\theta) \sin\theta\, s_n^{(k)}(\theta)\, d\theta,$$

wenn

$$(37) \qquad F(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi)\, d\varphi$$

gesetzt wird. Daraus entnehmen wir, daß das Verhalten von $\sigma_n^{(k)}$ fü $n \to \infty$ nur vom Verhalten der Funktion $F(\theta)$ an der Stelle $\theta = 0$ ab hängt, also vom Verhalten des Integralmittelwertes der Funktion $f(\theta, \varphi$ in bezug auf einen Parallelkreis in der Umgebung von[10]) $\theta = 0$.

7. Jetzt möchte ich die Beschränkung angeben, die ich der Funktio an der Entwicklungsstelle (d. h. am Nordpol) auferlege. Ich fordere, da

für $F(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi)\, d\varphi$

$$(38) \qquad \int_0^{\theta} |F(t)|\, dt$$

existiert[11]), ja sogar, daß

$$(39) \qquad \Phi(\theta) = \frac{\int_0^{\theta} |F(t)|\, dt}{\theta} \to 0, \quad \text{wenn}^{12}) \quad \theta \to +0.$$

---

[10]) Betrachten wir die Fourierreihe einer auf dem Einheitskreise gegeben Funktion $f(\theta)$ und untersuchen wir die Reihe im Punkte $\theta = 0$ (den wir uns etw durch den höchst gelegenen Punkt des Einheitskreises repräsentiert denken können so hängt das infinitäre Verhalten der Partialsummen oder ihrer Mittel für $\theta = 0$ b kanntlich von

$$\mathfrak{F}(\theta) = \frac{f(\theta) + f(-\theta)}{2}$$

für $\theta = +0$ ab. *Dieser* Bildung $\mathfrak{F}(\theta)$ entspricht nun bei der Laplaceschen Reih die Funktion $F(\theta)$.

[11]) Wird $\cos\theta = x$, $F(\theta) = F^*(x)$ gesetzt, so bedeutet für $F^*(x)$ die Ford rung (38), daß, außer $\int_x^1 |F^*(u)|\, du$, auch

$$(38') \qquad \int_x^1 \frac{|F^*(u)|}{\sqrt{1-u}}\, du$$

(Fortsetzung der Fußnote 11 sowie Fußnote 12 auf nächster Seite.)

Ich stelle also für $F(\theta)$ genau dieselbe Bedingung, die Herr Lebesgue für $\mathfrak{F}(\theta)$ bei der Fourierreihe gestellt hat.

8. Es sei nun δ eine beliebig kleine, aber feste positive Zahl, und ε so gewählt, daß $|\Phi(\theta)| < \delta$, wenn $0 < \theta \leqq \varepsilon$, was laut Voraussetzung (39) jedenfalls möglich ist. Es sei weiter $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Dann ist, laut (36),

$$(40) \qquad J_n' = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{n}} F(\theta)\sin\theta\, s_n^{(k)}(\theta)\,d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon} \ldots = j_n' + j_n''.$$

Mit Rücksicht auf (30) ist aber

$$(41) \quad |j_n'| \leqq \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{n}} |F(\theta)|\cdot\frac{1}{n}\cdot G_9 n^2\,d\theta = \frac{G_9}{2}\,\frac{\int_0^{\frac{1}{n}} |F(\theta)|\,d\theta}{\frac{1}{n}} = \frac{G_9}{2}\,\Phi\left(\frac{1}{n}\right) \leqq G_{10}\delta.$$

Weiter ist mit Rücksicht auf (29)

$$) \quad |j_n''| \leqq \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon} |F(\theta)|\sin\theta\cdot H_4\cdot\frac{1}{n^{k-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{\theta^{1+k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}\,d\theta \leqq \frac{H_5}{n^{k-\frac{1}{2}}}\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon} |F(\theta)|\cdot\frac{1}{\theta^{\frac{1}{2}+k}}\,d\theta.$$

Da aber[13])

---

existiert. Die Forderung (39) bedeutet, daß sogar

$$(39') \qquad \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\int_x^1 \frac{|F^*(u)|}{\sqrt{1-u}}\,du \to 0 \quad \text{für} \quad x \to 1-0$$

sein soll.

In der Terminologie der Fußnote [15]) lautet also die Forderung (39), wenn ich sie für das „Legendresche“ $F^*(x)$ formuliere, so: Die Funktion $F^*(x)$ habe an der Stelle $x=1$ das absolute (linksseitige) Momentmittel 0 *von der Ordnung* $r=\frac{1}{2}$. Das ist eine *schärfere* Bedingung als die Lebesguesche, welche der Ordnung $r=1$ entspricht.

[12]) Der allgemeine Fall, wo eine Konstante F existiert, so daß

$$\frac{\int_0^{\theta} |F(t)-F|\,dt}{\theta} \to 0, \quad \text{wenn} \quad \theta \to +0,$$

läßt sich auf den Spezialfall $F=0$ zurückführen.

[13]) Bei der simpleren Voraussetzung: $F(\theta) \to 0$, wenn $\theta \to +0$, würden wir diese partielle Integration ersparen.

$$(43)\qquad \int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon} |F(\theta)| \cdot \frac{1}{\theta^{\frac{1}{2}+k}}\, d\theta$$

$$= \left[\left(\int_0^{\theta} |F(t)|\, dt\right) \cdot \frac{1}{\theta^{\frac{1}{2}+k}}\right]_{\theta=\frac{1}{n}}^{\theta=\varepsilon} + \left(\frac{1}{2}+k\right) \int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon} \left(\int_0^{\theta} |F(t)|\, dt\right) \frac{1}{\theta^{\frac{3}{2}+k}}\, d\theta$$

$$= \left[\Phi(\theta) \cdot \frac{1}{\theta^{k-\frac{1}{2}}}\right]_{\theta=\frac{1}{n}}^{\theta=\varepsilon} + \left(\frac{1}{2}+k\right) \int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon} \Phi(\theta) \cdot \frac{1}{\theta^{\frac{1}{2}+k}}\, d\theta \leqq \frac{\Phi(\varepsilon)}{\varepsilon^{k-\frac{1}{2}}} + H_6\, \delta\, n^{k-\frac{1}{2}}$$

so ist, mit Rücksicht auf (42),

$$(44)\qquad |j_n''| \leqq \frac{H_5}{n^{k-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\Phi(\varepsilon)}{\varepsilon^{k-\frac{1}{2}}} + H_5 H_6\, \delta \leqq H_7\, \delta,$$

wenn n genügend groß ist.

(31), (32), (35), (40), (41), (44) ergeben

$$|\sigma_n^{(k)}| \leqq \delta + \delta + G_{10}\, \delta + H_7\, \delta \leqq H_8\, \delta$$

für genügend große n. Also ist

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n^{(k)} = 0,$$

w. z. b. w.

Ich habe also folgende Verallgemeinerung (in Lebesguescher Richtung) des Gronwallschen Satzes bewiesen:

Die arithmetischen Mittel k-ter Ordnung der Laplaceschen Reihe einer auf der ganzen Einheitskugel absolut integrierbaren Funktion f sind, wenn $k > \frac{1}{2}$, an jeder Stelle a der Kugel konvergent, und konvergieren zu A, wenn

$$\frac{1}{\gamma} \int_0^{\gamma} |F(t) - A|\, dt \to 0 \quad \textit{mit} \quad \gamma \to +0.$$

Hier bedeutet $F(\gamma)$ den Integralmittelwert von f entlang eines sphärischen Kreises, dessen Mittelpunkt in a, und dessen sphärischer Radius γ ist. Ist $k \geqq 1$, so ist keine weitere Bedingung notwendig. Ist aber $\frac{1}{2} < k <$ so ist noch die Gronwallsche Gegenpolbedingung hinzuzufügen, d. h. $\iint \frac{|f|}{\sqrt{l}}\, do$ existiert auf der Kugel. Hier bedeutet l den Abstand des Flächenelementes do vom Gegenpol b des Punktes a.

§ 6.

Vergleichende Betrachtungen über die verschiedenen Mittelwerte vom Lebesgueschen Typus einer Funktion an einer Stelle der Einheitskugel.

9. Ich möchte nur noch eine Frage beantworten, die sich hier von selbst aufdrängt.

Man kann von einer absolut integrierbaren Funktion $f(x)$ sagen, daß sie an der Stelle $x = 0$ das absolute Mittel 0 besitzt, wenn die Lebesguesche Bedingung

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} |f(t)|\,dt \to 0 \quad \text{mit} \quad \varepsilon \to +0 \tag{45}$$

befriedigt ist[14]).

Durch mechanische Übertragung auf zwei Dimensionen gelange ich zur Definition: Die auf der Kugel absolut integrierbare Funktion $f(\theta, \varphi)$ hat am Nordpol den absoluten Mittelwert 0, wenn

$$\frac{1}{K_\varepsilon}\iint_{(K_\varepsilon)} |f(\theta, \varphi)|\,do \to 0 \quad \text{mit} \quad \varepsilon \to +0, \tag{46}$$

wo die Integration auf die Fläche der Kugelkalotte erstreckt ist, die durch den Parallelkreis mit dem sphärischen Radius $\theta = \varepsilon$ begrenzt wird (und den Nordpol enthält, und wo $K_\varepsilon = 4\pi \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}$ den Flächeninhalt dieser Kugelkalotte bezeichnet).

Die Frage, die ich kurz behandeln möchte, ist diese: Wie verhalten sich die Forderungen (46) und (39) zueinander?

Nimmt man $f(\theta, \varphi) = \sin\frac{1}{\theta}\sin\varphi$, so ist $F(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi)\,d\varphi \equiv 0$, also (39) ideal befriedigt, während, wie leicht ersichtlich, $\frac{1}{K_\varepsilon}\iint_{(K_\varepsilon)} |f(\theta, \varphi)|\,do$ immer größer bleibt als eine positive Konstante, wenn $\varepsilon \to +0$ strebt, so daß also (46) nicht befriedigt ist. Dies ist aber gar nicht überraschend, weil doch die Funktion $\sin\frac{1}{\theta}\sin\varphi$ in der Umgebung des Nordpols ihr

---

[14]) Wenn

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} |f(t) - A|\,dt \to 0, \quad \text{wenn} \quad \varepsilon \to +0,$$

dann sagen wir, daß $f(x)$ an der Stelle a das absolute Mittel A besitzt.

Vorzeichen unendlich oft wechselt. Ist aber $f(\theta, \varphi) \geqq 0$ in einer gewissen Umgebung des Nordpols (in welchem Falle

$$|F(\theta)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi)\, d\varphi),$$

dann folgt tatsächlich aus der Limesgleichung (39) die Limesgleichung (46). (Vgl. Fußnote [15]).)

Interessanter ist die Frage der Umkehrung: *Aus* (46) *folgt immer* (39). Denn aus (46) folgt:

$$(47)\quad \frac{1}{K_\varepsilon}\iint_{(K_\varepsilon)} |f(\theta, \varphi)|\, do = \frac{1}{4\pi \sin^2\frac{\varepsilon}{2}} \int_0^{\varepsilon}\int_0^{2\pi} |f(\theta, \varphi)| \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$\geqq \frac{1}{2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}} \int_0^{\varepsilon} \left| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi)\, d\varphi \right| \sin\theta\, d\theta = \frac{1}{2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}} \int_0^{\varepsilon} |F(\theta)| \sin\theta\, d\theta$$

$$\geqq \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \frac{2}{\varepsilon^2} \int_0^{\varepsilon} |F(\theta)|\, \theta\, d\theta \to 0, \quad \text{wenn} \quad \varepsilon \to +0,$$

also habe ich nur zu zeigen, daß aus

$$(48)\qquad F_2(t) = \frac{2}{t^2}\int_0^t F(u)\, u\, du \to 0 \quad \text{mit} \quad t \to +0$$

immer

$$(49)\qquad F_1(t) = \frac{1}{t}\int_0^t F(u)\, du \to 0 \quad \text{mit} \quad t \to +0$$

folgt[15]) (wenn ich statt $|F|$ einfach F schreibe).

---

[15]) Allgemein: Man betrachte

$$F_0(t) = F(t), \quad F_1(t) = \frac{1}{t}\int_0^t F(u)\, du, \quad F_2(t) = \frac{2}{t^2}\int_0^t F(u)\, u\, du, \quad \ldots,$$

$$F_\nu(t) = \frac{\nu}{t^\nu}\int_0^t F(u)\, u^{\nu-1}\, du, \quad \ldots.$$

Ist dann für einen ganzzahligen Wert von $\nu > 1$ $\int_0^t F(u)\, u^{\nu-1}\, du$ konvergent, und außerdem

$$\lim_{t=+0} F_\nu(t) = A,$$

(Fortsetzung der Fußnote 15 auf Seite 283 und 284.)

Beweis. Da nach Voraussetzung $F(u)u$ für $0 \leqq u \leqq t$ integrabel ist, o ist $F(u)$ für $\eta \leqq u \leqq t$ sicher integrabel, wenn $0 < \eta < t$. Durch artielle Integration erhalte ich

$$50) \qquad \int_\eta^t F(u)\,du = \int_\eta^t F(u)\,u \cdot \frac{1}{u}\,du$$

$$= \left[\left(\int_0^u F(v)\,v\,dv\right)\cdot\frac{1}{u}\right]_{u=\eta}^{u=t} + \int_\eta^t \left(\int_0^u F(v)\,v\,dv\right)\cdot\frac{1}{u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\,t\,F_2(t) - \frac{1}{2}\,\eta\,F_2(\eta) + \frac{1}{2}\int_\eta^t F_2(u)\,du.$$

---

o ist auch das Integral $\int_0^t F(u)\,du$ konvergent, und es ist auch

$$\lim_{t=+0} F_1(t) = A.$$

Noch allgemeiner: Ist für *irgendeinen* reellen Wert von r, $r \geqq 1$,

$$F_r(t) = \frac{r}{t^r}\int_0^t F(u)\,u^{r-1}\,du \to A, \quad \text{wenn} \quad t \to +0,$$

o gilt dasselbe für *jeden* reellen Wert $r \geqq 1$. Dies folgt aus der Relation

$$F_s(t) = \frac{s}{r}F_r(t) + \left(1 - \frac{s}{r}\right)\cdot\frac{s}{t^s}\int_0^t F_r(u)\,u^{s-1}\,du,$$

welche alsdann für jeden reellen Wert s stattfindet, der $\geqq 1$ ist. (Die Relation (52) des Textes erhält man durch die Spezialisierung $r = 2$, $s = 1$).

Aus

$$\lim_{t=+0} F_1(t) = \lim_{t=+0} \frac{1}{t}\int_0^t F(u)\,du = 0$$

olgt aber bekanntlich

$$\lim_{t=+0} F_0(t) \equiv \lim_{t=+0} F(t) = 0$$

nicht $\left(\text{z. B. } F(t) = \left(\frac{2+\sin^2\frac{1}{t}}{3}\right)^{\frac{1}{t^2}}\right)$.

Die aus der Funktion $F(t)$ abgeleiteten Mittelfunktionen $F_r(t)$ $(r = 1, 2, \ldots)$ ind natürlich *verschieden* von den Mitteln

$$\overline{F}_r(t) = \frac{r}{t^r}\int_0^t F(u)\,(t-u)^{r-1}\,du \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots),$$

lie die Herren Hardy und Littlewood bei ihren wichtigen Untersuchungen über Fourier- und Potenzreihen betrachtet haben, von $r = 1$ abgesehen. Vgl. G. H. Hardy

Da infolge der Voraussetzung $\eta F_2(\eta) \to 0$ mit $\eta \to +0$, so existier
und ist

$$\int_0^t F(u)\,du = \frac{1}{2} t F_2(t) + \frac{1}{2}\int_0^t F_2(u)\,du, \tag{51}$$

d. h.

$$F_1(t) = \frac{1}{t}\int_0^t F(u)\,du = \frac{1}{2} F_2(t) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}\int_0^t F_2(u)\,du. \tag{52}$$

Da nach Voraussetzung $F_2(+0) = 0$ ist, so folgt aus dieser Formel (52
tatsächlich $F_1(+0) = 0$.

Budapest, den 28. Januar 1925.

---

and J. E. Littlewood, The equivalence of certain Integral Means [Proceedings
the London Math. Society, Series 2, 22; Records of Proceedings at Meetings, June 14t
(1923)] und Solution of the Cesàro summability problem for power-series and Fouri
series [Math. Zeitschr. **19** (1923), S. 67–96], insbesondere S. 95–96: Postscript. Hi
ist der Rückschluß von $\overline{F}_r(t) \to A$ auf $\overline{F}_1(t) \to A$ natürlich im allgemeinen *nic*
möglich.

Die hier betrachteten „Momentmittel" $F_r(t)$ scheinen besonders für $0 < r \leqq$
ein besonderes Interesse zu verdienen (s. Fußnote [11]) dieser Arbeit).

(Eingegangen am 1. Februar 1925.)

Abschätzungen für die Legendreschen und verwandte Polynome.

Von

Leopold Fejér in Budapest.

Einleitung.

1. Die Arbeiten von Gronwall, Lukács und mir[1]) über die Summabilität der Laplaceschen Reihe durch die Methode der arithmetischen Mittel zeigen, daß bei dem Summabilitätsbeweis die berühmte Stieltjessche Abschätzung für das Legendresche Polynom

$$(\alpha) \qquad |P_n(\cos\theta)| < \frac{A}{\sqrt{n}\sqrt{\sin\theta}}$$

(A von n und θ unabhängige Konstante,
$n = 1, 2, 3, \ldots \infty;\ 0 < \theta < \pi$)

eine Hauptrolle spielt.

Diese Abschätzung ist aber bekanntlich auch aus anderen Gründen sehr wichtig. Folgt doch aus ihr, wie Stieltjes hervorgehoben hat, unmittelbar, daß $\lim_{n=\infty} P_n(\cos\theta) = 0$ ist, nicht nur dann, wenn θ eine feste innere Stelle des Intervalls $(0, \pi)$ bedeutet, sondern auch dann, wenn θ mit unendlich wachsendem n gegen 0 konvergiert, und zwar so, daß $n\theta$ gegen ∞ konvergiert (Theorem von Bruns)[1a]). Ich bemerke, daß man die recht nützliche, aber schwächere Abschätzung

$$(\beta) \qquad |P_n(\cos\theta)| < \frac{B}{\sqrt{n}\sin\theta}$$

---

[1]) Vgl. die unmittelbar vorangehende Arbeit: L. Fejér, Über die Summabilität der Laplaceschen Reihe durch arithmetische Mittel, Math. Zeitschr. 24, S. 267–284.

[1a]) Hingegen ist bekanntlich

$$\lim_{n=\infty} P_n\left(\cos\frac{\theta}{n}\right) = J(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2^2} + \frac{\theta^4}{2^2\cdot 4^2} - \frac{\theta^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \cdots .$$

leichter gewinnen kann; aus ihr folgt für eine feste innere Stelle des Intervalls $(0, \pi)$ ebenfalls, daß $\lim_{n=\infty} P_n(\cos\theta) = 0$; für eine Stellenfolge θ_n jedoch, die mit unendlich wachsendem n gegen 0 konvergiert, nur dann wenn $\sqrt{n}\,\theta_n$ gegen ∞ konvergiert. Für die erwähnten Summabilitätsbeweise reicht indessen diese schwächere Abschätzung nicht aus.

2. Stieltjes hat auch eine zweite wichtige Abschätzung für die Legendreschen Polynome entdeckt, und zwar für die Differenz $P_n - P_{n+2}$. Diese lautet[2])

$$(\gamma) \qquad |P_n(\cos\theta) - P_{n+2}(\cos\theta)| < \frac{C}{\sqrt{n}}$$

(C von n und θ unabhängige Konstante,
$n = 1, 2, 3, \ldots, \infty$; $0 \leqq \theta \leqq \pi$).

Um auch eine Anwendung dieser Abschätzung zu erwähnen, bemerke ich, daß aus ihr geradezu evident ist, daß die Reihe[3])

$$P_1 - P_3 + P_8 - P_{10} + P_{27} - P_{29} + P_{64} - P_{66} + \ldots$$

die Laplacesche Reihe einer auf der Einheitskugel ausnahmslos stetigen Funktion ist, die aber am Nordpol in die Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

übergeht, also divergent ist.

3. Während jedoch Stieltjes die Abschätzung (γ) mit Hilfe der Formel für $P_n(\cos\theta)$, die sich aus ihrer erzeugenden Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\cos\theta + r^2}}$$

unmittelbar ergibt, in einigen Zeilen und vollständig elementar beweisen konnte[4]), schien er einen ähnlichen elementaren, die komplexen Integrale vermeidenden Beweis für die tiefer liegende Abschätzung (α) des Legendreschen Polynoms nicht bemerkt zu haben. Er leitet diese aus seiner klassischen

---

[2]) Da

$$P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x) = (2n+1)\int_{-1}^{x} P_n(t)\,dt = \frac{2n+1}{n(n+1)}(x^2-1)\frac{dP_n(x)}{dx},$$

so ist die Abschätzung von $P_n - P_{n+2}$ mit der Abschätzung des *Integrals* und der *Derivierten* von $P_n(x)$ gleichbedeutend.

[3]) Diese Reihe wurde, auf Grund einer von mir bei der Fourierreihe angewendeten Methode, im wesentlichen von F. Lukács aufgestellt. Ihr Koeffizientengesetz lautet: $c_n = 1$, wenn $n = \nu^3$, $c_n = -1$, wenn $n = \nu^3 + 2$, $(\nu = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$. Die übrigen Koeffizienten sind gleich Null.

[4]) Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, Paris 1905, 2, Briefe Nr. 309, 310, S. 174–177.

ymptotischen Entwicklung ab, die er auf Grund des $P_n(\cos\theta)$ darstellen-
n Cauchyschen Integrals gewonnen hat.

In § 1 dieser Note möchte ich nun zeigen, daß auch die Abschätzung
) für die Legendreschen Polynome kurz und elementar bewiesen wer-
en kann.

In § 3 werde ich den Stieltjesschen Beweis für (γ) behandeln. Ich
ezwecke damit hauptsächlich einen Umstand hervorzuheben, den ich schon
or längerer Zeit bemerkt habe: die elementare Beweismethode von
tieltjes für (γ) ist nicht nur auf die Legendreschen, sondern auch
uf gewisse *allgemeinere* Polynome anwendbar. Dasselbe gilt auch für
e Methode, mit welcher ich im § 1 die Ungleichung (α) beweise. Die
llgemeinere Klasse von Polynomen, an die ich denke, entsteht in folgen-
er Weise. Es sei

$$f(u) = \alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \ldots + \alpha_n u^n + \ldots \qquad (\alpha_n \text{ reell}).$$

ann ist[5])

$$|f(u)|^2 = f(re^{i\theta}) f(re^{-i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^*(\cos\theta) r^n,$$

o $P_n^*(\cos\theta)$ ein Kosinuspolynom n-ter Ordnung (oder auch eine ganze
ationale Funktion n-ten Grades in $x = \cos\theta$) ist.

Wenn speziell

$$f(u) = \frac{1}{(1-u)^{\frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{2}u + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n} u^n + \ldots$$

ewählt wird, so ist $P_n^*(\cos\theta)$ das n-te Legendresche Polynom.

Diese Polynome $P_n^*(\cos\theta)$ sind es nun, auf welche die genannten
lementaren Beweismethoden anwendbar sind, und zwar im Falle, wo die
egebene Koeffizientenfolge

$$1 = \alpha_0, \ \alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_n, \ \ldots$$

us *positiven, monoton fallenden* Zahlen besteht. Aus dieser alleinigen
nnahme folgt z. B.

$$|P_n^*(\cos\theta)| < \frac{4\alpha_{\left[\frac{n}{2}\right]}}{\sin\theta},$$

$$|P_n^*(\cos\theta) - P_{n+2}^*(\cos\theta)| < 7\,\alpha_{\left[\frac{n}{2}\right]},$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots \infty; \ 0 < \theta < \pi),$$

Ungleichungen, von welchen (β) und (γ) nur äußerst spezielle Fälle dar-
tellen.

[5]) Aus dieser Gleichung erhält man durch Integration nach θ von 0 bis 2π die
og. Parsevalsche Gleichung.

4. Aber der Hauptgrund, weswegen ich in den §§ 2, 3 gleich die allgemeinen Polynome $P_n^*(\cos\theta)$ untersuche, liegt darin, daß bei dieser allgemeineren Gestaltung die Beweise viel einfacher und durchsichtiger werden und eigentlich nur so der Kern der beiden oben erwähnten Beweismethoden erblickt werden kann. Nur im § 1 strebe ich direkt dem Beweise der für die Legendresche Polynome gültigen Ungleichung (α) zu, um einen Beweis von ihr zu geben, der vielleicht auch für Vorlesungszwecke geeignet ist.

5. Was meine Beweishilfsmittel betrifft, so benutze ich außer der sogenannten Abelschen Ungleichung eine spezielle Ungleichung[6]), die sich auf die Partialsummen der Binomialreihe

$$\frac{1}{(1-u)^\varrho} = \lambda_0 + \lambda_1 u + \ldots + \lambda_n u^n + \ldots$$

bezieht und lautet:

$$|\lambda_0 + \lambda_1 u + \ldots + \lambda_n u^n| < \frac{G}{|1-u|^\varrho}$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots \infty; \quad |u| \leqq 1, \quad u \neq 1),$$

wo $0 \leqq \varrho \leqq 1$, und G eine von n und u unabhängige Konstante bedeutet. Diese Ungleichung bildet augenscheinlich die Beweisgrundlage der Herren Marcel Riesz[7]) und Chapman[8]) bei ihren Untersuchungen über die Summabilität gebrochener Ordnung der Fourierreihe, wenn sie in den genannten Arbeiten auch nicht ausdrücklich formuliert ist. (Sie ist eine Verallgemeinerung der elementaren Abschätzung

$$|1 + u + \ldots + u^n| = \left|\frac{1-u^{n+1}}{1-u}\right| \leqq \frac{2}{|1-u|} \quad \text{für} \quad |u| \leqq 1).$$

Übrigens enthält § 1 für den wichtigen Spezialfall $\varrho = \frac{1}{2}$, also für die Ungleichung

$$\left|1 + \frac{1}{2}u + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}u^2 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}u^n\right| \leqq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{|1-u|}}$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots \infty; \quad |u| \leqq 1),$$

einen besonders elementaren Beweis.

---

[6]) Man findet den allgemeinen Beweis dieser Ungleichung im § 2 dieser Arbeit.

[7]) Marcel Riesz, Sur les séries de Dirichlet et les séries entières, Comptes Rendus 149 (1909), S. 309–312, besonders aber: Sur la sommation des séries de Fourier, Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco Josephinae 1 (1923), S. 104–113.

[8]) S. Chapman, On Non-Integral orders of Summability of Series and Integrals, Proceedings of the London Math. Society (2) 9 (1910), S. 369–409.

§ 1.

Elementarer Beweis der Stieltjesschen Abschätzung der Legendreschen Polynome.

6. Theorem I. Satz von Stieltjes. *Es ist*

α) $$|P_n(\cos\theta)| < \frac{A}{\sqrt{n}\sqrt{\sin\theta}}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots \infty; \quad 0 < \theta < \pi),$$

wo $P_n(\cos\theta)$ *das n-te Legendresche Polynom und A eine numerische (von n und θ unabhängige) Konstante bedeutet.*

Es sei

1) $$\frac{1}{\sqrt{1-u}} = \alpha_0 + \alpha_1 u + \ldots + \alpha_n u^n + \ldots .$$

Dann ist

2) $$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\, r^n = \frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-re^{i\theta}}}\,\frac{1}{\sqrt{1-re^{-i\theta}}}$$
$$= (\alpha_0 + \alpha_1 r e^{i\theta} + \ldots + \alpha_n r^n e^{ni\theta} + \ldots)$$
$$(\alpha_0 + \alpha_1 r e^{-i\theta} + \ldots + \alpha_n r^n e^{-ni\theta} + \ldots),$$

also

3) $$P_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \alpha_{n-k} e^{ki\theta} e^{-(n-k)i\theta} = e^{-ni\theta} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \alpha_{n-k} e^{2ki\theta}.$$

Wird also

4) $$e^{2i\theta} = z$$

gesetzt, so ist

5) $$|P_n(\cos\theta)| = |\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \alpha_{n-k} z^k| = |\alpha_0\alpha_n + \alpha_1\alpha_{n-1} z + \ldots + \alpha_n\alpha_0 z^n|.$$

Wenn nun $n = 2\nu - 1$, so erhält man

6) $$|P_n| \leqq |\sum_{k=0}^{\nu-1} \alpha_k \alpha_{n-k} z^k| + |\sum_{k=\nu}^{n} \alpha_k \alpha_{n-k} z^k|.$$

Da aber $\sum_{k=\nu}^{n} \alpha_k \alpha_{n-k} z^k$ durch $z^n = z^{2\nu-1}$ dividiert genau den konjugiert komplexen Wert von $\sum_{k=0}^{\nu-1} \alpha_k \alpha_{n-k} z^k$ liefert, so sind die zwei absoluten Beträge auf der rechten Seite von (6) einander gleich. Also ist

7) $$\frac{|P_n|}{2} \leqq \left|\sum_{k=0}^{\nu-1} \alpha_{n-k}\alpha_k z^k\right| = |\alpha_n\alpha_0 + \alpha_{n-1}\alpha_1 z + \ldots + \alpha_\nu\alpha_{\nu-1} z^{\nu-1}|,$$

$$z = e^{2i\theta}.$$

Da aber einerseits, wie ich sogleich beweisen werde,

$$(8) \qquad |\alpha_0|,\ |\alpha_0+\alpha_1 u|,\ |\alpha_0+\alpha_1 u+\alpha_2 u^2|,\ \ldots \leqq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{|1-u|}}$$
$$(|u|\leqq 1,\ u\neq 1),$$

und andererseits die Zahlen

$$(9) \qquad \alpha_n,\ \alpha_{n-1},\ \ldots,\ \alpha_\nu$$

positive, monoton wachsende Faktoren darstellen, so ist auf Grund de Abelschen Ungleichung[9])

$$(10) \qquad \frac{|P_n|}{2} \leqq 2\alpha_\nu \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{|1-z|}} = \frac{2\sqrt{2}\,\alpha_\nu}{\sqrt{|1-e^{2i\theta}|}} = \frac{2\alpha_\nu}{\sqrt{\sin\theta}} \qquad \left(\nu=\frac{n+1}{2}\right)$$

Genau so kann man zeigen, daß diese Ungleichung (10) auch i im Falle $n=2\nu$ gültig ist, nur daß dann $\frac{n}{2}$ an Stelle von ν zu setze ist. Da nun bekanntlich $\alpha_k = \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2k} < \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{k}}$, so ist[10])

$$(11) \qquad |P_n(\cos\theta)| \leqq \sqrt{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{\sin\theta}} \qquad (n=1,2,\ldots\infty;\ 0<\theta<\pi$$

w. z. b. w.

6. Ich habe nur noch den Beweis der Ungleichung (8), die sich a die n-te Partialsumme $s_n(u)$ der Binomialreihe (1) bezieht:

$$(8) \qquad |s_n(u)| = |\alpha_0+\alpha_1 u+\ldots+\alpha_n u^n| \leqq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{|1-u|}}$$
$$(n=0,1,2,\ldots\infty;\ |u|\leqq 1,\ u\neq 1),$$

---

[9]) Die Abelsche Ungleichung lautet:

Wenn

$$|v_1|,\ |v_1+v_2|,\ \ldots,\ |v_1+\ldots+v_n| \leqq M,$$

so ist

(d)
$$|\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\ldots+\lambda_n v_n| \leqq \lambda_1 M,$$

wenn

$$\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \ldots \geqq \lambda_n \geqq 0,$$

und

(c)
$$|\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\ldots+\lambda_n v_n| \leqq 2\lambda_n M,$$

wenn

$$0 \leqq \lambda_1 \leqq \lambda_2 \ldots \leqq \lambda_n.$$

Im Texte ist die Ungleichung (c) verwendet.

[10]) Herr Gronwall erhält in seiner Arbeit „Über die Laplacesche Reih Math. Ann. 74 (1913), S. 213–270 (insb. S. 221, Formel (15)), aus der Stieltjessc Entwicklung von $P_n(\cos\theta)$ die zweimal bessere Abschätzung

$$|P_n(\cos\theta)| < \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}.$$

achzutragen. Es ist

$$(12)\qquad (s_n(u))^2 = 1 + u + u^2 + \ldots + u^n + q_{n+1}u^{n+1} + \ldots + q_{2n}u^{2n},$$

vo, mit Rücksicht auf $\alpha_0 > \alpha_1 > \ldots \alpha_n > 0$ und auf die Multiplikationsegel [11]),

$$1 = q_n > q_{n+1} > q_{n+2} > \ldots > q_{2n} > 0.$$

Die Koeffizienten von $(s_n(u))^2$ nehmen also monoton ab. Da weiter

$$|1 + u + \ldots + u^\nu| = \left|\frac{1-u^{\nu+1}}{1-u}\right| \leqq \frac{2}{|1-u|} \qquad (|u| \leqq 1,\ u \neq 1),$$

o ist, wieder mit Rücksicht auf die Abelsche Ungleichung,

$$|(s_n(u))^2| \leqq \frac{2}{|1-u|}, \quad \text{d. h.} \quad |s_n(u)| \leqq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{|1-u|}},$$

w. z. b. w.

§ 2.

Über die Polynome $P_n(\cos\theta)$, welche als Koeffizienten in der Entwicklung von $|f(re^{i\theta})|^2$ nach Potenzen von r auftreten, wenn $f(u)$ eine im Einheitskreise reguläre analytische Funktion von u ist.

7. Es sei

$$(13)\qquad f(u) = \alpha_0 + \alpha_1 u + \ldots + \alpha_n u^n + \ldots$$

eine beliebige Potenzreihe mit reellen Koeffizienten. Dann ist

$$(14)\qquad |f(re^{i\theta})|^2 = f(re^{i\theta})\, f(re^{-i\theta})$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n e^{ni\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n e^{-ni\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n r^n,$$

wo

$$(15)\qquad P_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \alpha_{n-k} e^{ki\theta} e^{-(n-k)i\theta} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \alpha_{n-k} e^{(2k-n)i\theta},$$

---

[11]) Ist allgemein $\alpha_0 \geqq \alpha_1 \geqq \ldots \geqq \alpha_n \geqq 0$, so ist, wenn

$$(\alpha_0 + \alpha_1 u + \ldots + \alpha_n u^n)^2 = \sum_{r=0}^{2n} q_r u^r$$

gesetzt wird,

$$q_n \geqq q_{n+1} \geqq \ldots \geqq q_{2n} \geqq 0.$$

Denn

$$q_{n+k} = \sum_{\nu=0}^{n-k} \alpha_{k+\nu}\, \alpha_{n-\nu} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots n).$$

Also

$$q_{n+k} - q_{n+k+1} \geqq \sum_{\nu=0}^{n-k-1} (\alpha_{k+\nu} - \alpha_{k+\nu+1})\, \alpha_{n-\nu} \geqq 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

also, durch Zusammenfassen symmetrischer Gliederpaare,

$$P_n = P_{2\nu-1} = 2\sum_{k=0}^{\nu-1} \alpha_k \alpha_{n-k} \cos(n-2k)\theta, \tag{16}$$

$$P_n = P_{2\nu} = 2\sum_{k=0}^{\nu-1} \alpha_k \alpha_{n-k} \cos(n-2k)\theta + \alpha_\nu^2. \tag{17}$$

Also ist $P_n(\cos\theta)$ ein Kosinuspolynom n-ter Ordnung in θ (d. h. $P_n(x)$ ist eine ganze rationale Funktion n-ten Grades in $x = \cos\theta$).

Zu einer jeden Potenzreihe mit reellen Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ gehört eine Polynomfolge $P_n(\cos\theta)$. Ist $f(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u}}$, so ist $P_n(\cos\theta)$ das Legendresche Polynom.

Laut (7) ist (da wir doch in § 1 bis zur Ungleichung (7) bloß die Realität der Zahlen α_n, und nicht ihren speziellen Zahlenwert benutzt haben) für $n = 2\nu - 1$

$$\frac{|P_n|}{2} \leqq \left|\sum_{k=0}^{\nu-1} \alpha_{n-k}\alpha_k z^k\right| = |\alpha_n\alpha_0 + \alpha_{n-1}\alpha_1 z + \ldots + \alpha_\nu \alpha_{\nu-1} z^{\nu-1}|, \tag{18}$$

$$(z = e^{2i\theta}).$$

8. Im folgenden will ich nun voraussetzen, daß die Reihe (13) (zu welcher die Polynome P_n adjungiert sind) lauter positive Koeffizienten besitzt, die monoton abnehmen, d. h.

$$1 = \alpha_0 \geqq \alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq \alpha_n \geqq \ldots \geqq 0. \tag{19}$$

(In diesem Falle ist die Reihe (13) mindestens für $|u| < 1$ konvergent.)

Dann haben die Partialsummen

$$s_n(u) = \alpha_0 + \alpha_1 u + \ldots + \alpha_n u^n$$

der Reihe (13), auf Grund der Abelschen Ungleichung, die Majorante $\frac{2}{|1-u|}$, für $|u| \leqq 1$. Also liefert (18), wieder auf Grund der Abelschen Ungleichung,

$$\frac{|P_n|}{2} \leqq 2\alpha_\nu \frac{2}{|1-z|} = \frac{4\alpha_\nu}{2\sin\theta} = \frac{2\alpha_\nu}{\sin\theta} \leqq \frac{2}{\sin\theta}. \tag{20}$$

Also ist

$$|P_n| \leqq \frac{4}{\sin\theta}. \tag{21}$$

Dieselbe Ungleichung ist auch im Falle $n = 2\nu$ gültig. Ich habe also das folgende Theorem erhalten:

Theorem II. *Ist in der Potenzreihe mit reellen Koeffizienten*

$$f(u) = \alpha_0 + \alpha_1 u + \ldots + \alpha_n u^n + \ldots$$

$$1 = \alpha_0 \geqq \alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq \alpha_n \geqq \ldots \geqq 0,$$

und bezeichnet $P_n(\cos\theta)$ *das durch die Entwicklung*

$$|f(re^{i\theta})|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\, r^n$$

definierte Kosinuspolynom n*-ter Ordnung, so ist*

(21) $$|P_n(\cos\theta)| \leqq \frac{4}{\sin\theta},$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots \infty,\ 0 \leqq \theta < \pi).$$

(21) drückt eine gemeinsame Eigenschaft aller Polynome von der betrachteten Art aus. Die Ungleichung (21) läßt sich nicht verbessern (d. h. im Nenner läßt sich $\sin\theta$ durch keine niedrigere Potenz von $\sin\theta$ ersetzen), denn für

(22) $$f(u) = \frac{1}{1-u} = 1 + u + \ldots + u^n + \ldots$$

ist

$$f(re^{i\theta})f(re^{-i\theta}) = \frac{1}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\, r^n,$$

d. h.

(23) $$P_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

(Indessen kann von der Bestimmung der „richtigen" Konstante im Zähler von (21) die Rede sein.)

(20) liefert noch den folgenden Satz:

Theorem III. *Für die im Theorem II definierten Polynome* $P_n(\cos\theta)$ *gilt die folgende Ungleichung:*

(24) $$|P_n(\cos\theta)| \leqq \frac{4\alpha_{\left[\frac{n}{2}\right]}}{\sin\theta}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots \infty;\ 0 < \theta < \pi).$$

Konvergiert also die monotone Folge α_n zu 0, so ist

$$\lim_{n=\infty} P_n(\cos\theta) = 0,$$

$$0 < \theta < \pi.$$

Ich habe also erhalten das

Theorem IV. *Konvergiert* α_n *monoton zu Null, so ist*

(25) $$\lim_{n=\infty} P_n(\cos\theta) = 0,$$

für

$$0 < \theta < \pi.$$

(24) liefert noch das

Theorem V. *Konvergiert α_n monoton zu Null, und ist außerdem*

$$\alpha_n < \frac{C_1}{n^{1-\varrho}} \tag{26}$$

$$(\varrho < 1, \quad C_1 \text{ von } n \text{ unabhängig}),$$

so ist

$$|P_n(\cos\theta)| < \frac{C_2}{n^{1-\varrho}\sin\theta} \tag{27}$$

$$(n = 1, 2, \ldots \infty; \quad 0 < \theta < \pi),$$

wo C_2 eine von n und θ unabhängige Konstante bedeutet.

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung der in der Einleitung erwähnten Abschätzung (β) des Legendreschen Polynoms, welche sich bei der speziellen Wahl $\alpha_n = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}$ ergibt.

9. Die Frage der Übertragung der schärferen Stieltjesschen Abschätzung (α) auf die allgemeinen Polynome $P_n(\cos\theta)$ möchte ich hier nur streifen. Ich beschäftige mich nur mit dem Spezialfall

$$f(u) = \frac{1}{(1-u)^\varrho} = \alpha_0 + \alpha_1 u + \ldots + \alpha_n u^n + \ldots, \quad 0 < \varrho < 1,$$

der indessen für die sog. *ultrasphärischen Funktionen*[12]) (oder Polynome) von Interesse ist. Hier nehmen die α_n bekanntlich monoton ab und es ist $\alpha_n < \frac{C_3}{n^{1-\varrho}}$. Da weiter, wie ich sogleich beweisen werde,

$$|\alpha_0 + \alpha_1 u + \ldots + \alpha_n u^n| \leqq \frac{C_4}{|1-u|^\varrho}, \qquad (|u| \leqq 1),$$

so erhalte ich (für $n = 2\nu - 1$), auf Grund von (18) und der Abelschen Ungleichung, die folgende (übrigens auch für gerades n gültige) Ungleichung

$$\frac{|P_n|}{2} \leqq 2\alpha_\nu \frac{C_4}{|1-z|^\varrho} \leqq \frac{C_5}{n^{1-\varrho}(\sin\theta)^\varrho}, \qquad n = 1, 2, \ldots \infty; \quad 0 < \theta < \pi,$$

welche die gesuchte Verallgemeinerung der Stieltjesschen Ungleichung (α) darstellt. (Die letztere ergibt sich für $\varrho = \frac{1}{2}$).

10. Die hier benutzte Ungleichung

$$|s_n(u)| = |\alpha_0 + \alpha_1 u + \ldots + \alpha_n u^n| < \frac{C_4}{|1-u|^\varrho}, \qquad |u| \leqq 1,$$

---

[12]) Die Frage der Summabilität für die ultrasphärischen Entwicklungen wurde durch Herrn N. Nielsen in der Einleitung seines Werkes: Théorie des Fonctions Métasphériques (Paris 1911, Gauthier-Villars) aufgeworfen. Neuerdings ist es Herrn E. Kogbetliantz auch gelungen, eine vollständig befriedigende Lösung dieser Frage zu finden. S. E. Kogbetliantz: Recherches sur la sommabilité des séries ultrasphériques par la méthode des moyennes arithmétiques [Liouville-Journal, (9), (1924), S. 107–187].

ßt sich, im wesentlichen nach Herrn Marcel Riesz[13]), in folgender Weise beweisen. I. Fall. $|1-u| \leqq \frac{1}{n}$. Da überhaupt für $|u| \leqq 1$

$$|s_n(u)| \leqq \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n < C_6\, n^\varrho,$$

ist im Falle I

$$|s_n(u)| < C_6 \frac{1}{|1-u|^\varrho}.$$

II. Fall. $|1-u| > \frac{1}{n}$ (aber natürlich immer $|u| \leqq 1$). Für $|u| < 1$ lt für $s_n(u)$ auch

$$s_n(u) = \frac{1}{(1-u)^\varrho} - (\alpha_{n+1} u^{n+1} + \ldots), \qquad |u| < 1,$$

lso

$$|s_n(u)| \leqq \frac{1}{|1-u|^\varrho} + |\alpha_{n+1} u^{n+1} + \ldots|.$$

Hier ist aber wegen $\alpha_n < \frac{C_3}{n^{1-\varrho}}$, und auf Grund der Abelschen Ungleichung,

$$|\alpha_{n+1} u^{n+1} + \ldots| \leqq \frac{C_3}{n^{1-\varrho}} \cdot \frac{2}{|1-u|}, \qquad |u| < 1,$$

lso wegen $\frac{1}{n} < |1-u|$ auch

$$\leqq 2\, C_3 \frac{|1-u|^{1-\varrho}}{|1-u|} = \frac{2\, C_3}{|1-u|^\varrho}.$$

lso ist schließlich auch im Falle II

$$|s_n(u)| \leqq \frac{1+2\, C_3}{|1-u|^\varrho} = \frac{C_7}{|1-u|^\varrho} \qquad \text{für} \qquad |u| < 1,$$

lso auch für $|u| \leqq 1$.

§ 3.

Abschätzung von $P_n(\cos\theta) - P_{n+2}(\cos\theta)$.

11. Die Koeffizienten α_n der Potenzreihe (13) seien wieder nur der lleinigen Beschränkung unterworfen, daß

28) $$1 = \alpha_0 \geqq \alpha_1 \geqq \ldots \geqq \alpha_n \geqq \ldots \geqq 0.$$

Wir wollen jetzt die Differenz $P_n - P_{n+2}$ abschätzen. Es sei $n = 2\nu - 1$. Dann ist nach (16)

29) $$P_n = 2 \sum_{k=0}^{\nu-1} \alpha_k \alpha_{n-k} \cos(n-2k)\theta,$$

lso

30) $$P_{n+2} = 2 \sum_{k=0}^{\nu} \alpha_k \alpha_{n+2-k} \cos(n+2-2k)\theta$$
$$= 2\, \alpha_0 \alpha_{n+2} \cos(n+2)\theta + 2 \sum_{k=0}^{\nu-1} \alpha_{k+1} \alpha_{n-k+1} \cos(n-2k)\theta,$$

[13]) S. Einleitung.

und daher

$$(31)\qquad \frac{P_n - P_{n+2}}{2} = -\alpha_0\alpha_{n+2}\cos(n+2)\theta + \sum_{k=0}^{\nu-1}(\alpha_k\alpha_{n-k} - \alpha_{k+1}\alpha_{n-k+1})\cos(n-2k)\theta.$$

Da aber in der rechtsstehenden Summe, wegen (28), lauter *nichtnegative* Koeffizienten stehen, so ist, für $0 \leqq \theta \leqq \pi$,

$$(32)\qquad \frac{|P_n - P_{n+2}|}{2} \leqq \alpha_0\alpha_{n+2} + \sum_{k=0}^{\nu-1}(\alpha_k\alpha_{n-k} - \alpha_{k+1}\alpha_{n-k+1}) \overset{14)}{=}$$

$$= \alpha_0\alpha_{n+2} + \sum_{k=0}^{\nu-1}(\alpha_k\alpha_{n-k} - \alpha_{k+1}\alpha_{n-k} + \alpha_{k+1}\alpha_{n-k} - \alpha_{k+1}\alpha_{n-k+1})$$

$$= \alpha_0\alpha_{n+2} + \sum_{k=0}^{\nu-1}\alpha_{n-k}(\alpha_k - \alpha_{k+1}) + \sum_{k=0}^{\nu-1}\alpha_{k+1}(\alpha_{n-k} - \alpha_{n-k+1})$$

$$\leqq \alpha_0\alpha_{n+2} + \alpha_\nu\sum_{k=0}^{\nu-1}(\alpha_k - \alpha_{k+1}) + \alpha_1\sum_{k=0}^{\nu-1}(\alpha_{n-k} - \alpha_{n-k+1})$$

$$= \alpha_0\alpha_{n+2} + \alpha_\nu(\alpha_0 - \alpha_\nu) + \alpha_1(\alpha_\nu - \alpha_{n+1})$$

$$= \alpha_{n+2} + \alpha_\nu(1 - \alpha_\nu) + \alpha_1(\alpha_\nu - \alpha_{n+1})$$

$$\leqq \alpha_{n+2} + \alpha_\nu + \alpha_1\alpha_\nu = \alpha_{n+2} + (\alpha_1 + 1)\alpha_\nu$$

$$\leqq 3\alpha_\nu \leqq 3\alpha_{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

Also ist

$$(33)\qquad |P_n - P_{n+2}| \leqq 6\alpha_{\left[\frac{n}{2}\right]},$$

für $0 \leqq \theta \leqq \pi$, wenn $n = 2\nu - 1$.

---

14) *Im speziellen Falle des Legendreschen Polynoms* kann Stieltjes von hier ab seinen Beweis kurz zu Ende führen. Da nämlich in diesem Falle die Gleichung (31) für $\theta = 0$

$$(31')\qquad -\alpha_0\alpha_n + \sum_{k=0}^{\nu-1}(\alpha_k\alpha_{n-k} - \alpha_{k+1}\alpha_{n-k+1}) = \left[\frac{P_n - P_{n+2}}{2}\right]_{\theta=0} = \frac{1-1}{2} = 0$$

liefert, so ist

$$\frac{|P_n - P_{n+2}|}{2} \leqq 2\alpha_0\alpha_{n+2} < \frac{C_2}{\sqrt{n}},$$

d. h. die Ungleichung (γ) der Einleitung.

Hermite ist entzückt von dieser äußerst eleganten Deduktion; in seinem Antwortschreiben vom 14. April 1891 beginnt er: „Vous êtes un magicien, vous traitez avec une merveilleuse simplicité des questions difficiles et importantes ...“. Wie nun aus dem Texte ersichtlich, genügt eine geringe Modifikation der Stieltjesschen Überlegung, um darzutun, daß die (nur im speziellen Falle des Legendreschen Polynoms gültige) Gleichung (31′) gar nicht in Anspruch genommen werden muß, sondern vielmehr alles aus dem monotonen Abnehmen der Koeffizienten α_n gefolgert werden kann.

Für $n = 2\nu$ erhält man auf demselben Weg mit Rücksicht auf (17)

$$34) \quad \frac{|P_n - P_{n+2}|}{2} \leqq \frac{\alpha_\nu^2 - \alpha_{\nu+1}^2}{2} + 3\alpha_\nu \leqq \frac{\alpha_\nu^2}{2} + 3\alpha_\nu \leqq \frac{\alpha_\nu}{2} + 3\alpha_\nu = \frac{7}{2}\alpha_\nu,$$

lso

$$35) \quad |P_n - P_{n+2}| \leqq 7\alpha_{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

n beiden Fällen ist also jedenfalls

$$36) \quad |P_n - P_{n+2}| \leqq 7\alpha_{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

Wir haben also, als Gegenstück zu Theorem III, das folgende merkwürdige Theorem erhalten:

Theorem VI. *Ist in der Potenzreihe mit reellen Koeffizienten*

$$f(u) = 1 + \alpha_1 u + \ldots + \alpha_n u^n + \ldots$$
$$1 \geqq \alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq \alpha_n \geqq \ldots \geqq 0,$$

ınd wird

$$|f(re^{i\theta})|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) r^n$$

esetzt, so ist

$$37) \quad |P_n(\cos\theta) - P_{n+2}(\cos\theta)| \leqq 7\alpha_{\left[\frac{n}{2}\right]}$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots\infty; \quad 0 \leqq \theta \leqq \pi).$$

Da nach Voraussetzung $\alpha_n \leqq 1$, *so gilt für alle Polynome der betrachteten Art die Ungleichung*

$$38) \quad |P_n(\cos\theta) - P_{n+2}(\cos\theta)| \leqq 7,$$
$$0 \leqq \theta \leqq \pi.$$

Etwas wesentlich Besseres läßt sich im allgemeinen wieder nicht aussagen, denn im Falle $f(u) = \frac{1}{1-u}$ ist

$$39) \quad P_n - P_{n+2} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin(n+3)\theta}{\sin\theta} = -2\cos(n+2)\theta,$$

lso

$$40) \quad |P_n - P_{n+2}| \leqq 2.$$

Es kann also in der Ungleichung (38) höchstens von einer „besten" Konstantenbestimmung, statt 7, die Rede sein. (Wir sehen, daß diese beste Konstante $\geqq 2$ und $\leqq 7$ ist.)

Ist aber, außer $\alpha_0 = 1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq 0$, *noch* $\lim_{n=\infty} \alpha_n = 0$, *so ist*

$$41) \quad \lim_{n=\infty} (P_n - P_{n+2}) = 0,$$

ınd zwar gleichmäßig im Intervalle $0 \leqq \theta \leqq \pi$.

Wenn sogar

$$\alpha_n < \frac{C_9}{n^{1-\varrho}}, \qquad (\varrho < 1) \tag{42}$$

so ist, nach (37), *auch*

$$|P_n(\cos\theta) - P_{n+2}(\cos\theta)| \leqq 7\frac{C_9}{\left[\frac{n}{2}\right]^{1-\varrho}} < \frac{C_{10}}{n^{1-\varrho}}. \tag{43}$$

Z. B. im Falle $f(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u}}$, also des Legendreschen Polynoms, ist $\alpha_n < \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{n}}$, also

$$|P_n(\cos\theta) - P_{n+2}(\cos\theta)| \leqq 7\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\left[\frac{n}{2}\right]}} < \frac{C_{11}}{\sqrt{n}}, \tag{44}$$

und da im Falle des Legendreschen Polynoms

$$P_{n+1} - P_{n-1}(x) = (2n+1)\int_{-1}^{x} P_n(x)dx = \frac{2n+1}{n(n+1)}(x^2-1)\frac{dP_n(x)}{dx}, \tag{45}$$

also auch

$$\left|\int_{-1}^{x} P_n(t)\,dt\right| \leqq \frac{C_{12}}{n^{\frac{3}{2}}} \tag{46}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots\infty; \quad -1 \leqq x \leqq +1),$$

$$\left|\frac{dP_n(x)}{dx}\right| \leqq \frac{C_{13}\sqrt{n}}{1-x^2} \tag{47}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots\infty; \quad -1 < x < +1),$$

Abschätzungen, die in der Theorie der Laplaceschen und Legendreschen Reihe gebraucht werden können und die von Stieltjes herrühren

(Eingegangen am 18. Februar 1925.)

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden.

Zweite Abhandlung.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Einleitung.

Es gilt folgender Satz, der von Herrn Walfisz[1]) für $k \geqq 8$ und von mir[2]) für $k \geqq 4$ bewiesen worden ist:

Satz I. *Es sei*

$$Q(u) = \sum_{\mu,\nu=1}^{k} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu \qquad (a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu})$$

eine positiv definite quadratische Form mit rationalen Koeffizienten und der Determinante D. Es sei α_ν $(\nu = 1, \ldots, k)$ rational. Es sei $\delta = 1$ oder $\delta = 0$, je nachdem alle α_ν ganz sind oder nicht. Es sei

$$p_k = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}.$$

Es sei

$$\psi = \psi(x) = \psi(x; k) = \begin{cases} x \log^2 x & \text{für } k = 4. \\ x^{\frac{k}{2}-1} & \text{für } k > 4. \end{cases}$$

Es sei

$$F(x) = \sum_{Q(m) \leqq x} e^{2\pi i \sum_1^k \alpha_\nu m_\nu}.$$

Dann ist

$$F(x) = \frac{\delta p_k}{\sqrt{D}} x^{\frac{k}{2}} + O(\psi).$$

---

[1]) Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Zeitschr. 19 (1924), S. 300–307.

[2]) Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Zeitschr. 21 (1924), S. 126–132.

Das Ziel meiner heutigen Arbeit ist:

In § 1 den folgenden Satz II zu beweisen, und zwar ihn für jede $k \geqq 4$ elementar aus Satz I mit demselben k abzuleiten.

In § 2 den folgenden Satz III zu beweisen, und zwar für jedes $k \geqq$ elementar aus Satz II mit demselben k.

In § 3 zu zeigen, daß aus der Richtigkeit von Satz II für ein $k \geqq$ seine Richtigkeit für $k+1$ elementar folgt; also aus seiner Richtigkeit für $k = 5$ seine Richtigkeit für $k \geqq 5$.

In § 4 einige weitere Bemerkungen zu machen.

Da Satz III mit einem k offenkundig Satz I mit demselben k enthält, wird sich also insbesondere herausstellen, daß aus der Richtigkeit des alten Satzes I für $k = 4$ und $k = 5$ elementar seine allgemeine Richtigkeit folgt; für $k > 5$ geht nämlich der Weg von (I, 5) über (II, 5), (II, k) (III, k) zu (I, k). Ich hätte also die tiefliegende Beweismethode meiner ersten Abhandlung nur für $k = 4$ und $k = 5$ gebraucht, um das Ziel jener (und das Hauptziel der heutigen) Arbeit (d. h. die Sätze I, II, III) zu erreichen. Das hätte allerdings keine Stelle meines damaligen Beweises irgendwie abgekürzt.

k sei dauernd $\geqq 4$. Dann lautet

Satz II. *$Q(u)$ erfülle die Bedingungen des Satzes* I; *D, p_k und* *seien wie dort erklärt. Es seien rationale Zahlen β_ν, M_ν ($\nu = 1, \ldots,$* *gegeben, von denen die $M_\nu > 0$ sind. Es sei*

$$F(x) = \sum_{\substack{Q(m) \leqq x \\ m_\nu \equiv \beta_\nu \pmod{M_\nu}}} 1$$

Anzahl der Gitterpunkte im abgeschlossenen Ellipsoid beim „rechtwinkligen Gitter mit der Masche (M_ν) und dem Ausgangspunkt (β_ν)).

Dann ist

$$F(x) = \frac{p_k}{\sqrt{D} \prod_1^k M_\nu} x^{\frac{k}{2}} + O(\psi).$$

Der Spezialfall $\alpha_\nu = 0$ des Satzes I ist offenbar der Spezialfall $\beta_\nu =$ $M_\nu = 1$ des Satzes II.

Es lautet

Satz III. *Unter den Annahmen des Satzes* II *seien überdies rationale α_ν ($\nu = 1, \ldots, k$) gegeben. Es sei $\delta = 1$ oder $\delta = 0$, je nachdem alle $\alpha_\nu M_\nu$ ganz sind oder nicht. Es sei*

$$F(x) = \sum_{\substack{Q(m) \leqq x \\ m_\nu \equiv \beta_\nu \pmod{M_\nu}}} e^{2\pi i \sum_1^k \alpha_\nu m_\nu}.$$

Dann ist

$$F(x) = \frac{\delta e^{2\pi i \sum_1^k \alpha_\nu \beta_\nu}}{\sqrt{D} \prod_1^k M_\nu} p_k x^{\frac{k}{2}} + O(\psi).$$

Offenbar ist Satz I der Spezialfall $\beta_\nu = 0$, $M_\nu = 1$ des Satzes III, atz II der Spezialfall $\alpha_\nu = 0$ des Satzes III.

§ 1.

Beweis des Satzes II.

$N > 0$ sei so gewählt, daß alle $N\beta_\nu$ und NM_ν ganz sind. (Z. B. $= $ Hauptnenner der β_ν, M_ν; aber N braucht überhaupt nicht ganz zu sein.) ann ist (m_ν in der zweiten Summe durch $\frac{m_\nu}{N}$ ersetzt)

$$F(x) = \sum_{\substack{Q(m) \leqq x \\ m_\nu \equiv \beta_\nu \pmod{M_\nu}}} 1 = \sum_{\substack{Q(m) \leqq N^2 x \\ m_\nu \equiv N\beta_\nu \pmod{NM_\nu}}} 1.$$

Nach Satz I ist, wenn ϱ_ν eine NM_ν-te Einheitswurzel ($\nu = 1, \ldots, k$) ist,

$$\sum_{Q(m) \leqq N^2 x} \prod_1^k \varrho_\nu^{m_\nu} = \frac{\delta p_k}{\sqrt{D}} N^k x^{\frac{k}{2}} + O(\psi),$$

o $\delta = 1$ oder $\delta = 0$, je nachdem alle $\varrho_\nu = 1$ sind oder nicht.

Jede dieser $\prod_1^k (NM_\nu)$ Gleichungen multipliziere ich mit $\prod_1^k \varrho_\nu^{-N\beta_\nu}$ und ummiere. Das ergibt

$$\sum_{Q(m) \leqq N^2 x} \prod_1^k \sum_{\varrho_\nu} \varrho_\nu^{m_\nu - N\beta_\nu} = \frac{p_k}{\sqrt{D}} N^k x^{\frac{k}{2}} + O(\psi).$$

Hierin ist

$$\sum_{\varrho_\nu} \varrho_\nu^{m_\nu - N\beta_\nu} = \begin{cases} NM_\nu, & \text{falls } m_\nu \equiv N\beta_\nu \pmod{NM_\nu}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daher kommt heraus

$$F(x) \prod_1^k (NM_\nu) = \sum_{\substack{Q(m) \leqq N^2 x \\ m_\nu \equiv N\beta_\nu \pmod{NM_\nu}}} 1 \cdot \prod_1^k (NM_\nu) = \frac{p_k}{\sqrt{D}} N^k x^{\frac{k}{2}} + O(\psi),$$

$$F(x) = \frac{p_k}{\sqrt{D} \prod_1^k M_\nu} x^{\frac{k}{2}} + O(\psi).$$

§ 2.

Beweis des Satzes III.

$N_\nu > 0$ sei so gewählt, daß $\frac{N_\nu}{M_\nu}$ und $N_\nu \alpha_\nu$ ganz ist. (Z. B. N_ν gan
und von ν frei und zwar gleich dem Hauptnenner aller $\frac{1}{M_\nu}$ und α_ν
Dann bleibt

$$e^{2\pi i \sum_1^k \alpha_\nu m_\nu}$$

ungeändert, wenn m_ν mod N_ν verändert wird. Andererseits zerfällt das Gitt

$$m_\nu \equiv \beta_\nu \pmod{M_\nu}$$

in die $\prod_1^k \frac{M_\nu}{N_\nu}$ Gitter

$$m_\nu \equiv \beta_\nu + t_\nu M_\nu \pmod{N_\nu}, \qquad t_\nu = 1, 2, \ldots, \frac{N_\nu}{M_\nu}.$$

Daher ist

$$F(x) = \sum_{\substack{Q(m) \leqq x \\ m_\nu \equiv \beta_\nu \pmod{M_\nu}}} e^{2\pi i \sum_1^k \alpha_\nu m_\nu} = \sum_{\substack{t_\nu = 1 \\ (\nu = 1, \ldots, k)}}^{\frac{N_\nu}{M_\nu}} e^{2\pi i \sum_1^k \alpha_\nu (\beta_\nu + t_\nu M_\nu)} \sum_{\substack{Q(m) \leqq x \\ m_\nu \equiv \beta_\nu + t_\nu M_\nu \pmod{N_\nu}}}$$

also nach Satz II

$$F(x) = e^{2\pi i \sum_1^k \alpha_\nu \beta_\nu} \sum_{t_\nu = 1}^{\frac{N_\nu}{M_\nu}} \prod_1^k e^{2\pi i \alpha_\nu t_\nu M_\nu} \frac{p_k}{\sqrt{D} \prod_1^k N_\nu} x^{\frac{k}{2}} + O(\psi)$$

$$= \frac{e^{2\pi i \sum_1^k \alpha_\nu \beta_\nu} p_k}{\sqrt{D} \prod_1^k N_\nu} x^{\frac{k}{2}} \prod_{\nu=1}^k \sum_{t_\nu = 1}^{\frac{N_\nu}{M_\nu}} \left(e^{2\pi i \alpha_\nu M_\nu}\right)^{t_\nu} + O(\psi).$$

Ist $\delta = 1$, also jedes $\alpha_\nu M_\nu$ ganz, so ist hierin

$$\prod_{\nu=1}^k = \prod_1^k \frac{N_\nu}{M_\nu},$$

$$F(x) = \frac{e^{2\pi i \sum_1^k \alpha_\nu \beta_\nu} p_k}{\sqrt{D} \prod_1^k M_\nu} x^{\frac{k}{2}} + O(\psi);$$

t $\delta = 0$, also ein $\alpha_\nu M_\nu$ nicht ganz, so ist für das betreffende ν

$$e^{2\pi i a_\nu M_\nu} + 1, \quad (e^{2\pi i a_\nu M_\nu})^{\frac{N_\nu}{M_\nu}} = e^{2\pi i a_\nu N_\nu} = 1,$$

$$\sum_{t_\nu=1}^{\frac{N_\nu}{M_\nu}} (e^{2\pi i a_\nu M_\nu})^{t_\nu} = 0,$$

$$\prod_{\nu=1}^{k} = 0,$$

$$F(x) = O(\psi).$$

§ 3.

Herleitung von Satz II für $k+1$ aus Satz II für $k (\geqq 5)$.

Man beachte zunächst

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+1\right)} = \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2}+1\right) = \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{\frac{k}{2}}\,du$$

1) $$= 2\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{k}{2}}\,dt = \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{k}{2}}\,dt.$$

Bekanntlich (Eulersche Summenformel) ist

2) $$\sum_{a \leqq n \leqq b} f(n) = \int_a^b f(y)\,dy + \int_a^b g(y) f'(y)\,dy,$$

alls

$$g(y) = y - [y] - \frac{1}{2},$$

$$a < b,$$

(y) für $a \leqq y \leqq b$ differenzierbar (an den Enden nach innen), $f'(y)$ tetig für $a \leqq y \leqq b$, $f(a) = 0$, $f(b) = 0$ und n die ganzen Zahlen des ntervalls $a \leqq n \leqq b$ durchläuft.

Dies wende ich bei festen $x > 0$, $\beta \gtrless 0$, $M > 0$, $c > 0$ an auf

$$a = \frac{-\sqrt{\frac{x}{c}} - \beta}{M}, \quad b = \frac{\sqrt{\frac{x}{c}} - \beta}{M}, \quad f(y) = (x - c(\beta + yM)^2)^{\frac{k}{2}}.$$

Da mit einer von x freien Abteilungszahl

$$f'(y) = -kcM(\beta + yM)(x - c(\beta + yM)^2)^{\frac{k}{2}-1} \qquad (a \leqq y \leqq b)$$

bteilungsweise monoton ist und bei wachsendem x gleichmäßig in y

$$f'(y) = O\left(\sqrt{x}\,x^{\frac{k}{2}-1}\right) = O\left(x^{\frac{k-1}{2}}\right)$$

ist, folgt aus (2)

$$\sum_{|\beta+nM|\leqq\sqrt{\frac{x}{c}}}(x-c(\beta+nM)^2)^{\frac{k}{2}} = \int_{|\beta+yM|\leqq\sqrt{\frac{x}{c}}}(x-c(\beta+yM)^2)^{\frac{k}{2}}dy+O\left(x^{\frac{k-1}{2}}\right).$$

Hierin ist das Integral, $\frac{\sqrt{c}(\beta+yM)}{\sqrt{x}}=t$ gesetzt, nach (1)

$$\frac{x^{\frac{k+1}{2}}}{\sqrt{c}M}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\frac{k}{2}}dt=\frac{p_{k+1}}{p_k}\frac{x^{\frac{k+1}{2}}}{\sqrt{c}M}.$$

Dadurch ergibt sich

$$\sum_{\substack{|m|\leqq\sqrt{\frac{x}{c}}\\ m\equiv\beta\,(\mathrm{mod}\,M)}}(x-cm^2)^{\frac{k}{2}}=\sum_{|\beta+nM|\leqq\sqrt{\frac{x}{c}}}(x-c(\beta+nM)^2)^{\frac{k}{2}}$$

$$=\frac{p_{k+1}}{p_k}\frac{x^{\frac{k+1}{2}}}{\sqrt{c}M}+O\left(x^{\frac{k-1}{2}}\right). \tag{3}$$

Nach der Lagrangeschen Transformation ist nun bei $k+1$ Variable

$$Q(u)=Q(u_1,\ldots,u_{k+1})$$

$$=c_1(u_1+e_{11}u_2+\ldots+e_{1k}u_{k+1})^2+\ldots+c_k(u_k+e_{kk}u_{k+1})^2+c_{k+1}u_{k+1}^2$$

$$=R(u_1,\ldots,u_{k+1})+c_{k+1}u_{k+1}^2, \tag{4}$$

wo die e rational, die $c>0$ und rational sind und ferner die definit Funktion in n Variablen

$$Q(u_1,\ldots,u_k,0)=R(u_1,\ldots,u_k,0)=Q_1(u_1,\ldots,u_k)$$

die Determinante $D_1=\frac{D}{c_{k+1}}$ hat.

In

$$F(x)=\sum_{\substack{Q(m)\leqq x\\ m_\nu\equiv\beta_\nu\,(\mathrm{mod}\,M_\nu)}}1 \qquad (x\geqq 0$$

muß m_{k+1} den Bedingungen

$$\begin{cases}|m_{k+1}|\leqq\sqrt{\frac{x}{c_{k+1}}},\\ m_{k+1}\equiv\beta_{k+1}\,(\mathrm{mod}\,M_{k+1})\end{cases}$$

genügen; alsdann haben bei jedem solchen m_{k+1} die Zahlen $m_1,\ldots,m$ die Bedingungen

$$\begin{cases}R(m_1,\ldots,m_{k+1})\leqq x-c_{k+1}m_{k+1}^2,\\ m_\nu\equiv\beta_\nu\,(\mathrm{mod}\,M_\nu)\end{cases} \qquad (\nu=1,\ldots,$$

zu erfüllen.

Nun ist identisch mit rationalen γ_ν

$$R(u_1, \ldots, u_{k+1})$$
$$= c_1((u_1 - \gamma_1 u_{k+1}) + e_{11}(u_2 - \gamma_2 u_{k+1}) + \ldots + e_{1k}(u_k - \gamma_k u_{k+1}))^2 + \ldots$$
$$+ c_k(u_k - \gamma_k u_{k+1})^2$$
$$= Q_1(u_1 - \gamma_1 u_{k+1}, \ldots, u_k - \gamma_k u_{k+1})$$

Mittelpunkttransformation des k-dimensionalen Ellipsoids, das beim chnitt des $(k+1)$-dimensionalen mit $u_{k+1} = \text{konst.}$ entsteht). Es handelt ch also bei festem m_{k+1} um

$$5) \qquad \begin{cases} Q_1(n_1, \ldots, n_k) \leqq x - c_{k+1} m_{k+1}^2, \\ n_\nu \equiv \beta_\nu - \gamma_\nu m_{k+1} \pmod{M_\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, k). \end{cases}$$

Nach Satz II gibt es zu festen $k, Q_1, \delta_\nu, M_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, k)$, wo δ_ν ational, ein $K(k, Q_1, \delta_\nu, M_\nu)$, so daß für $y \geqq 0$, wenn $G(y)$ die Lösungs- ahl von

$$\begin{cases} Q_1(n_1, \ldots, n_k) \leqq y, \\ n_\nu \equiv \delta_\nu \pmod{M_\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, k) \end{cases}$$

t,

$$6) \qquad \left| G(y) - \frac{p_k}{\sqrt{D_1} \prod_1^k M_\nu} y^{\frac{k}{2}} \right| \leqq K(1+y)^{\frac{k}{2}-1}$$

t. Da unsere

$$\delta_\nu = \beta_\nu - \gamma_\nu m_{k+1}$$

ir alle $m_{k+1} \equiv \beta_{k+1} \pmod{M_{k+1}}$ beschränkte Nenner haben, stellt

$$n_\nu \equiv \delta_\nu \pmod{M_\nu}$$

ine gleichmäßig in m_{k+1} beschränkte Anzahl von Gittern dar. Das K (6) kann also für uns von m_{k+1} frei, d. h. nur von k, Q, β_ν, M_ν ab- ängig gewählt werden. Für

$$|m_{k+1}| \leqq \sqrt{\frac{x}{c_{k+1}}}$$

t also die Lösungszahl von (5), gleichmäßig in m_{k+1},

$$\frac{\sqrt{c_{k+1}}\, p_k}{\sqrt{D} \prod_1^k M_\nu} (x - c_{k+1} m_{k+1}^2)^{\frac{k}{2}} + O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right).$$

Daher ist

$$F(x) = \frac{\sqrt{c_{k+1}}\, p_k}{\sqrt{D} \prod_1^k M_\nu} \sum_{\substack{|m_{k+1}| \leqq \sqrt{\frac{x}{c_{k+1}}} \\ m_{k+1} \equiv \beta_{k+1} \pmod{M_{k+1}}}} (x - c_{k+1} m_{k+1}^2)^{\frac{k}{2}} + O\left(x^{\frac{k-1}{2}}\right),$$

also wegen (3)

$$F(x) = \frac{\sqrt{c_{k+1}}\, p_k}{\sqrt{D} \prod_1^k M_\nu} \frac{p_{k+1}}{p_k} \frac{x^{\frac{k+1}{2}}}{\sqrt{c_{k+1}}\, M_{k+1}} + O\left(x^{\frac{k-1}{2}}\right)$$

$$= \frac{p_{k+1}}{\sqrt{D} \prod_1^{k+1} M_\nu} x^{\frac{k+1}{2}} + O\left(x^{\frac{k+1}{2}-1}\right),$$

was zu beweisen war.

§ 4.

Weitere Bemerkungen.

1. Herr Dr. Jarník machte mich darauf aufmerksam, daß im Fall $k \geqq 5$ für jedes Q der Exponent $\frac{k}{2} - 1$ in ψ beim Satze I die wahre Konstante ist, indem weder

$$F(x) = \sum_{Q(m) \leqq x} 1 = \frac{p_k}{\sqrt{D}} x^{\frac{k}{2}} + O(x^l), \quad l < \frac{k}{2} - 1$$

noch selbst

$$F(x) = \sum_{Q(m) \leqq x} 1 = \frac{p_k}{\sqrt{D}} x^{\frac{k}{2}} + o\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right) \tag{7}$$

richtig sein kann.

In der Tat würde aus (7) für jedes $p > 0$

$$F(x+p) - F(x) = \frac{p_k}{\sqrt{D}} p \frac{k}{2} x^{\frac{k}{2}-1} + o\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right) \to \infty \tag{8}$$

folgen. Wenn jedoch N der Hauptnenner der $a_{\mu\mu}$ und $2a_{\mu\nu}$ mit $\mu \neq$ ist, so stellt $Q(m)$ nur Multipla von $\frac{1}{N}$ dar; für ganzes x und $p = \frac{1}{2}$ ist also

$$F(x+p) - F(x) = 0,$$

im Widerspruch zu (8).

Wird

$$\frac{\sum_{Q(m) \leqq x} 1 - \frac{p_k}{\sqrt{D}} x^{\frac{k}{2}}}{x^{\frac{k}{2}-1}} = G(x)$$

gesetzt, so ist nach Satz I

$$-\infty < \underline{\lim}_{x=\infty} G(x) \leqq \overline{\lim}_{x=\infty} G(x) < \infty$$

nd nach Herrn Jarníks Bemerkung nicht

$$\underline{\lim_{x=\infty}} G(x) = \overline{\lim_{x=\infty}} G(x) = 0.$$

2. Genau ebenso läßt sich einsehen, daß für $k \geqq 5$ unter allen Umänden

$$-\infty < \underline{\lim_{x=\infty}} G(x) < \overline{\lim_{x=\infty}} G(x) < \infty$$

t. In der Tat würde sich aus

$$F(x) = \sum_{Q(m) \leqq x} 1 = \frac{p_k}{\sqrt{D}} x^{\frac{k}{2}} + C_Q x^{\frac{k}{2}-1} + o\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right) \tag{9}$$

ıch die falsche Konsequenz (8) ergeben.

3. Herrn Jarníks Bemerkung läßt die Frage offen, ob vielleicht, enn x nur die Multipla von $\frac{1}{N}$ durchläuft, die Relation (8) oder (9) chtig sein kann. Ich werde auch diese Frage bei jedem Q verneinen. hne Beschränkung der Allgemeinheit sei $N = 1$, d. h. die $a_{\mu\mu}$ und e $2a_{\mu\nu}$ mit $\mu \neq \nu$ ganz; ich nenne das kurz ein ganzzahliges Q. Die ahl k braucht nicht $\geqq 5$ zu sein; auch für $k \geqq 1$ gilt das Folgende, indem e für $k \geqq 5$ in Satz II enthaltene, ganz rohe Abschätzung

$$\sum_{\substack{Q(m) \leqq x \\ m_\nu \equiv \beta_\nu \pmod M}} 1 = \frac{p_k}{\sqrt{D}\, M^k} x^{\frac{k}{2}} + o\left(x^{\frac{k}{2}}\right) \tag{10}$$

ie ich beim Beweise heranziehen werde) bekanntlich schon für $k \geqq 1$ ichlich gilt.

Aus (9) bei ganzzahlig wachsendem $x = n$ würde

$$\sum_{Q(m)=n} 1 = F(n) - F(n-1) = \frac{p_k}{\sqrt{D}} \frac{k}{2} n^{\frac{k}{2}-1} + o\left(n^{\frac{k}{2}-1}\right)$$

lgen. Für jedes ganze $M > 0$ wäre also, wenn n auf Zahlen einer ithmetischen Progression

$$n \equiv r \pmod M$$

schränkt wird,

$$\sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv r}} \sum_{Q(m)=r} 1 = \sum_{\substack{Q(m) \leqq x \\ Q(m) \equiv r}} 1 = \frac{p_k}{\sqrt{D}\, M} x^{\frac{k}{2}} + o\left(x^{\frac{k}{2}}\right). \tag{11}$$

Hat andererseits die Kongruenz

$$Q(m) \equiv r \pmod{M}$$

im Würfel

$$0 \leqq m_\nu < M \qquad (\nu = 1, \ldots, k) \tag{12}$$

L_r Wurzeln, so ist nach (10)

$$\sum_{\substack{Q(m) \leqq x \\ Q(m) \equiv r}} 1 = \frac{L_r p_k}{\sqrt{D}\, M^k} x^{\frac{k}{2}} + o\left(x^{\frac{k}{2}}\right). \tag{13}$$

Der Vergleich von (11) und (13) ergäbe

$$L_r = M^{k-1},$$

also von r frei.

Daher wäre, wenn (m) (desgl. (s) und (t) nachher) die M^k Gitte punkte (12) durchläuft und

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{M}}$$

gesetzt wird, wofern $M > 1$,

$$\sum_{(m)} \varepsilon^{Q(m)} = M^{k-1} \sum_{r=0}^{M-1} \varepsilon^r = 0. \tag{14}$$

Andererseits ist

$$\left| \sum_{(m)} \varepsilon^{Q(m)} \right|^2 = \sum_{(m)} \varepsilon^{Q(m)} \sum_{(s)} \varepsilon^{-Q(s)} = \sum_{(m),(s)} \varepsilon^{Q(m)-Q(s)} = \sum_{(t),(s)} \varepsilon^{Q(s+t)-Q(s)}$$

$$= \sum_{(t)} \varepsilon^{Q(t)} \sum_{(s)} \varepsilon^{\sum_\mu s_\mu \sum_\nu 2 a_{\mu\nu} t_\nu} = \sum_{(t)} \varepsilon^{Q(t)} \prod_\mu \sum_{s_\mu} \varepsilon^{s_\mu \sum_\nu 2 a_{\mu\nu} t_\nu}.$$

Hierin ist

$$\sum_{s_\mu} \varepsilon^{s_\mu \sum_\nu 2 a_{\mu\nu} t_\nu} = \begin{cases} M, & \text{falls } \sum_\nu 2 a_{\mu\nu} t_\nu \equiv 0 \pmod{M}, \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Daher ist

$$\left| \sum_{(m)} \varepsilon^{Q(m)} \right|^2 = M^k \sum_{(t)}{}' \varepsilon^{Q(t)},$$

erstreckt über alle (t), welche die Kongruenzen

$$\sum_\nu 2 a_{\mu\nu} t_\nu \equiv 0 \pmod{M} \qquad (\mu = 1, \ldots, \tag{15}$$

erfüllen. Ich wähle nun mein M nicht nur > 1, sondern zur gan Zahl $2^k D$, d. i. zur Determinante der Koeffizienten in (15) teilerfre (z. B. $M = 2^k D + 1$ oder gleich einer nicht in $2^k D$ aufgehenden Pr

ahl). Dann haben die Kongruenzen (15) nur die eine Lösung $(t)=(0)$ n den Intervallen $0 \leqq t_\nu < M$, und es ist

$$\Big|\sum_{(m)} \varepsilon^{Q(m)}\Big|^2 = M^k,$$

$$\sum_{(m)} \varepsilon^{Q(m)} \neq 0,$$

egen (14).

(9) ist also auch bei ganzzahlig wachsendem x falsch; bei jedem anzzahligen positiv-definiten Q.

4. Für jede ganzzahlige positiv-definite quinäre quadratische Form olgt aus Satz I

$$F(x) = \sum_{Q(m) \leqq x} 1 = \frac{p_5}{\sqrt{D}} x^{\frac{5}{2}} + O(x^{\frac{3}{2}}),$$

lso

$$\left| F(x) - \frac{p_5}{\sqrt{D}} x^{\frac{5}{2}} \right| < C_Q x^{\frac{3}{2}} \quad \text{für } x \geqq 1.$$

ür $x \geqq 1$, $p > 0$ ist daher

$$F(x+p) - F(x) > \frac{p_5}{\sqrt{D}} \left((x+p)^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{5}{2}} \right) - C_Q (x+p)^{\frac{3}{2}} - C_Q x^{\frac{3}{2}}$$

$$> \frac{p_5}{\sqrt{D}} \frac{5}{2} p x^{\frac{3}{2}} - 2 C_Q (x+p)^{\frac{3}{2}}.$$

ür $x > \xi(Q, p)$ ist also

$$F(x+p) - F(x) > \left(\frac{5 p_5}{2\sqrt{D}} p - 3 C_Q \right) x^{\frac{3}{2}}.$$

ei passendem $p = p_Q$ $\left(\text{z. B. } p_Q = \frac{2 C_Q \sqrt{D}}{p_5}\right)$ und passendem η_Q ist also

$$F(x+p_Q) - F(x) > 0 \quad \text{für } x > \eta_Q.$$

Damit habe ich den

Satz. *Es gibt zu jeder ganzzahligen definiten quinären quadratischen Form Q eine positive ganze Zahl N_Q, so daß unter je N_Q konsekutiven positiven ganzen Zahlen mindestens eine durch die Form darstellbar ist.*

5. Im Fall $\delta = 0$ des Satzes III kann für $k \geqq 6$ die Voraussetzung er Rationalität der α_ν durch die schwächere ersetzt werden, daß fünf ieser Zahlen rational und so beschaffen sind, daß nicht alle diese fünf $\alpha_\nu M_\nu$ ganz sind, während die übrigen $k-5$ Zahlen α_ν beliebig reell rational oder irrational) sein dürfen.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ ational, $\alpha_1 M_1, \ldots, \alpha_5 M_5$ nicht alle ganz. Auf der rechten Seite von (4)

mit k statt $k+1$ fasse ich die $k-5$ letzten Glieder zu $S(u_6, \ldots, u_$ zusammen, was eine rationalzahlige definite Form ist. (4) lautet demnach

$$Q(u) = Q(u_1, \ldots, u_k) = R(u_1, \ldots, u_k) + S(u_6, \ldots, u_k),$$

wo

$$Q(u_1, \ldots, u_5, 0, \ldots, 0) = R(u_1, \ldots, u_5, 0, \ldots, 0) = Q_1(u_1, \ldots, u_5)$$

definit ist. Nun ist identisch

$$R(u_1, \ldots, u_k) = Q_1(u_1 - L_1, \ldots, u_5 - L_5),$$

wo $L_1, \ldots, L_5$ homogene lineare rationalzahlige Formen in $u_6, \ldots,$ sind. Daher ist

$$F(x) = \sum_{\substack{S(m) \leqq x \\ m_\nu \equiv \beta_\nu \pmod{M_\nu} \\ \nu = 6, \ldots, k}} e^{2\pi i \sum_6^k \alpha_\nu m_\nu} \sum_{\substack{Q_1(m) \leqq x - S(m_6, \ldots, m_k) \\ m_\nu \equiv \delta_\nu(m_6, \ldots, m_k) \pmod{M_\nu} \\ \nu = 1, \ldots, 5}} e^{2\pi i \sum_1^5 \alpha_\nu m_\nu}.$$

Da die $\delta_\nu = \beta_\nu - L_\nu(m_6, \ldots, m_k)$ gleichmäßig in $m_6, \ldots, m_k$ nur en lich viele Gitter mod M_ν $(\nu = 1, \ldots, 5)$ repräsentieren, ist nach Satz III d innere Summe, gleichmäßig in $m_6, \ldots, m_k$,

$$O(x^{\frac{3}{2}});$$

die äußere hat $O\left(x^{\frac{k-5}{2}}\right)$ Glieder; daher ist

$$F(x) = O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right).$$

Göttingen, den 8. Februar 1925.

(Eingegangen am 10. Februar 1925.)

Corrispondenza fra una superficie e le sue parallele.

Von

E. Bompiani in Bologna.

La presente ricerca è un' applicazione, nel campo metrico, dei risultati generali da me ottenuti in generale sulla corrispondenza puntuale fra due superficie[1]). In una tale corrispondenza esiste sempre (fatta eccezione eccezione di casi particolari geometricamente ben caratterizzati) un *sistema assiale di curve* di una superficie al quale corrisponde pure un sistema assiale sull' altra. Chiamo sistema assiale un sistema ∞^2 di curve tali che i piani osculatori alle ∞^1 di esse passanti per un punto della superficie formino fascio. La retta asse del fascio che così viene determinata per ogni punto di ciascuna delle due superficie poste in corrispondenza si chiama *asse della corrispondenza* (relativa al punto e alla superficie considerati).

Data una superficie nel gruppo fondamentale una fra le corrispondenze più semplici e naturali è quella che le sue normali determinano fra la superficie stessa e le superficie ad essa parallele. Determino l' asse relativo ad un punto di una superficie e alla corrispondenza con una sua superficie parallela, indi il luogo di questi assi variando la superficie parallela. E' notevole il fatto che quando questa si approssima indefinitamente alla superficie di partenza l' asse tenda ad una posizione ben determinata, che chiamo *asse caratteristico*, in stretta relazione con le curvature gaussiane delle superficie focali della congruenza delle normali talchè la conoscenza dell' asse caratteristico equivale perfettamente alla conoscenza di quelle due curvature: in altri termini queste due curvature possono calcolarsi rimanendo in un intorno del punto della superficie di partenza, senza passare al finito, quindi questa interpretazione vale anche se si considera la superficie immersa in uno spazio curvo V_3).

[1]) *Proprietà generali della rappresentazione puntuale fra due superficie* [Annali di Matematica pura ed applicata, s. IV, t. 1 (1923—1924), pag. 259—284].

La considerazione di questi assi al variare del punto sulla normale alla superficie di partenza mette in evidenza alcune classi di superficie, fra le quali le W, forse meritevoli di studio. Termino con un' applicazione alle superficie d' area minima.

§ 1.

Formule preliminari.

1. Sia la superficie S descritta dal punto P di coordinate cartesiane ortogonali $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ al variare di u e v; e siano $u = \text{cost.}$ (linee u) e $v = \text{cost.}$ (linee v) le sue linee di curvatura. Indicati con r_1, r_2 i corrispondenti raggi di curvatura e l' elemento lineare con

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2 \tag{1}$$

i coefficienti della seconda forma fondamentale, quali figurano nelle equazioni fondamentali[2])

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial v} + LX, \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial v} + MX, \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial v} + NX \end{cases} \tag{2}$$

(essendo i simboli di Christoffel costruiti rispetto ad (1) ed $X, Y,$ i coseni direttori della normale in P ad S) sono

$$L = -E/r_2, \qquad M = 0, \qquad N = -G/r_1. \tag{3}$$

Le equazioni di Gauss e di Codazzi relative alle due forme fondamentali di S sono notoriamente

$$\frac{1}{r_1 r_2} = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \right\}, \tag{4}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2} \right) \dfrac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} = \dfrac{\partial}{\partial v} \left(\dfrac{1}{r_2} \right), \\ \left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2} \right) \dfrac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} = -\dfrac{\partial}{\partial u} \left(\dfrac{1}{r_1} \right). \end{cases} \tag{5}$$

Conviene anche riportare le espressioni della curvatura geodetica delle linee di curvatura di S in P

$$\frac{1}{\varrho_1} = -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}; \qquad \frac{1}{\varrho_2} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}. \tag{6}$$

---

[2]) Per le formole che seguono v. p. es. L. Bianchi: Lezioni di Geometria Differenziale (Zanichelli, Bologna).

2. S'indichi con P_a il punto di coordinate $x_a = x + aX$, $y_a = y + aY$, $= z + aZ$ (per $a = -r_1$, $= -r_2$ si hanno i due centri di curvatura P_2 relativi al punto P di S) e con S_a la superficie parallela ad S $= \text{cost.}$) descritta da P_a. L'indice a sarà apposto alle lettere indicanti uantità relative ad S_a.

Per la superficie S_a

7) $$ds_a^2 = E_a du^2 + G_a dv^2$$

on

8) $$E_a = (1 + a/r_2)^2 E. \qquad G_a = (1 + a/r_1)^2 G$$

i coefficienti della seconda forma valgono

9) $$L_a = (1 + a/r_2) L, \qquad M_a = 0, \qquad N_a = (1 + a/r_1) N.$$

I simboli di Christoffel, o, meglio, quelle loro combinazioni che igurano nell'equazione differenziale delle geodetiche valgono:

10) $$\begin{cases} \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} - 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \dfrac{\partial \log (\sqrt{E}/G)}{\partial u} \\ \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}_a - 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}_a = \dfrac{\partial \log (\sqrt{E_a}/G_a)}{\partial u} = \dfrac{\partial \log (\sqrt{E}/G)}{\partial u} + \dfrac{\partial}{\partial u} \log \dfrac{1 + a/r_2}{(1 + a/r_1)^2}, \end{cases}$$

11) $$\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}_a - 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}_a - \left[\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} - 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\right] = \frac{a}{1 + a/r_2} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{r_2}\right) - 2 \frac{a}{1 + a/r_1} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{r_1}\right),$$

12) $$\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}_a - 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}_a - \left[\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} - 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\right] = \frac{a}{1 + a/r_1} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r_1}\right) - 2 \frac{a}{1 + a/r_2} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r_2}\right);$$

noltre

13) $$\begin{cases} \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = -\dfrac{E}{G} \dfrac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}, \\ \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}_a = -\dfrac{E_a}{G_a} \dfrac{\partial \log (\sqrt{E_a})}{\partial v} = -\dfrac{E}{G} \dfrac{1 + a/r_2}{1 + a/r_1} \dfrac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \end{cases}$$

n forza della prima equazione (5); quindi

14) $$\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}_a - \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = -\frac{E}{G} a \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \frac{1}{1 + a/r_1} \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{E}{G} \frac{a}{1 + a/r_1} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r_2}\right)$$

er la stessa equazione citata, e

15) $$\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}_a - \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = \frac{G}{E} \frac{a}{1 + a/r_2} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{r_1}\right).$$

3. Prima di procedere osserviamo alcune relazioni fra una superficie e le sue parallele.

La quantità ϱ_1/r_1 è invariante nel passaggio da una superficie ad una parallela; ciò si verifica subito; quindi quest'invariante ha un significato geometrico dipendente dalla sola congruenza normale. Consideriamo il punto P_1 sulla superficie focale S_1 e l'angolo delle linee u, v che vi s'incrociano. La tangente di quest'angolo vale appunto ϱ_1/r_1. Analogamente si ha il significato di ϱ_2/r_2 dalla superficie focale S_2.

Questo fatto si può interpretare geometricamente in altro modo. La costruzione di Beltrami del raggio di curvatura geodetica applicata alle linee di curvatura di S porta che se a partire da P sulla tangente alla linea v si porta il segmento ϱ_1 (in valore e segno) l'estremo $\overline{P}$ appartiene alla trasformata di Laplace $\overline{S}$ di S (luogo degli spigoli di regresso delle sviluppabili circoscritte ad S lungo le linee di curvatura u).

Se analogamente si costruisce $\overline{P}_a$ a partire da P_a, per l'invarianza di ϱ_1/r_1, i punti $\overline{P}, \overline{P}_a$ e P_1 sono allineati (e si trovano nel piano tangente in P_1 ad S_1); e la loro retta forma con la normale un angolo la cui tangente è ϱ_1/r_1. Ma la normale è la tangente in P_1 alla linea u di S_1, sicchè la retta $\overline{P}P_1$ è la tangente in P_1 alla linea v. Quindi:

Di una serie di superficie parallele si costruiscano le trasformate di Laplace rispetto ad un sistema di linee di curvatura ($p.\ es.$ *le* u) *la superficie focale corrispondente* (*della congruenza delle normali*) S_1. *I punti corrispondenti sulle trasformate di Laplace a quelli appartenenti ad una normale si trovano allineati sulla tangente in* P_1 *alla linea* v *di* S_1.

§ 2.

Assi della corrispondenza.

4. Posto

$$H = \left| x' - x, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \right|, \quad H_1 = \left| x' - x, \frac{\partial x}{\partial u}, X \right|, \quad H_2 = \left| x' - x, \frac{\partial x}{\partial v}, X \right|$$

i determinanti corrispondenti relativi al punto P_a di S_a valgono, a norma delle relazioni

$$(16) \qquad \frac{\partial X}{\partial u} = \frac{1}{r_2}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{1}{r_1}\frac{\partial x}{\partial v},$$

$$(17) \qquad H_a = (1 + a/r_1)(1 + a/r_2)[H - a\Omega] \quad \text{con} \quad \Omega = \left| X, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \right|$$

$$(18) \qquad H_{1/a} = (1 + a/r_2) H_1, \qquad H_{2/a} = (1 + a/r_1) H_2.$$

Se $h_1 H + H_1 = 0$, $h_2 H + H_2 = 0$ indicano le equazioni di una retta passante per P e non situata nel piano ivi tangente ad S, ed $h_{1/a} H + H_{1/a} =$

$_{2/a}H + H_{2/a} = 0$ le equazioni di una retta passante per P_a, gli assi della orrispondenza determinata dalle normali fra le due superficie parallele S ed $_a$ sono definiti dalle relazioni[3])

19)
$$\begin{cases} Lh_1 - L_a h_{1/a} = \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}_a, \\ Nh_1 - N_a h_{1/a} = \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} - 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} - \left[\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}_a - 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}_a\right], \end{cases}$$

20)
$$\begin{cases} Nh_2 - N_a h_{2/a} = \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}_a - \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}, \\ Lh_2 - L_a h_{2/a} = \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}_a - 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}_a - \left[\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} - 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\right]. \end{cases}$$

Dalla risoluzione di questi sistemi, tenuto conto delle (11), (12), 14), (15) si hanno le espressioni

21)
$$\begin{cases} h_1 = \dfrac{1}{G}\dfrac{r_1^2 r_2^2}{r_1 - r_2}\left[\dfrac{1}{r_2}\dfrac{1 + a/r_2}{1 + a/r_1}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{r_1}\right) - \left(\dfrac{2}{r_2} + \dfrac{1}{r_1}\right)\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{r_2}\right)\right], \\ h_2 = \dfrac{1}{E}\dfrac{r_1^2 r_2^2}{r_1 - r_2}\left[\dfrac{1}{r_1}\dfrac{1 + a/r_1}{1 + a/r_2}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{r_2}\right) - \left(\dfrac{2}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}\right)\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{r_1}\right)\right] \end{cases}$$

he individuano (per $r_1 \neq r_2$) l' asse in P della corrispondenza fra S ed S_a.

Le linee assiali definite su S dalla corrispondenza (alle quali corrisponde n sistema di linee assiali su S_a) soddisfano alla equazione differenziale

22)
$$v'' = \left[Lh_1 - \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\right] + \left[Lh_2 + 2Mh_1 + \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} - 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\right]v' + \left[Nh_1 + 2Mh_2 - \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} + 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\right]v'^2 + \left[Nh_2 + \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\right]v'^3$$

uando ad h_1, h_2 si sostituiscano le espressioni (21); e per esse si ha:

23)
$$\begin{cases} Lh_1 - \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = \dfrac{E}{G}\dfrac{r_1^2}{r_2 - r_1}\left[\dfrac{1 + a/r_2}{1 + a/r_1}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{r_1}\right) - 2\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{r_2}\right)\right], \\ Nh_2 + \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = \dfrac{G}{E}\dfrac{r_2^2}{r_2 - r_1}\left[\dfrac{1 + a/r_1}{1 + a/r_2}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{r_2}\right) - 2\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{r_1}\right)\right], \end{cases}$$

24)
$$\begin{cases} Lh_2 + \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} - 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} \\ = \dfrac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}\left[\dfrac{1 + a/r_1}{1 + a/r_2}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{r_2}\right) - \dfrac{r_1}{r_2}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{r_1}\right)\right] + \dfrac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial u}, \\ Nh_1 + \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} - 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} \\ = \dfrac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}\left[\dfrac{1 + a/r_2}{1 + a/r_1}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{r_1}\right) - \dfrac{r_2}{r_1}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{r_2}\right)\right] + \dfrac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial v}. \end{cases}$$

[3]) V. la mia Memoria citata, n. 15, pag. 272; la seguente equazione (22) è la (2) el n. 13, pag. 271.

5. Teniamo fissa la superficie S e facciamo variare a, cioè S_a: l'asse relativo al punto P ed alla corrispondenza fra S ed S_a varia descrivendo un cono di cui vogliamo trovare l'equazione. Riferendoci alle (21) e posto per brevità

$$(25) \qquad \frac{1+a/r_2}{1+a/r_1}=\lambda, \qquad h_1=m_1\lambda+n_1, \qquad h_2=\frac{m_2}{\lambda}+n_2$$

l'eliminazione di λ fra le equazioni $h_1 H+H_1=0$ e $h_2 H+H_2=0$ dà l'equazione:

$$(26) \qquad H^2(m_1 m_2-n_1 n_2)=H(n_1 H_2+n_2 H_1)+H_1 H_2;$$

essa rappresenta un cono quadrico passante per le tangenti di curvatura di S in P (le quali vanno interpretate come assi relativi alle due superficie S_a per $a=-r_1$, $a=-r_2$); tenuto conto delle espressioni dei coefficienti si vede che detto cono si spezza allora e solo quando $\frac{\partial r_1}{\partial v}=0$ ovvero $\frac{\partial r_2}{\partial u}=0$, cioè quando la superficie S possiede un sistema di linee di curvatura piane o sferiche.

La normale in P ad S non appartiene in generale al cono (26); vi appartiene se e solo se, posto $K=1/r_1 r_2$ ed $\mathfrak{H}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$ risulta

$$(27) \qquad K\left(\frac{\partial r_1}{\partial v}\frac{\partial r_2}{\partial u}-\frac{\partial r_2}{\partial v}\frac{\partial r_1}{\partial u}\right)=2\mathfrak{H}^2\frac{\partial r_2}{\partial v}\frac{\partial r_1}{\partial u}.$$

Se la superficie è W (nel qual caso il primo membro è nullo) o si ha p. es. $\frac{\partial r_1}{\partial u}=0$ $\left(\text{quindi } \frac{\partial r_1}{\partial v}=0 \text{ ovvero } \frac{\partial r_2}{\partial u}=0\right)$, oppure è $\mathfrak{H}=0$.

Si può dare alla (27) un aspetto geometrico più suggestivo introducendo le curvature K_1 e K_2 in P_1 e in P_2 delle superficie focali della congruenza S_1, S_2 (supposto che nessuna di queste si riduca ad una curva). Poichè

$$(28) \qquad K_1=-\frac{1}{(r_1-r_2)^2}\frac{\partial r_2}{\partial v}\Big/\frac{\partial r_1}{\partial v}; \qquad K_2=\frac{1}{(r_1-r_2)^2}\frac{\partial r_1}{\partial u}\Big/\frac{\partial r_2}{\partial u}$$

la (27) si trascrive

$$(29) \qquad K\left(\frac{1}{K_1 K_2}\frac{1}{(r_1-r_2)^4}-1\right)=2\mathfrak{H}^2.$$

Riassumendo:

Il luogo degli assi uscenti da un punto P di S e relativi alle corrispondenze (determinate dalle normali) fra S e le superficie parallele è un cono contenente le due tangenti di curvatura in P. Esso si spezza se e solo se S ha un sistema di linee di curvatura sferiche o piane.

Detto cono contiene la normale in P (cioè le linee assiali sono oscultrici alle linee geodetiche; e sono esse stesse geodetiche se il fatto avvie

er ogni punto di S) se è soddisfatta la (29); *proprietà caratteristica elle superficie d'area minima fra le superficie W (a falde focali non egeneri) è appunto di possedere le geodetiche come linee assiali (per* $= \pm\infty$).

6. Fra le superficie parallele ad S ne esistono tali che la normale P appartenga al cono avente il vertice sulla normale stessa? Posto

$$\Lambda = \frac{1}{K_1 K_2}\,\frac{1}{(r_1 - r_2)^4} - 1$$

isogna determinare a in modo che

$$\frac{\Lambda}{(r_1+a)(r_2+a)} = 2\left(\frac{1}{r_1+a} + \frac{1}{r_2+a}\right)^2$$

ioè soddisfacente all' equazione

$$a^2(\Lambda - 8) + (r_1 + r_2)a(\Lambda - 8) + [r_1 r_2 \Lambda - 2(r_1 + r_2)^2] = 0$$

a cui la somma delle radici $a_1 + a_2 = -(r_1 + r_2)$. Quindi:

Sopra ogni retta della congruenza vengono determinati due punti ali che, costruiti i coni di cui sopra relativamente alle superficie ortonali che vi passano, essi contengono la retta data; questi due punti anno lo stesso punto medio dei centri di curvatura. Essi coincidono oltanto per le superficie W (proprietà caratteristica) e in tal caso il oro luogo è l' evoluta media; mentre si trovano all' infinito per le conruenze caratterizzate da

30) $$\frac{1}{K_1 K_2} = 9(r_1 - r_2)^4$$

e non divengono mai indeterminati, finchè $r_1^2 + r_2^2 \neq 0$).

§ 3.

Linee assiali caratteristiche ed assi caratteristici di una superficie.

7. Le espressioni (21) conservano significato anche per $a = 0$ e si iducono a

31)
$$\begin{cases} h_1^* = \dfrac{1}{G}\,\dfrac{r_1^2 r_2^2}{r_1 - r_2}\left[\dfrac{1}{r_2}\,\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{r_1}\right) - \left(\dfrac{2}{r_2} + \dfrac{1}{r_1}\right)\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{r_2}\right)\right], \\ h_2^* = \dfrac{1}{E}\,\dfrac{r_1^2 r_2^2}{r_1 - r_2}\left[\dfrac{1}{r_1}\,\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{r_2}\right) - \left(\dfrac{2}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}\right)\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{r_1}\right)\right]; \end{cases}$$

h_1^*, h_2^* definiscono quindi un asse, che dirò *caratteristico*, posizione limite dell' asse della corrispondenza fra S ed S_a in P per $a \to 0$: brevemente, ' asse caratteristico è quello relativo alla corrispondenza fra S e la superficie parallela infinitamente vicina. Le linee assiali associate a questi assi i diranno *linee assiali caratteristiche.*

Se le superficie focali non si riducono a curve si possono applicare le (28) che insieme alle (6) danno

$$(32)\qquad \begin{cases} h_1^* = -\dfrac{r_1}{\sqrt{G}}\dfrac{r_2}{\varrho_2}\left[\dfrac{1}{K_1}\dfrac{1}{(r_1-r_2)^2}\dfrac{r_2}{r_1^2}+\dfrac{2}{r_2}+\dfrac{1}{r_1}\right], \\ h_2^* = -\dfrac{r_2}{\sqrt{E}}\dfrac{r_1}{\varrho_1}\left[\dfrac{1}{K_2}\dfrac{1}{(r_1-r_2)^2}\dfrac{r_1}{r_2^2}+\dfrac{2}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}\right], \end{cases}$$

ove i fattori esterni alle [ ], e i coefficienti di r_2/r_1^2, r_1/r_2^2 sono invarianti nel passaggio da una superficie ad una sua parallela.

Una forma anche più espressiva di h_1^*, h_2^* si ottiene introducendo le curvature geodetiche delle linee assiali caratteristiche tangenti alle linee di curvatura, $1/\varrho_1^*$, $1/\varrho_2^*$.

Dalla formola che dà la curvatura geodetica

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\frac{Gv'}{\sqrt{E+Gv'^2}} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{E}{\sqrt{E+Gv'^2}}\right\}$$

applicata per $v'=0$ e, a norma delle (22) e (32), per $v''=Lh_1^*-\left\{\begin{smallmatrix}11\\2\end{smallmatrix}\right\}$ si ha

$$(33)\qquad \frac{1}{\varrho_2^*} = \frac{1}{\varrho_2}\left[\frac{1}{K_1}\frac{1}{(r_1-r_2)^2}\frac{r_2}{r_1}+2\frac{r_2}{r_1}+1\right]$$

quindi

$$(34)\qquad h_1^* = -\frac{r_2}{\varrho_2^*}\frac{1}{\sqrt{G}}\,; \qquad h_2^* = -\frac{r_1}{\varrho_1^*}\frac{1}{\sqrt{E}}\,.$$

L'importanza delle ultime relazioni sta in ciò che la conoscenza in P delle curvature geodetiche delle linee assiali caratteristiche tangenti a quelle di curvatura, o, ciò che fa lo stesso, dell'asse caratteristico in P permette di ricavare le curvature in P_1 e in P_2 delle superficie focali $S_1 S_2$ cioè due invarianti relativi alla congruenza delle normali. In altri termini la conoscenza di K_1 e di K_2 (invece che con costruzioni a distanza finita) può ricavarsi con sole costruzioni eseguite sulla superficie S e sulla superficie parallela infinitamente vicina: essendosi ridotte le costruzioni da farsi nell'infinitesimo esse sono ancora applicabili ad una congruenza normale di geodetiche in uno spazio a metrica Riemanniana qualsiasi [4]).

8. Possiamo anche trovare il luogo degli assi caratteristici uscenti dai punti di una retta della congruenza. Le equazioni dell'asse caratteristico relativo al punto P_a sono $h_{1/a}^* H_a + H_{1/a} = 0$ e $h_{2/a}^* H_a + H_{2/a} = 0$ essendo $h_{1/a}^*$ ed $h_{2/a}^*$ ciò che diventano h_1^* e h_2^* sostituendo ad r_1 e r_2 r_1+a e r_2+a. Si trova

$$(35)\qquad \begin{cases} h_{1/a}^* = \dfrac{r_1^2 r_2^2}{r_1-r_2}\dfrac{1}{G}\dfrac{1}{1+a/r_1}\left[\lambda\dfrac{1}{r_2}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{r_1}\right)-\left(\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{2}{r_2}\dfrac{1}{\lambda}\right)\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{r_2}\right)\right], \\ h_{2/a}^* = \dfrac{r_1^2 r_2^2}{r_1-r_2}\dfrac{1}{E}\dfrac{1}{1+a/r_2}\left[\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{1}{r_1}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{r_2}\right)-\left(\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{2}{r_1}\lambda\right)\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{r_1}\right)\right] \end{cases}$$

[4]) Della corrispondenza fra superficie parallele in una V_3 di Riemann mi occuperò altrove.

cchè, tenendo conto delle (17), le equazioni dell'asse caratteristico
cente dal punto P_a sono

$$6)\quad \begin{cases} r_1^2 r_2^2 \left[\frac{\lambda}{r_2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r_1}\right) - \left(\frac{1}{r_1}+\frac{2}{r_2}\frac{1}{\lambda}\right)\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r_2}\right)\right](H-a\Omega)+(r_1-r_2)GH_1=0, \\ r_1^2 r_2^2 \left[\frac{1}{\lambda r_1}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{r_2}\right) - \left(\frac{1}{r_2}+\frac{2}{r_1}\lambda\right)\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{r_1}\right)\right](H-a\Omega)+(r_1-r_2)EH_2=0. \end{cases}$$

L'eliminazione di a fra queste equazioni fornisce la rigata, algebrica,
ogo degli assi lungo la normale in P.

9. Due di questi assi meritano considerazione: quelli che si ottengono
er $a=-r_1$ e per $a=-r_2$; le equazioni precedenti (36) danno con-
rdemente $H+r_1\Omega=0$, $H+r_2\Omega=0$. Ma se si forma la combinazione
$h^*_{1/a}H_{2/a}-h^*_{2/a}H_{1/a}=0$ e poi si fa tendere $a\to -r_1, -r_2$ si ottengono
spettivamente le equazioni dei due piani

$$37)\quad \begin{cases} 2K_1(r_1-r_2)^2\frac{\varrho_2}{r_2}\frac{r_1}{\varrho_1}\frac{H_1}{\sqrt{E}}+\frac{H_2}{\sqrt{G}}=0, \\ \frac{H_1}{\sqrt{E}}+2K_2(r_1-r_2)^2\frac{\varrho_1}{r_1}\frac{r_2}{\varrho_2}\frac{H_2}{\sqrt{G}}=0 \end{cases}$$

oè sono individuate le posizioni limiti dell'asse caratteristico quando P_a
nde ad uno dei centri di curvatura (assi limiti); esse, e soltanto esse,
no normali alla retta descritta da P_a rispettivamente in P_1 e P_2; e i
ani che le contengono e passano per P_1P_2 sono dati dalle (37). Le
ngenti degli angoli che questi piani formano con i rispettivi piani focali
curvatura (e che bastano ad individuare quegli assi) sono

$$38)\qquad 2K_1(r_1-r_2)^2\frac{\varrho_2}{r_2}\frac{r_1}{\varrho_1}; \qquad 2K_2(r_1-r_2)^2\frac{\varrho_1}{r_1}\frac{r_2}{\varrho_2}$$

la tangente del loro angolo vale

$$39)\qquad \frac{(r_1-r_2)^2}{2}\,\frac{4K_1K_2-\frac{1}{(r_1-r_2)^4}}{K_1\frac{\varrho_2}{r_2}\frac{r_1}{\varrho_1}+K_2\frac{\varrho_1}{r_1}\frac{r_2}{\varrho_2}}$$

ve tutto è espresso per mezzo di invarianti, relativi alla congruenza normale
significato noto.

La conoscenza dei due assi limiti (relativi ai centri di curvatura) o
ei piani normali che li contengono determina K_1 e K_2 quindi gli assi
aratteristici relativi ad una superficie qualunque ortogonale alla con-
uenza. I piani considerati coincidono solo per le superficie definite da

$$40)\qquad 1/K_1K_2=4(r_1-r_2)^4$$

sono ortogonali per quelle per le quali

$$41)\qquad \frac{K_1}{K_2}=-\left(\frac{\varrho_1}{r_1}\frac{r_2}{\varrho_2}\right)^2.$$

§ 4.

Superficie d' area minima.

10. Applichiamo i risultati precedenti ad una superficie d'area minima S. Poniamo $r = r_1 = -r_2$. Si ha per l'asse caratteristico

$$(42) \qquad h_1^* = \frac{1}{G}\frac{\partial r}{\partial v}, \qquad h_2^* = \frac{1}{E}\frac{\partial r}{\partial u},$$

$$(43) \begin{cases} Lh_1^* - \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = 3\frac{E}{G}\frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v}; & Nh_2^* = -3\frac{G}{E}\frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u}, \\ Lh_2^* + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} - 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial u}; & Nh_1^* - \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} + 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = -\frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial v} \end{cases}$$

quindi le linee assiali caratteristiche sono definite da

$$(44) \qquad v'' = -3\frac{G}{E}\frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u}v'^3 - \frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial v}v'^2 + \frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial u}v' + 3\frac{E}{G}\frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v}$$

I coseni direttori dell'asse caratteristico rispetto alle tangenti di curvatura e alla normale in P sono proporzionali a $-dr/ds_1$, dr/ds_2, quindi quelli della sua proiezione ortogonale sul piano tangente a $-dr/ds_1$ e dr/ds_2 (indicando con ds_1 e ds_2 gli elementi d'arco delle linee di curvatura uscenti da P). I coseni direttori della tangente in P alla linea $r = \text{cost.}$ che vi passa (sempre rispetto alle tangenti di curvatura) sono proporzionali a dr/ds_2, $-dr/ds_1$: quindi le due rette nominate sono simmetriche rispetto alle bisettrici delle tangenti di curvatura, cioè rispetto alle tangenti asintotiche. Quindi:

Le linee inviluppate su S dalle proiezioni ortogonali degli assi caratteristici sui piani tangenti (*o, in altri termini, le linee inviluppate dalle geodetiche di S osculatrici alle linee assiali caratteristiche*) *sono simmetriche, rispetto alle linee asintotiche, delle linee sulle quali* $r = \text{cost.}$

Questa proprietà, insieme alla conoscenza dell'angolo che l'asse caratteristico forma con la normale, determina l'asse stesso.

In fine le tangenti degli angoli che i piani normali contenenti gli assi limiti formano con i piani focali di curvatura sono dati $-2\varrho_2/\varrho_1$, $-2\varrho_1/\varrho_2$, cioè dipendono unicamente dal rapporto delle curvature geodetiche delle linee di curvatura.

(Eingegangen am 19. März 1925.)

Über den analytischen Charakter der Minimalflächen.

Von

Tibor Radó in Szeged (Ungarn).

Die Theorie der Minimalflächen bildet bekanntlich eines der glänzend-
en Beispiele der Anwendung des Imaginären in der Geometrie. Die An-
endbarkeit des Imaginären auf diese Theorie hat aber zur wesentlichen
oraussetzung, daß die zu untersuchenden Flächen *analytisch* sind, eine
nnahme, die in Anbetracht der geometrischen Erklärung, oder besser Er-
lärungen, dieser Flächenklasse zunächst ganz willkürlich erscheint. Zur Recht-
rtigung dieser Annahme muß man die beiden folgenden Fragen beantworten:

A. *Ist jede einmal stetig differenzierbare Fläche, die bei gegebener
egrenzung möglichst kleinen Flächeninhalt hat, analytisch?*

B. *Ist jede zweimal stetig differenzierbare Fläche, deren mittlere
rümmung identisch verschwindet, analytisch?*

Würde man bei A. die Fläche *zweimal* stetig differenzierbar voraus-
tzen, so könnte man auf die übliche Weise sofort schließen, daß ihre
ittlere Krümmung identisch verschwindet[1]). Diese Voraussetzung würde
dessen der Natur der Sache widersprechen, wir haben diese Voraus-
tzung auch nicht gemacht, und es ist deswegen nicht mehr möglich,
auf B. zurückzuführen.

Die Fragen A. und B. gehören allgemeinen Problemkreisen der Variations-
chnung[2]) und der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter
rdnung vom elliptischen Typus an. Die bejahende Antwort auf B. folgt
mittelbar aus tiefliegenden allgemeinen Sätzen[3]); A. ist bisher meines

[1]) Siehe etwa O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig und
erlin: B. G. Teubner (1909), S. 657.

[2]) Vgl. die Einleitung der Arbeit des Herrn A. Haar, Über die Variation der
ppelintegrale, Journal f. Math. 149, S. 1–18.

[3]) Vgl. den Encyklopädieartikel von L. Lichtenstein, Neuere Entwicklung der
eorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus
I C 12), S. 1320–1324.

Wissens nicht erledigt. Ich möchte nun in dieser Note darauf aufmerk sam machen, daß man beide Fragen in der einfachsten Weise direkt be antworten kann[4]).

Wir werden, um A. zu beantworten, von einem Resultate des Herr A. Haar ausgehen, nach welchem bei gewissen allgemeinen Klassen vo zweidimensionalen Variationsproblemen ein System von partiellen Diff rentialgleichungen *erster* Ordnung für die Extremalen aufgestellt werde kann, *ohne irgendwelche Voraussetzungen über die Existenz der Ableitunge zweiter Ordnung*[5]). Die weiteren Überlegungen sind dann ganz elementar sie beruhen auf der Erkenntnis, daß gewisse wohlbekannte Sätze in de Theorie der Minimalflächen ohne Verwendung der Ableitungen zweiter Or nung bewiesen werden können.

Die bejahende Antwort auf B. folgt im Wesentlichen bereits aus de üblichen flächentheoretischen Überlegungen, wobei indessen die Punkte, i welchen die Gaußsche Krümmung der Fläche verschwindet, eine Au nahmerolle spielen. Die bei A. angewendete Methode gestattet, ohne An wendung allgemeiner Sätze die Sonderstellung dieser Punkte zu beseitige

1. Wir wollen also beweisen, daß *jede einmal stetig differenzierba Fläche, die bei gegebener Begrenzung möglichst kleinen Flächeninhalt b sitzt, analytisch ist*, d. h. in der Umgebung eines jeden ihrer inner Punkte, nach passender Wahl eines rechtwinkligen Koordinatensystems, der Form $z = z(x, y)$ dargestellt werden kann, wobei $z(x, y)$ eine an lytische Funktion ihrer Argumente bedeutet. Indem wir die in der Ei leitung erwähnten allgemeinen Ergebnisse des Herrn A. Haar auf d vorliegenden Fall anwenden, erhalten wir für unsere Fläche die folgend *notwendigen Bedingungen*:

Sei P_0 ein innerer Punkt der Fläche F. Dann gibt es auf der Fläc eine Umgebung von P_0 von der folgenden Beschaffenheit. Bedeuten X, Y, die Richtungskosinusse der Flächennormalen in bezug auf ein passend wähltes rechtwinkliges Koordinatensystem $Oxyz$, so verschwinden d drei Kurvenintegrale

$$\text{(I)} \qquad \int X\,dy - Y\,dx, \quad \int Y\,dz - Z\,dy, \quad \int Z\,dx - X\,dz$$

für jede einfache geschlossene Kurve in dieser Umgebung.

---

[4]) Nachdem die vorliegende Note der Redaktion eingereicht war, erschien e wichtige Arbeit von Ch. H. Müntz, Die Lösung des Plateauschen Problems üb konvexen Bereichen, Math. Ann. 94, S. 53—96, in welcher unter anderem auch Frage B beantwortet wird, im wesentlichen nach der gleichen Methode wie hier. für Frage A entscheidende einfache Bemerkung, daß die nötigen Rechnungen im reiche der Ableitungen erster Ordnung durchgeführt werden können, kommt Herrn Müntz nicht vor (Anmerkung während der Korrektur, den 29. IV. 1925).

[5]) A. a. O. [2]).

Das Koordinatensystem sei nämlich so gewählt, daß die Flächennormale im Punkte P_0 mit keiner der Koordinatenebenen parallel ist. Dann kann die Fläche in einer hinreichend kleinen Umgebung dieses Punktes in jeder der drei Formen $z = z(x, y)$, $x = x(y, z)$, $y = y(z, x)$ dargestellt werden. Wir grenzen in dieser Umgebung durch eine geschlossene Kurve C ein den Punkt P_0 enthaltendes Stück F_0 der Fläche F ab und betrachten zunächst die Darstellung $z = z(x, y)$.

Seien F_0', C' die Projektionen von F_0, C in der xy-Ebene. Wir setzen in üblicher Weise

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad W = (1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Es sind nach Voraussetzung p und q stetige Funktionen von x, y in F_0'. Ist dann Γ eine geschlossene Kurve auf F_0, Γ' ihre Projektion in F_0', so hat das Kurvenintegral

$$\int_{\Gamma} X\,dy - Y\,dx$$

denselben Wert wie das Kurvenintegral

$$\int_{\Gamma'} X\,dy - Y\,dx,$$

wobei X und Y als Funktionen von x und y zu betrachten sind. Dies folgt unmittelbar aus der Erklärung der Kurvenintegrale. Beachten wir die Formeln

$$X = -\frac{p}{W}, \quad Y = -\frac{q}{W},$$

so haben wir demnach zu zeigen, daß das Kurvenintegral

$$\int \frac{p}{W}\,dy - \frac{q}{W}\,dx$$

für jede geschlossene Kurve in F_0' verschwindet. Nun ergibt die allgemeine Methode der Variationsrechnung in Verbindung mit den erwähnten Resultaten des Herrn A. Haar in unserem besonderen Falle gerade diese Beziehung für die Extremalfläche F. Der Vollständigkeit wegen wollen wir den Gedankengang doch kurz andeuten.

Sei $\zeta(x, y)$ eine in F_0' einmal stetig differenzierbare Funktion, welche am Rande C' von F_0' nebst ihren Ableitungen erster Ordnung verschwindet, und ε sei ein kleiner Parameter. Ersetzen wir das Stück F_0 unserer Fläche durch ein Flächenstück, gegeben durch

$$z_1(x, y) = z(x, y) + \varepsilon\,\zeta(x, y),$$

so haben wir, nach Voraussetzung, den Flächeninhalt nicht verkleinert. Das Integral

$$J(\varepsilon)=\iint_{F_0'}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}+\varepsilon\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}dx\,dy,$$

welches den Flächeninhalt des variablen Flächenstückes darstellt, hat hier nach für $\varepsilon=0$ ein Minimum, es muß also $\frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon}$ für $\varepsilon=0$ verschwinden. Rechnet man dies aus, so ergibt sich:

$$\iint_{F_0'}\left(\frac{p}{W}\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\frac{q}{W}\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)dx\,dy=0.$$

Dieses Doppelintegral verschwindet also für jede in F_0' einmal stetig differenzierbare Funktion $\zeta(x,y)$, die am Rande C' von F_0' nebst ihren Ableitungen erster Ordnung verschwindet. Dann folgt aber nach Herrn A. Haar[6]) das Verschwinden des Kurvenintegrals

$$\int\frac{p}{W}dy-\frac{q}{W}dx$$

für jede geschlossene Kurve in F_0'.

Wendet man dieselbe Schlußweise noch zweimal an, indem man von den Darstellungen $x=x(y,z)$ und $y=y(z,x)$ der Fläche F in der Umgebung des Punktes P_0 ausgeht, so erhält man die angekündigten notwendigen Bedingungen.

2. Wir legen der weiteren Betrachtung die Darstellung $z=z(x,y)$ zugrunde. Dann ist $z(x,y)$ in einem gewissen Quadrate $\mathfrak{Q}$ der xy-Ebene einmal stetig differenzierbar. Die notwendigen Bedingungen besagen dann, daß

$$dz=p\,dx+q\,dy,\qquad X=-\frac{p}{W},\qquad Y=-\frac{q}{W},\qquad Z=\frac{1}{W}$$

ist, daß die drei Kurvenintegrale

$$\text{(II)}\qquad \int\frac{q}{W}dx-\frac{p}{W}dy,\quad \int\frac{pq}{W}dx+\frac{1+q^2}{W}dy,\quad \int\frac{1+p^2}{W}dx+\frac{pq}{W}dy$$

---

[6]) Siehe das *Theorem* l. c. [2]), S. 2. Dort wird etwas mehr gefordert, daß nämlich das Doppelintegral für jede einmal stetig differenzierbare Funktion $\zeta(x,y)$ verschwinden soll, die am Rande verschwindet, also nicht nur, wie bei uns, für solche $\zeta(x,y)$, die am Rande nebst ihren Ableitungen erster Ordnung verschwinden. Daß aber das Haarsche Theorem auch in dem von uns benützten Umfange gilt, geht einfach daraus hervor, daß Herr Haar beim Beweise nur solche Funktionen $\zeta(x,$ verwendet, die in einem zweifach zusammenhängenden, an den Rand anschließenden Streifen identisch verschwinden, deren Ableitungen also am Rande sicher verschwinden — Ein sehr einfacher Beweis des Haarschen Theorems findet sich bei L. Lichtenstein Bemerkungen über das Prinzip der virtuellen Verrückungen usw., Annales de la Société Polonaise de Math. 1924, insbes. S. 27—28.

ür jede geschlossene Kurve in $\mathfrak{Q}$ verschwinden[7]). Daraus folgt aber die Existenz dreier in $\mathfrak{Q}$ eindeutiger Funktionen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, für welche die Beziehungen gelten:

$$\text{III)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} &= \frac{q}{W}, & \frac{\partial \omega_1}{\partial y} &= -\frac{p}{W}, \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial x} &= \frac{pq}{W}, & \frac{\partial \omega_2}{\partial y} &= \frac{1+q^2}{W}, \\ \frac{\partial \omega_3}{\partial x} &= \frac{1+p^2}{W}, & \frac{\partial \omega_3}{\partial y} &= \frac{pq}{W}. \end{aligned}$$

Wir führen nun neue Veränderliche α, β durch die Formeln

$$\text{IV)} \qquad \begin{aligned} \alpha &= x, \\ \beta &= \omega_2(x, y) \end{aligned}$$

in; für die Funktionaldeterminante erhalten wir:

$$\text{V)} \qquad \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial \omega_2}{\partial y} = \frac{1+q^2}{W} \neq 0.$$

Offenbar wird das Innere des Quadrates $\mathfrak{Q}$ umkehrbar eindeutig auf ein gewisses Gebiet in der $\alpha\beta$-Ebene abgebildet; dies folgt unmittelbar aus dem Umstande, daß $\alpha = x$ ist und wegen $\frac{\partial \beta}{\partial y} > 0$ die Funktion $\beta(x, y)$ auf jeder Strecke $x =$ konst. sich monoton ändert. Ist nun $\mathfrak{D}$ das Bildgebiet des Quadrates $\mathfrak{Q}$ in der $\alpha\beta$-Ebene, so sind zunächst x und y in $\mathfrak{D}$ einmal stetig differenzierbare Funktionen von α, β und man erhält nach den bekannten Formeln für implizite Funktionen, unter Beachtung der Beziehungen (III):

$$\text{VI)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \alpha} &= 1, & \frac{\partial x}{\partial \beta} &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} &= -\frac{pq}{1+q^2}, & \frac{\partial y}{\partial \beta} &= \frac{W}{1+q^2}. \end{aligned}$$

Weiter hat man:

$$\text{VII)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \alpha} &= p\frac{\partial x}{\partial \alpha} + q\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{p}{1+q^2}, \\ \frac{\partial z}{\partial \beta} &= p\frac{\partial x}{\partial \beta} + q\frac{\partial y}{\partial \beta} = \frac{qW}{1+q^2}. \end{aligned}$$

Wir berechnen noch die Ableitungen der Funktionen ω_1, ω_3 nach α, β; wir erhalten

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha}$$

---

[7]) Wir erinnern daran, daß Lagrange selbst die notwendigen Bedingungen, die er für die Minimalflächen erhielt, in der Weise gedeutet hatte, daß $X\,dy - Y\,dx$, $Y\,dz - Z\,dy$, $Z\,dx - X\,dz$ vollständige Differentiale sind. Die geometrische Deutung durch das identische Verschwinden der mittleren Krümmung erfolgte erst später durch Meusnier (vgl. die geschichtliche Übersicht bei Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces **1**, S. 267).

usw., also auf Grund von (III), (VI):

$$\text{(VIII)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha} &= \frac{qW}{1+q^2}, & \frac{\partial \omega_1}{\partial \beta} &= -\frac{p}{1+q^2}, \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha} &= \frac{W}{1+q^2}, & \frac{\partial \omega_2}{\partial \beta} &= \frac{pq}{1+q^2}. \end{aligned}$$

Die Vergleichung mit den Formeln (VI) und (VII) ergibt:

$$\text{(IX)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha} &= \frac{\partial z}{\partial \beta}, & \frac{\partial \omega_1}{\partial \beta} &= -\frac{\partial z}{\partial \alpha}, \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha} &= \frac{\partial y}{\partial \beta}, & \frac{\partial \omega_2}{\partial \beta} &= -\frac{\partial y}{\partial \alpha}. \end{aligned}$$

Es genügen also die Funktionenpaare $\omega_2(\alpha, \beta)$, $y(\alpha, \beta)$ und $\omega_1(\alpha, \beta)$, $z(\alpha, \beta$ den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Die einmal steti differenzierbaren Lösungen dieser Gleichungen sind aber bekanntlich ana lytisch. Wir haben also gefunden, daß $y(\alpha, \beta)$ und $z(\alpha, \beta)$ analytische und zwar harmonische Funktionen sind; wegen $x = \alpha$ gilt dies natürlich auch für x. Da $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)}$ nach (V) gleich $\frac{W}{1+q^2}$, also von Null verschiede ist, so ergibt sich, durch Elimination der Hilfsvariablen α und β, z al analytische Funktion von x und y, auf Grund bekannter Sätze über im plizite Funktionen. Damit ist unser Satz bewiesen.

3. Wir wollen noch den *geometrischen Sinn* dieser Überlegung an deuten. Obwohl kein einziger flächentheoretischer Satz explizite heran gezogen wurde, so haben wir im Grunde doch geometrisch geschlossen Die ganze Rechnung, die wir entwickelt haben, ist nämlich offenbar weite nichts als die direkte Verifikation altbekannter flächentheoretischer Sätze Zunächst sieht man, daß die Parameterlinien $\alpha =$ konst. die Schnittkurve der vorgelegten Minimalfläche mit den parallelen Ebenen $x =$ konst. sind dann folgt weiter aus (VI) und (VII) durch Ausrechnen:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} = 0.$$

Es sind hiernach α, β isotherme Parameter; wir erhalten den Riemann schen Satz, daß die Minimalfläche durch jede Schar paralleler Ebenen i den Kurven einer Isothermenschar geschnitten wird. Wenn aber α, isotherme Parameter sind, so sind $x(\alpha, \beta)$, $y(\alpha, \beta)$, $z(\alpha, \beta)$ harmonisch Funktionen, wieder auf Grund eines bekannten Satzes; dies ist ja die Ta sache, auf welche Weierstraß seine Theorie der Minimalflächen gegründe hatte. In unseren Entwicklungen dürfte vielleicht neu sein, daß wir die Sätze *ohne Verwendung der Ableitungen zweiter Ordnung* bewiesen habe

4. Wir haben noch zu zeigen, daß *jede zweimal stetig differenzierbare Fläche, deren mittlere Krümmung identisch verschwindet, analytisch ist.* Stellt man ein Stück der Fläche in der Form $z = z(x, y)$ dar, so genügt $z(x, y)$ bekanntlich der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0.$$

Man erhält dann durch Ausrechnen:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{W}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{p}{W}\right) = \frac{1}{W^3}[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{pq}{W}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+q^2}{W}\right) = \frac{p}{W^3}[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1+p^2}{W}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{pq}{W}\right) = -\frac{q}{W^3}[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t] = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt wiederum die Existenz dreier Hilfsfunktionen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, für welche die Beziehungen (III) bestehen, und man kann daher die weiteren Schlüsse ohne jede Änderung übernehmen.

Szeged, den 19. März 1925.

(Eingegangen am 21. März 1925.)

Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen. II.

Von

H. Weyl in Zürich.

Kapitel II.

Die Darstellungen der Komplexgruppe und der Drehungsgruppe

§ 1.

Das einzelne Element der Komplexgruppe. Die unitäre Beschränkung

Unter der *Komplexgruppe* verstehe ich den Inbegriff $\mathfrak{c}$ aller homogenen linearen Transformationen, welche eine nicht-ausgeartete schiefsymmetrische Bilinearform zweier willkürlicher Vektoren ungeändert lassen. Nur in einem Raum $\mathfrak{r}$ von gerader Dimensionszahl $2n$ existieren solche Formen; und wenn wir die Komponenten eines Vektors x mit x_1, x_1', $x_2, x_2', \ldots, x_n, x_n'$ bezeichnen, so können wir annehmen, daß jene Form das „schiefe Produkt" der beiden willkürlichen Vektoren x und y, die Gestalt hat:

$$(1) \qquad S(xy) = (x_1 y_1' - x_1' y_1) + (x_2 y_2' - x_2' y_2) + \ldots + (x_n y_n' - x_n' y_n).$$

Die Multiplikatoren einer zu $\mathfrak{c}$ gehörigen Transformation t sind paarweise zueinander reziprok. Denn geht durch t der Vektor $e_1 \neq 0$ über in $\varepsilon \cdot e_1$, so kann man e_1 zu einem *normalen* Koordinatensystem ergänzen, d. h. einem solchen, in welchem das schiefe Produkt die Normalform (1) hat. Wird t in diesem Koordinatensystem beschrieben durch:

$$\begin{cases} e_1 \to \varepsilon\, e_1, \\ e_1' \to * e_1 + \varepsilon'\, e_1' + \ldots, \\ e_2 \to * e_1 + \alpha_2\, e_1' + \ldots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n' \to * e_1 + \alpha_n'\, e_1' + \ldots, \end{cases}$$

liefert die Forderung, daß die Gleichungen

$$S(e_1 e_1') = 1; \quad S(e_1 e_2) = 0, \ \ldots, \ S(e_1 e_n') = 0$$

ei t bestehen bleiben sollen, die Beziehungen

$$\varepsilon\varepsilon' = 1; \quad \alpha_2 = \ldots = \alpha_n' = 0.$$

nfolge des Verschwindens der α enthält das charakteristische Polynom $\zeta) = |e - \zeta t|$ den Faktor

$$(1 - \varepsilon\zeta)(1 - \varepsilon'\zeta) = (1 - \varepsilon\zeta)(1 - \varepsilon^{-1}\zeta).$$

ie Fortsetzung der eingeleiteten Schlußweise führt zu

Satz 1. *Die Multiplikatoren einer zu der Komplexgruppe gehörigen ransformation t sind paarweise zueinander reziprok. Der Matrix von t nn in einem geeigneten normalen Koordinaten-stem die nebenstehende Gestalt verliehen werden.*

ie befolgte Reihenfolge der Variablen ist

) $\quad x_1, x_2, \ldots, x_n; \ x_1', x_2', \ldots, x_n',$

nd nur an den mit einem * bezeichneten Stellen nden sich von 0 verschiedene Glieder. In der auptdiagonale stehen die Multiplikatoren von t. *nd die Multiplikatoren alle voneinander ver-hieden, so ist t innerhalb* c *sogar mit der Diagonalmatrix* (ε) *seiner ultiplikatoren konjugiert.*

Der Beweis der letzten Verschärfung erfordert die Konstruktion einer atrix u in c, welche die Gleichung

) $\quad t = u^{-1}(\varepsilon)u$

füllt. Zunächst existiert überhaupt ein Koordinatensystem, in welchem e S invariant lassende Abbildung t mit lauter verschiedenen Multi-ikatoren durch die Matrix (ε) ausgedrückt wird. Geht S in diesem oordinatensystem in die schiefsymmetrische Form S^* über, so läßt die ansformation (ε), bei welcher jede Variable mit einem Faktor ε_i multi-iziert wird, die Form S^* ungeändert. Jeder Koeffizient von S^* multi-iziert sich aber durch diese Transformation mit einem Produkt zweier ε_i, d daraus folgt in Berücksichtigung der gemachten Voraussetzung über e Multiplikatoren, daß S^* die Gestalt haben muß:

) $\quad s_1(x_1 y_1' - x_1' y_1) + s_2(x_2 y_2' - x_2' y_2) + \ldots + s_n(x_n y_n' - x_n' y_n),$

o die zu zwei Variablen wie x_i, x_i' gehörigen Multiplikatoren $\varepsilon_i, \varepsilon_i'$ zu-nander reziprok sind. Die Form ist nicht-ausgeartet, also sind alle $\neq 0$. Die Normalform (ε) der Abbildung t wird nicht zerstört, wenn der der Grundvektoren des neuen Koordinatensystems mit einer will-

kürlichen von 0 verschiedenen Konstanten multipliziert wird; infolgedessen kann noch dafür gesorgt werden, daß in (4) die Koeffizienten s_i alle gleich 1 sind. Dann ist $S^* = S$, das neue Koordinatensystem ist wie das alte ein normales, und die Transformation u, welche den Übergang von dem einen zum andern vermittelt, gehört zu $\mathfrak{c}$.

Die Gruppe der in $\mathfrak{c}$ enthaltenen unitären Transformationen werde mit $\mathfrak{c}_u$ bezeichnet. Innerhalb $\mathfrak{c}_u$ gilt die Gleichung (3) ausnahmslos:

Satz 2. *Innerhalb der unitär beschränkten Komplexgruppe $\mathfrak{c}_u$ ist jedes Element t mit der Diagonalmatrix seiner Multiplikatoren konjugiert.*

Die Multiplikatoren ε_i, $\varepsilon_i' = \frac{1}{\varepsilon_i} = \bar{\varepsilon}_i$ sind vom absoluten Betrag 1. Nehmen wir zunächst wieder an, daß sie alle untereinander verschieden sind, so ist es bekanntlich möglich, die Gleichung (3) durch eine unitäre Transformation u zu erfüllen. Da die Koeffizientenmatrix S der Form S mit der konjugiert-komplexen $\bar{S}$ multipliziert, die negative Einheitsmatrix $-e$ ergibt, gilt, wie man sofort sieht, dasselbe für S^*; darum sind die Koeffizienten s_i in (4) vom absoluten Betrag 1; und indem man z. B. die neuen Grundvektoren e_1', e_2', ..., e_n' mit geeigneten Konstanten vom absoluten Betrag 1 multipliziert, kann man alle s_i zu 1 machen, ohne den unitären Charakter des Koordinatensystems zu zerstören. — Der Satz überträgt sich auf *jedes* t, weil es zu einem Element von $\mathfrak{c}_u$ stets beliebig benachbarte gibt, die lauter verschiedene Multiplikatoren besitzen und weil die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{c}_u$, auf welcher u variiert, geschlossen ist.

Aber auch auf direktem algebraischen Wege kann man die Ausnahmefälle mit umfassen, wenn man sich stützt auf den

Hilfssatz. *Eine schiefsymmetrische Form S^* geht dann und nur dann aus sich durch eine unitäre Koordinatentransformation hervor, wenn ihre Koeffizientenmatrix selber unitär ist.*

Wie S selber muß jede aus S durch unitäre Transformation entstandene Form S^* der Gleichung genügen: $S^* \bar{S}^* = -e$. Berücksichtigt man die schiefe Symmetrie von S^*, so folgt daraus, daß die Koeffizientenmatrix von S^* unitär ist.

Es sei umgekehrt S^* eine schiefsymmetrische Form, deren Koeffizientenmatrix unitär ist; es gilt einzusehen, daß in einem unitären Koordinatensystem (das aus dem ursprünglichen durch eine unitäre Transformation hervorgeht) S^* die Normalform S annimmt. Die erste Zeile der Koeffizientenmatrix S^* laute:

$$s_1 = 0,\ s_2,\ s_3,\ \ldots .$$

Wir bilden die beiden Vektoren

$$e_1 = (1,\ 0,\ 0,\ \ldots),$$
$$e_1' = (\bar{s}_1,\ \bar{s}_2,\ \bar{s}_3,\ \ldots).$$

Sie sind zueinander unitär-orthogonal: die Quadratsumme der absoluten Beträge jeder der beiden Komponentenzeilen ist $= 1$, und die Produktsumme

$$1 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 + \ldots = 0 .$$

rum kann man e_1, e_1' durch Hinzunahme weiterer Vektoren $e_2, e_3, \ldots$ zu einem itären Koordinatensystem ergänzen. Da

$$S^*(e_1 e_1') = \varepsilon_1 \bar{\varepsilon}_1 + \varepsilon_2 \bar{\varepsilon}_2 + \varepsilon_3 \bar{\varepsilon}_3 + \ldots = 1$$

, verwandelt sich in diesem Koordinatensystem S^* in eine schiefsymmetrische rm S^{**}, deren unitäre Koeffizientenmatrix links oben die Zahl trägt

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

die Quadratsumme der absoluten Beträge in den beiden ersten Zeilen und Spalten r Matrix S^{**} gleich 1 sein muß, zerfällt sie notwendig in der aus (5) ersichtlichen eise. Damit ist der Beweis des Hilfssatzes durch vollständige Induktion eingeleitet.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ -1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ \hline 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & * \\ 0 & 0 & \end{array}\right) \qquad (6) \qquad \begin{array}{c} 1 \ldots n \quad 1' \ldots n' \\ \left(\begin{array}{c|c} 0 \ldots 0 & \\ \ldots\ldots & * \\ 0 \ldots 0 & \end{array}\right. \\ \left.\begin{array}{c|c} * & 0 \ldots 0 \\ & \ldots\ldots \\ & 0 \ldots 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Zusatz. *Hat die Matrix S^* von vornherein die Gestalt* (6), *so kann man die t den Nummern* $1, 2, \ldots, n$ *bezeichneten Grundvektoren beibehalten und braucht nur e andere Hälfte* $1', 2', \ldots, n'$ *unitär zu transformieren.*

Die zu c_u gehörige Matrix t läßt sich unter allen Umständen durch eine unitäre ansformation u in die Hauptmatrix (ε) ihrer Multiplikatoren überführen. In dem rch u neu eingeführten Koordinatensystem werde das schiefe Produkt durch die rm S^* dargestellt. Eine Rotte gleicher Multiplikatoren von t ist entweder von dem pus

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \quad [\text{dann ist auch } \varepsilon_1' = \varepsilon_2' = \varepsilon_3' \text{ und } \varepsilon_1 \neq \pm 1]$$

er von dem Typus

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' = \varepsilon_3 = \varepsilon_3' \ (= \pm 1).$$

jedem der beiden Fälle sondert sich aus der Matrix S^*, da die Form S^* invariant gegenüber der Transformation (ε), ein Quadrat von 6 bzw. 4 Zeilen ab, das zu n Koordinaten 1, 2, 3, 1′, 2′, 3′ bzw. 1, 1′, 2, 2′ gehört. Ihm kann man auf und des Hilfssatzes und seiner Ergänzung durch eine unitäre Transformation von e_2', e_3' bzw. von e_1, e_1', e_3, e_3' die Normalform verleihen. Damit ist gezeigt, daß die itäre Transformation u in (3) unter allen Umständen so normiert werden kann, ß sie S invariant läßt.

Eine zu c gehörige Diagonalmatrix (ε) besteht, wenn die Variablen der Reihenfolge (2) verwendet werden, aus den Gliedern

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n; \ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_n' \qquad (\varepsilon_i \varepsilon_i' = 1).$$

e ist innerhalb c zu derjenigen Diagonalmatrix konjugiert, die aus ihr tsteht durch Vertauschung der beiden Glieder ε_1 und ε_2 und die damit

verbundene Vertauschung von ε_1' mit ε_2'; ebenso bleibt sie in ihrer Klasse wenn man ε_1 mit ε_1' vertauscht. Das gleiche gilt innerhalb der unitär be schränkten Komplexgruppe $\mathfrak{c}_u$. Im letzteren Fall setzen wir noch

$$\varepsilon_i = e(\varphi_i), \qquad \varepsilon_i' = e(-\varphi_i)$$

und bezeichnen die reellen Größen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ als die Drehwinke von t, wenn t in $\mathfrak{c}_u$ zur selben Klasse gehört wie (ε). Die Klasse ände sich nicht, wenn man die Drehwinkel beliebig untereinander permutie oder in einigen von ihnen das Vorzeichen wechselt.

In der Gleichung (3) darf man u ersetzen durch $(\varepsilon^*)u$, ohne da t sich ändert; handelt es sich um die Gruppe $\mathfrak{c}_u$, so bedeutet (ε^*) hier eine beliebige zu $\mathfrak{c}_u$ gehörige Diagonalmatrix. Auch hier werden wir sage daß alle Elemente oder „Punkte" von $\mathfrak{c}_u$, welche aus einem, u, auf die Weise hervorgehen, die *Gerade* $[u]$ auf $\mathfrak{c}_u$ bilden; und wir werden durc Projektion, dadurch, daß wir alle Punkte von $\mathfrak{c}_u$ auf einer und derselbe Geraden in einen einzigen Punkt zusammenfallen lassen, eine Mannig faltigkeit $[\mathfrak{c}_u]$ von n reellen Dimensionen weniger erzeugen. — In de besonderen Falle aber, wo zwei Multiplikatoren einander gleich werde $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ oder $\varepsilon_1 = \varepsilon_1'$, läßt sich u in der Gleichung (3) von t sogar ersetze durch $s \cdot u$, wo s folgendermaßen gebaut ist:

1. Im ersten Fall $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\varepsilon_1' = \varepsilon_2'$ zerfällt s in zwei zu den Variable x_1, x_2 bzw. x_1', x_2' gehörige Quadrate (12), (12)′ von der Seitenlänge und $2(n-2)$ Quadrate von der Seitenlänge 1, die sich längs der Haup diagonale aneinanderreihen. In (12) steht eine beliebige zweireihige unitä Matrix, in (12)′ die zu ihr kontragrediente. Da eine unitäre Matrix zwei Variablen von 4 reellen Parametern abhängt, beträgt die Zahl d reellen Parameter $(n-2)+4 = n+2$ für die Gruppe der s, währe die Untergruppe der Hauptmatrizen (ε) in $\mathfrak{c}_u$ nur n-parametrig ist.

2. Im Falle $\varepsilon_1 = \varepsilon_1' = \pm 1$ zerfällt s in ein zu den Variablen x_1, gehöriges Quadrat (11′) von der Seitenlänge 2 und $2(n-1)$ Quadra von der Seitenlänge 1, die sich längs der Hauptdiagonale aneinanderreihe In (11′) steht eine beliebige unitäre Matrix von der Determinante 1. I eine solche von 3 Parametern abhängt, ist die Gruppe der s auch jet $(n+2)$-parametrig. So kommen wir zu dem für die Analysis situs d Mannigfaltigkeit $\mathfrak{c}_u$ fundamentalen Resultat:

Hilfssatz. *Innerhalb der Gruppe* $\mathfrak{c}_u$ *bilden die singulären* t, *der Multiplikatoren nicht alle voneinander verschieden sind, eine Mann faltigkeit von* 3 *Dimensionen weniger als* $\mathfrak{c}_u$.

Die Parameterzahl von $\mathfrak{c}_u$ selber ist, wie wir alsbald sehen werd gleich $n(2n+1)$.

§ 2.

Darstellungen der Komplexgruppe: Infinitesimaler Teil.

Eine infinitesimale Transformation

$$\left\{\begin{aligned} dx_i &= \sum_k \varrho_{ik} x_k + \sum_k \varrho'_{ik} x'_k, \\ dx'_i &= \sum_k \sigma'_{ik} x_k + \sum_k \sigma_{ik} x'_k \end{aligned}\right. \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

hört zu c dann und nur dann, wenn

$$\varrho_{ik} + \sigma_{ki} = 0, \quad \varrho'_{ik} \text{ symmetrisch} \quad \text{und} \quad \sigma'_{ik} \text{ symmetrisch}$$

. Die infinitesimale Komplexgruppe $\mathfrak{c}^0$ ist demnach eine lineare Schar von

$$n^2 + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(2n+1)$$

mplexen Parametern. Die allgemeine Hauptmatrix $h(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ in , deren Glieder mit

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n; \quad -\lambda_1, -\lambda_2, \ldots, -\lambda_n$$

zeichnet seien, durchläuft eine n-parametrige infinitesimale Abelsche ntergruppe von $\mathfrak{c}^0$. Bildet man aus h und dem Element c, Formel (7), n Kommutator $[hc] = hc - ch$, so erhält man die infinitesimale Trans- rmation mit der Koeffizientenmatrix

$\varrho_{ik}(\lambda_i - \lambda_k)$	$\varrho'_{ik}(\lambda_i + \lambda_k)$
$-\sigma'_{ik}(\lambda_i + \lambda_k)$	$\sigma_{ik}(-\lambda_i + \lambda_k)$

.

ls Wurzeln treten daher auf:

$= \pm \lambda_i \pm \lambda_k$ $(i < k$, alle vier Vorzeichenkombinationen) und $\alpha = \pm 2\lambda_i$.

an liest aus der Tabelle ohne weiteres ab, welches die zu diesen Wurzeln α hörigen Elemente e_α von $\mathfrak{c}^0$ sind; und wir bekommen analog zu den ompositionsformeln in § 2 des I. Kapitels:

$$[h\,h'] = 0, \quad [h\,e_\alpha] = \alpha \cdot e_\alpha, \quad [e_\alpha\, e_{-\alpha}] = h_\alpha.$$

abei ist h_α im Falle $\alpha = \pm \lambda_i \pm \lambda_k$ $(i < k)$ dasjenige h, für welches $= \pm 1$, $\lambda_k = \pm 1$, alle übrigen $\lambda = 0$ sind; im Falle $\alpha = \pm 2\lambda_i$ aber esitzt h_α die Parameterwerte: $\lambda_i = \pm 1$, die übrigen $\lambda = 0$. Der Wert gendeiner Linearform

$$\Lambda = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_n\lambda_n$$

für diese Parameterwerte wird wie in I, § 2 mit Λ_α bezeichnet; die No mierung ist bereits so getroffen, daß $\alpha_\alpha = 2$ wird. Man hat

$$\text{für } \alpha = \pm\lambda_i \pm \lambda_k\text{:} \quad \Lambda_\alpha = \pm m_i \pm m_k,$$
$$\text{für } \alpha = \pm 2\lambda_i\text{:} \quad \Lambda_\alpha = \pm m_i.$$

Wie dort gilt der Satz, daß für irgendeine Darstellung $\mathfrak{C}^0$ von $\mathfrak{c}^0$ neben auch immer $\Lambda' = \Lambda - \Lambda_\alpha \cdot \alpha$ als Gewicht auftritt, und daß Λ_α stets ein ganze Zahl ist. Darum müssen die Koeffizienten m_i eines Gewichtes ganz sein. Für die Wurzel $\alpha = 2\lambda_i$ besteht der Übergang von Λ zu Λ' darin, daß die eine Variable λ_i in $-\lambda_i$ verwandelt wird, für die Wurzel $\alpha = \lambda_i - \lambda_k$ $(i < k)$ aber in der Vertauschung von λ_i mit λ_k. Daß durch diese beiden Operationen aus einem vorkommenden Gewicht immer wieder ein Gewicht entsteht, erklärt sich aus der schon im vorigen Paragraphen erwähnten Tatsache, daß die Klasse einer zu $\mathfrak{c}$ gehörigen Hauptmatrix sich nicht ändert, wenn ε_i mit ε_k oder ε_i mit ε_i' vertauscht wird. Für das höchste vorkommende Gewicht ergeben sich daraus die Ungleichungen

$$m_i \geqq 0 \quad \text{und} \quad m_i \geqq m_k \quad \text{für} \quad i < k.$$

Indem wir das Ergebnis aus I, § 3 hinzunehmen, können wir zusammen fassen:

Satz 3. *Alle in einer Darstellung $\mathfrak{C}^0$ von $\mathfrak{c}^0$ vorkommenden Gewichte* (8) *haben ganzzahlige Koeffizienten m_i. Durch Vertauschung von λ_i mit λ_k oder Verwandlung von λ_i in $-\lambda_i$ geht aus einem Gewicht immer wieder ein Gewicht hervor. Die Koeffizienten des höchsten Gewichtes genügen den Ungleichungen*

$$(9) \qquad m_1 \geqq m_2 \geqq \ldots \geqq m_n \geqq 0.$$

Eine irreduzible Darstellung ist durch das höchste Gewicht eindeutig bestimmt.

$\mathfrak{c}$ selber mit dem höchsten Gewicht $\mu_1 = \lambda_1$ ist irreduzibel, da die vorkommenden Gewichte $\pm\lambda_i$ alle untereinander verschieden sind und auf jedem der Grundvektoren e_i, e_i' unseres Koordinatensystems im Raume alle andern durch Transformationen der Gruppe $\mathfrak{c}$ gewonnen werden können. Unter den Gewichten $\pm\lambda_i \pm \lambda_k$ der zweidimensionalen Grundvektoren welche durch äußere Multiplikation aus irgend zwei verschiedenen der e_i, hervorgehen, ist $\mu_2 = \lambda_1 + \lambda_2$ das höchste; doch sind jetzt nicht mehr alle vorkommenden Gewichte untereinander verschieden, da

$$e_1 \times e_1', \quad e_2 \times e_2', \quad \ldots, \quad e_n \times e_n'$$

das Gewicht 0 besitzen. Immerhin geht aus dem Gesagten hervor, daß sich eine irreduzible Darstellung mit dem höchsten Gewicht $\lambda_1 + \lambda_2$ nicht absondern lassen. Ebenso erweist man mit Hilfe der $3, \ldots, n$-dimen

onalen Vektoren von $\mathfrak{r}$ die Existenz je einer irreduziblen Darstellung mit em höchsten Gewicht

$$\mu_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \ \ldots, \ \mu_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n,$$

nd ist auch leicht imstande, diese vollständig zu kennzeichnen (vgl. S. 342). urch Komposition gewinnt man daraus eine irreduzible Darstellung mit em höchsten Gewicht

$$p_1\mu_1 + p_2\mu_2 + \ldots + p_n\mu_n,$$

o p_i irgendwelche nicht-negative ganze Zahlen bedeuten. Damit ist be-iesen: *Zu jeder Linearform Λ, deren Koeffizienten m_i ganzzahlig sind nd den Ungleichungen* (9) *genügen, existiert eine irreduzible Darstellung m* $\mathfrak{c}^0$, *deren höchstes Gewicht* $= \Lambda$ *ist.*

Nach der in I, § 4 geschilderten Konstruktionsmethode von Cartan uß sie dadurch gewonnen werden, daß man die kleinste lineare Mannig-ltigkeit $\mathfrak{R}$ bildet, welche den „Hypervektor"

$$e_1^{p_1}(e_1 \times e_2)^{p_2}(e_1 \times e_2 \times e_3)^{p_3} \ldots$$

nd alle daraus durch die Transformationen t von $\mathfrak{c}$ entstehenden enthält. reilich läßt sich die Methode erst durch das im nächsten Paragraphen uf integralem Wege bewiesene Ergebnis rechtfertigen, daß jede Darstellung on $\mathfrak{c}$ in irreduzible Darstellungen zerfällt.

Verwandelt t die Vektoren $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (um $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ haben wir uns nicht kümmern) nach der Tabelle:

$$\begin{cases} e_1 \to \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n + \xi_1' e_1' + \ldots + \xi_n' e_n', \\ e_2 \to \eta_1 e_1 + \ldots + \eta_n e_n + \eta_1' e_1' + \ldots + \eta_n' e_n', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

liefern die Invarianzforderungen $S(e_i e_k) = 0$ Relationen von dem Typus $(i = 1, k = 2)$:

$$S(\xi\eta) \equiv (\xi_1\eta_1' - \xi_1'\eta_1) + (\xi_2\eta_2' - \xi_2'\eta_2) + \ldots + (\xi_n\eta_n' - \xi_n'\eta_n) = 0.$$

ndern Beschränkungen sind die Koeffizienten des von uns benötigten Halbteils von t cht unterworfen. Das aus n Zeilen bestehende Schema $\{m\}$, Kap. I, § 4, besitze e Zeilenlängen

$$m_i = p_i + p_{i+1} + \ldots + p_n.$$

ieder werde $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \nu$ gesetzt. Hat $\{m\}$ z. B. die unten stehende Ge-alt $(\nu = 7)$, so ist die kleinste lineare Mannigfaltigkeit (f) von Tensoren 7. Stufe bilden, welche die Tensoren mit den Komponenten

$$\xi_{i_1} \cdot \xi_{i_2} \cdot \xi_{i_3} \cdot \eta_{k_1} \cdot \eta_{k_2} \cdot \zeta_{l_1} \cdot \zeta_{l_2}$$

thält; dabei sind die ξ, η, ζ irgendwelche Zahlen, welche den Bedingungen

$$S(\eta\zeta) = 0, \qquad S(\zeta\xi) = 0, \qquad S(\xi\eta) = 0$$

genügen. Auf einen willkürlichen Tensor f aus (f) ist dann die Alternation bezüg lich jeder Spalte des Schemas anzuwenden: die Mannigfaltigkeit der so erzeugte Tensoren ν-ter Stufe f^* ist das Substrat $\mathfrak{R}$ der gesuchten irreduziblen Darstellun von $\mathfrak{c}$ mit dem höchsten Gewicht $3\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3$. Das Resultat bedarf noch der ge naueren algebraischen Durcharbeitung durch Angabe eines Prozesses, der aus einer völlig willkürlichen Tensor ν-ter Stufe den allgemeinsten Tensor der Mannigfaltigkeit $(f$ hervorbringt[1]); im Augenblick würde sie uns aber zu weit vom Wege abführen.

Das infinitesimale Element (7) von $\mathfrak{c}$ gehört der unitär beschränkte Gruppe $\mathfrak{c}_u$ an, wenn

(10) $\varrho_{ik}+\bar{\varrho}_{ki}=0$ und damit auch $\sigma_{ik}+\bar{\sigma}_{ki}=0$, ferner $\sigma'_{ik}+\bar{\varrho}'_{ki}=$

gilt. Insbesondere wird $\varrho_{ii}=\lambda_i$ rein imaginär. Die Anzahl der reelle Parameter von $\mathfrak{c}_u$ ist demnach $=n(2n+1)$. Eine Linearform des wil kürlichen Elementes (7) von $\mathfrak{c}$ läßt sich auf eine und nur eine Weise i die Gestalt bringen

$$\sum_{ik}(a_{ik}\varrho_{ik}+b_{ik}\sigma_{ik}+a'_{ik}\varrho'_{ik}+b'_{ik}\sigma'_{ik}),$$

wo die Koeffizienten analogen Bedingungen genügen wie die Variablen:

$$a_{ik}+b_{ki}=0, \quad a'_{ik} \text{ symmetrisch}, \quad b'_{ik} \text{ symmetrisch}.$$

Verschwindet eine solche Form identisch, falls die Parameter den Ein schränkungen (10) genügen, so verschwindet sie überhaupt identisch. Den zunächst setze man $\varrho'_{ik}=\sigma'_{ik}=0$; es kommt $a_{ik}=0$, $b_{ik}=0$, we $\sum_{ik} a_{ik}\varrho_{ik}$ identisch verschwindet, falls es das unter der Einschränkung (10 tut. Die verbleibende Bedingung lautet

$$\sum_{ik} a'_{ik}\varrho'_{ik}+\sum_{ik} b'_{ik}\bar{\varrho}'_{ik})=0.$$

Man braucht hierin die willkürlichen symmetrischen Größen ϱ'_{ik} nur durc $\sqrt{-1}\cdot\varrho'_{ik}$ zu ersetzen, um auf das gesonderte Verschwinden beider Tei der letzten Summe zu schließen.

§ 3.

Darstellungen der Komplexgruppe: Integraler Teil.

Gilt der Satz von der vollen Reduzibilität für die Darstellungen d unitär beschränkten inf. Gruppe $\mathfrak{c}_u^0$, so gilt er nach der letzten Übe legung des vorigen Paragraphen auch für die ganze Gruppe $\mathfrak{c}^0$. Für aber wird er bewiesen durch die Hurwitz-Schursche Integrationsmethod Nur ist es nötig, sich zuvor davon zu überzeugen, *daß* $\mathfrak{c}_u$ *einfach z sammenhängend ist.*

---

[1]) Vgl. dazu J. A. Schouten, Der Ricci-Kalkül, Berlin 1924, S. 262.

Die geschlossene Kurve $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{c}_u$ gehe durch keines der singulären ...emente hindurch, die nach dem letzten Hilfssatz von § 1 eine Mannig...ltigkeit von drei Dimensionen weniger bilden. Für ein nicht-singuläres t mar...eren wir auf dem Einheitskreis die Multipli...torpunkte ε_i, ε_i' $(i = 1, 2, \ldots, n)$ und verbin...n das konjugierte Paar ε_i, ε_i' durch eine ...rtikale Strecke, welche die reelle Achse der Ebene im Punkte $P_i = \cos 2\pi\varphi_i$ trifft. ...ie Punkte P_i überholen sich nicht gegen...itig, sondern bewahren ihre Anordnung. ...ußerdem passieren ε_i, ε_i' niemals die Punkte ...1. Infolgedessen vollführen die vertikalen ...recken und auch die zugehörigen Punkte ..., ε_i' auf dem Einheitskreis lediglich Pende...ngen, die Winkelwerte φ_i kehren nach Durchlaufung der Kurve $\mathfrak{K}$ bei ...etiger Variation zu ihren Ausgangswerten zurück. Daraus folgt, daß sich $\mathfrak{K}$ ...etig in den Einheitspunkt zusammenziehen läßt. — Aus dem einfachen ...usammenhang von $\mathfrak{c}_u$ ergibt sich von neuem, daß die Gewichte (8) ganz...hlige Koeffizienten m_i besitzen müssen.

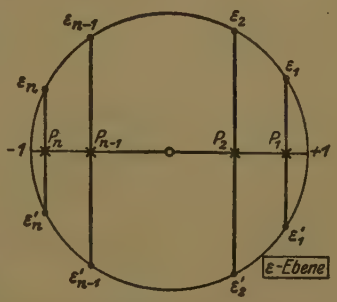


Fig. 1. Multiplikatoren von t.

Weiter haben wir nach dem Vorgehen von § 6 des I. Kapitels das ...olumen $d\Omega$ desjenigen Stücks von $\mathfrak{c}_u$ zu berechnen, auf welchem die ...emente t liegen, deren Drehwinkel dem Spielraum $\varphi_i \ldots \varphi_i + d\varphi_i$ an...hören. Wie dort bekommen wir aus (3) die Gleichung

$$1) \qquad u \cdot \delta t \cdot u^{-1} = \{\varepsilon \cdot \delta u \cdot (\varepsilon)^{-1} - \delta u\} + 2\pi\sqrt{-1}\, d\varphi .$$

ε ist die Hauptmatrix, welche aus den Gliedern $d\varphi_1, d\varphi_2, \ldots, d\varphi_n$; $d\varphi_1, -d\varphi_2, \ldots, -d\varphi_n$ besteht. Für ein beliebiges Element δt von $\mathfrak{c}_u^0$, ...rmel (7), können wir als unabhängige Komponenten verwenden[2]):

alle ϱ_{ik} und diejenigen ϱ_{ik}' und σ_{ik}', für welche $i \leqq k$ ist.

...an muß einsehen, daß der Übergang von δt zu $\delta^* t = u \cdot \delta t \cdot u^{-1}$ auf eine ...imodulare Substitution jener Komponenten hinauskommt. Für diesen ...chweis will ich hier eine bequemere Methode angeben als in Kap. I. ...läßt sich in die Form bringen

$$u = v^{-1}(\varepsilon^*)\, v,$$

...v und (ε^*) wieder zu $\mathfrak{c}_u$ gehören, (ε^*) aber eine Hauptmatrix ist. Es gilt

$$(v \cdot \delta^* t \cdot v^{-1}) = (\varepsilon^*)\,(v \cdot \delta t \cdot v^{-1})\,(\varepsilon^*)^{-1}.$$

[2]) An Stelle des Realteils und Imaginärteils von ϱ_{12} werden dabei z. B. ϱ_{12} und ...$\varrho_{12} = \varrho_{21}$ benutzt.

Nun ist $\delta t \to \delta^* t$ eine unimodulare Substitution, wenn der Übergang

$$v \cdot \delta t \cdot v^{-1} \to v \cdot \delta^* t \cdot v^{-1}$$

unimodular ist. Es kommt also nur darauf an, daß für eine *Haupt*
matrix (ε) von $\mathfrak{c}_u$ der Übergang

$$\delta t \to (\varepsilon) \cdot \delta t \cdot (\varepsilon)^{-1} \tag{12}$$

eine unimodulare Substitution ist. Dies ist bereits dafür erforderlich, da
in der Mannigfaltigkeit $[\mathfrak{c}_u]$ überhaupt eine independente Volummessun
zustande kommt. Durch (12) verwandeln sich, da $\varepsilon_i' = \frac{1}{\varepsilon_i}$ ist, die Kom
ponenten von δt, wie folgt:

$$\varrho_{ik} \to \varrho_{ik} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_k},$$

$$\varrho_{ik}' \to \varrho_{ik}' \cdot \varepsilon_i \varepsilon_k \qquad (i \leqq k$$

$$\sigma_{ik}' \to \sigma_{ik}' \cdot \frac{1}{\varepsilon_i \varepsilon_k} \qquad (i \leqq k$$

Das Produkt der hinzutretenden Faktoren ist $= 1$ und damit die Behau
tung bewiesen. Dieselbe Rechnung benötigen wir auf der rechten Sei
von (11) für δu an Stelle von δt: das Volumen $d\Omega$ wird, unter For
lassung eines von den Drehwinkeln unabhängigen Faktors,

$$= \prod_{i \neq k} \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_k} - 1\right) \cdot \prod_{i \leqq k} (\varepsilon_i \varepsilon_k - 1) \left(\frac{1}{\varepsilon_i \varepsilon_k} - 1\right) \cdot d\varphi_1 \, d\varphi_2 \ldots d\varphi_n. \tag{13}$$

Ich bediene mich der Abkürzungen

$$e^{2\pi i \varphi} = e(\varphi); \qquad 2 \cos 2\pi\varphi = e(\varphi) + e(-\varphi) = c(\varphi),$$
$$2i \sin 2\pi\varphi = e(\varphi) - e(-\varphi) = s(\varphi).$$

Die Produkte in (13) ergeben zusammen das Quadrat des absoluten B
trages von

$$\prod_i (\varepsilon_i^2 - 1) \cdot \prod_{i<k} (\varepsilon_i \varepsilon_k - 1) \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_k} - 1\right).$$

Hier kann

$$\varepsilon_i^2 - 1$$

ersetzt werden durch

$$\varepsilon_i - \frac{1}{\varepsilon_i} = s(\varphi_i),$$

$$(\varepsilon_i \varepsilon_k - 1)\left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_k} - 1\right) = \varepsilon_i^2 + 1 - \varepsilon_i \left(\varepsilon_k + \frac{1}{\varepsilon_k}\right)$$

durch

$$\left(\varepsilon_i + \frac{1}{\varepsilon_i}\right) - \left(\varepsilon_k + \frac{1}{\varepsilon_k}\right) = c(\varphi_i) - c(\varphi_k).$$

lso darf in

14) $$d\Omega = \Delta^2 d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_n:$$

15) $$\Delta = \prod_i s(\varphi_i) \cdot \prod_{i<k} (c(\varphi_i) - c(\varphi_k))$$

enommen werden. Das zweite Produkt läßt sich als Determinante schreiben:

$$|c^{n-1}(\varphi), \dots, c^2(\varphi), c(\varphi), 1| = |\dots, c(2\varphi), c(\varphi), 1|,$$

nd darum ist auch

$$\Delta = |s(n\varphi), \dots, s(2\varphi), s(\varphi)|.$$

Die zu irgendeiner irreduziblen Darstellung von $\mathfrak{c}_u$ gehörige Charakeristik $\chi(t)$ hängt nur von den Drehwinkeln $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ von t ab, und war ist sie eine endliche Fourierreihe derselben, die sich nicht ändert bei en $2^n \cdot n!$ linearen Substitutionen derjenigen endlichen Gruppe (S), deren rzeugende die Transpositionen sind von dém Typus

$$\varphi_1 \to \varphi_2, \quad \varphi_2 \to \varphi_1, \quad \varphi_i \to \varphi_i \quad (i \neq 1, 2)$$

nd die Vorzeichenänderungen vom Typus

$$\varphi_1 \to -\varphi_1, \quad \varphi_i \to \varphi_i \quad (i \neq 1).$$

ie primitiven Charakteristiken genügen den Orthogonalitätsrelationen mit em Integrationselement (14). $\Delta \cdot \chi = \xi$ ist eine endliche Fourierreihe, elche sich den Substitutionen der Gruppe (S) gegenüber alternierend erhält. Eine solche ist eine Summe von Elementarreihen der folgenden estalt

$$\sum_{(S)} \pm e(l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2 + \dots + l_n\varphi_n).$$

sind ganze Zahlen, für welche

$$l_1 > l_2 > \dots > l_n > 0$$

lt, und die Summe ist so zu verstehen, daß in dem hingeschriebenen Glied e φ allen Substitutionen der Gruppe (S) unterworfen werden und die mme sich alternierend über die so hervorgehenden Ausdrücke erstreckt. Form einer Determinante ist diese Elementarreihe

16) $$\xi(l_1 l_2, \dots, l_n) = |s(l_1\varphi), s(l_2\varphi), \dots, s(l_n\varphi)|.$$

ist nichts anderes als das niederste $\xi(l)$, das man erhält, wenn man für l_i e Zahlen

$$r_1 = n, \quad r_2 = n-1, \quad \dots, \quad r_n = 1$$

ählt.

17) $$\chi^* = \frac{\xi(l_1, l_2, \dots, l_n)}{\Delta} = \frac{\xi(l_1, l_2, \dots, l_n)}{\xi(r_1, r_2, \dots, r_n)}$$

eine endliche Fourierreihe mit den geforderten Symmetrieeigenschaften.

Das höchste Glied darin ist

$$e(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2 + \ldots + m_n\varphi_n),$$

wo

$$m_i = l_i - r_i,$$

also

$$m_1 \geqq m_2 \geqq \ldots \geqq m_n \geqq 0$$

ist. Die verschiedenen χ^* sind zueinander orthogonal in bezug auf da Integrationselement (14). Ferner gilt

$$\frac{1}{\Omega}\int \chi^*(\varphi)\chi^*(-\varphi)\,d\Omega = \frac{2^n \cdot n!}{\Omega} \tag{18}$$

(die Integration geht nach allen Variablen φ_i von 0 bis 1). Da aber di rechte Seite von den l unabhängig ist und χ^* sich für $l_i = r_i$ auf 1 re duziert, muß

$$\Omega = \int d\Omega = 2^n \cdot n!$$

sein, und die linke Seite von (18) ist allgemein $= 1$. Berücksichtigt ma nun aber, daß zu jedem höchsten Gewicht, dessen Koeffizienten die Un gleichungen (9) erfüllen, tatsächlich eine irreduzible Darstellung gehör so erkennt man wie in I, § 6, daß χ^* die zugehörige Charakteristik is Der gleiche Schluß, wie er dort vollzogen wurde, gestattet die Dimensions zahl zu berechnen, den Wert der Charakteristik für $t = e$ oder $\varphi_i = 0$.

Kehrt man zur totalen Gruppe c zurück, so hat man in der Dete minante

$$\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = |\varepsilon^{l_1} - \varepsilon^{-l_1},\ \varepsilon^{l_2} - \varepsilon^{-l_2},\ \ldots,\ \varepsilon^{l_n} - \varepsilon^{-l_n}|$$

für ε der Reihe nach die Multiplikatoren $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ von t zu setze während gleichzeitig $\varepsilon' = \frac{1}{\varepsilon}$ die übrigen Multiplikatoren $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_n'$ durc läuft. $\chi((\varepsilon))$ ist nämlich ein Aggregat von Potenzprodukten

$$\varepsilon_1^{k_1}\varepsilon_2^{k_2}\ldots\varepsilon_n^{k_n}$$

mit ganzzahligen, wennschon nicht durchweg positiven Exponenten Ein solches aber ist durch die Fourierreihe eindeutig festgelegt, in welch es durch die Substitution $\varepsilon_i = e(\varphi_i)$ übergeht. Darum ist die behaupte Charakteristikenformel gewiß richtig für alle nicht-singulären Elemente von c. Aus der in Satz 1 durch ein Schema gekennzeichneten, für all ausnahmslos gültigen Normalform schließt man aber leicht, daß jede innerhalb der Gruppe c beliebig nahe approximiert werden kann du nicht-singuläre Elemente, und die Formel überträgt sich dadurch auch die singulären Elemente.

Endlich kann man statt der Multiplikatoren die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms $f(\zeta)$ einführen. Wir setzen stets

19) $$f(\zeta) = |e - \zeta t|, \quad \frac{1}{f(\zeta)} = p_0 + p_1\zeta + p_2\zeta^2 + \ldots.$$

Man bediene sich der Cauchyschen Formel

$$\left|\frac{1}{x_i - y_k}\right| = \frac{D(x_n \ldots x_1)\, D(y_1 \ldots y_n)}{\prod_{i,k}(x_i - y_k)}$$

und wähle, unter ζ_i Variable verstehend,

$$x_i = \zeta_i + \frac{1}{\zeta_i}, \quad y_i = \varepsilon_i + \frac{1}{\varepsilon_i}.$$

Nun gilt

$$\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) - \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\zeta}(1 - \varepsilon\zeta)\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\zeta\right),$$

und

$$\frac{\varepsilon^l - \varepsilon^{-l}}{\varepsilon^1 - \varepsilon^{-1}} = \varepsilon^{l-1} + \varepsilon^{l-3} + \ldots + \varepsilon^{-(l-3)} + \varepsilon^{-(l-1)}$$

ist der Koeffizient von ζ^{l-1} in der Potenzentwicklung der Funktion

$$\frac{1}{(1 - \varepsilon\zeta)(1 - \varepsilon^{-1}\zeta)}.$$

Ferner ist

$$f(\zeta) = \prod_i (1 - \varepsilon_i\zeta)(1 - \varepsilon_i^{-1}\zeta).$$

In der Determinante

$$\left|1,\ \zeta + \frac{1}{\zeta},\ \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)^2,\ \ldots\right|$$

kann man die Potenz $\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)^i$ ersetzen durch $\zeta^i + \zeta^{-i}$. So erhält man

$$\left|\frac{1}{(1 - \varepsilon_k\zeta_i)(1 - \varepsilon_k^{-1}\zeta_i)}\right| = \frac{|\zeta^{n-1}, \zeta^{n-2} + \zeta^n, \ldots, 1 + \zeta^{2n}| \cdot |\ldots, \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2}, \varepsilon + \varepsilon^{-1}, 1|}{f(\zeta_1) f(\zeta_2) \ldots f(\zeta_n)}$$

Vergleicht man auf beiden Seiten die Koeffizienten der Potenz

$$\zeta_1^{l_1 - 1}\zeta_2^{l_2 - 1} \ldots \zeta_n^{l_n - 1} \quad (l_1 > l_2 > \ldots > l_n > 0),$$

so kommt

$$\frac{|\varepsilon^{l_1} - \varepsilon^{-l_1}, \ldots, \varepsilon^{l_n} - \varepsilon^{-l_n}|}{|\ldots, \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2}, \varepsilon + \varepsilon^{-1}, 1|} \cdot \frac{1}{\prod_i (\varepsilon_i - \varepsilon_i^{-1})}$$

20) $$= |p_{l-n},\ p_{l-n+1} + p_{l-n-1},\ p_{l-n+2} + p_{l-n-2},\ \ldots|.$$

Damit ist die Charakteristik ganz rational durch die Komponenten der Matrix t ausgedrückt.

Satz 4. *Jede Darstellung von* $\mathfrak{c}$ *zerfällt in irreduzible Bestandteile. Die Charakteristik der irreduziblen Darstellung von dem höchsten Gewicht* (8), (9) *ist, wenn* $l_i = m_i + n + 1 - i$ *gesetzt wird:*

$$\chi(t) = \frac{|\varepsilon^{l_1} - \varepsilon^{-l_1}, \ldots, \varepsilon^{l_n} - \varepsilon^{-l_n}|}{|\varepsilon^{n} - \varepsilon^{-n}, \ldots, \varepsilon^{1} - \varepsilon^{-1}|}$$

$$= |p_{l-n}, p_{l-n+1} + p_{l-n-1}, p_{l-n+2} + p_{l-n-2}, \ldots|;$$

die zugehörige Dimensionszahl

$$N = \frac{P(l_1, l_2, \ldots, l_n)}{P(n, n-1, \ldots, 1)}$$

mit

$$P(l_1, l_2, \ldots, l_n) = \prod_i l_i \cdot \prod_{i<k} (l_i - l_k)(l_i + l_k). \tag{21}$$

Z. B. ergibt sich für das höchste Gewicht $\lambda_1 + \lambda_2$:

$$N = \frac{(2n+1)(2n-2)}{2}, \text{ d. i. um 1 geringer als } \frac{2n(2n-1)}{2}.$$

Das Substrat dieser Darstellung ist nicht der Inbegriff aller schiefsymmetrischen Tensoren 2. Stufe f_{ik}, sondern nur derjenigen, welche die eine gegenüber $\mathfrak{c}$ invariante Relation erfüllen

$$f_{11'} + f_{22'} + \ldots + f_{nn'} = 0.$$

Analog gilt für die Darstellung vom höchsten Gewicht $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$:

$$N = \frac{2n(2n+1)(2n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \text{ d. i. um } 2n \text{ geringer als } \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

entsprechend dem invarianten System von $2n$ Relationen

$$f_{i11'} + f_{i22'} + \ldots + f_{inn'} = 0,$$

die dem willkürlichen schiefsymmetrischen Tensor 3. Stufe f_{ikl} aufzuerlegen sind.

§ 4.

Die Darstellungen der Drehungsgruppe: Infinitesimaler Teil.

Unter der *Drehungsgruppe* verstehe ich hier den Inbegriff $\mathfrak{d}$ der homogenen linearen Transformationen von der Determinante 1 (nicht -1), welche eine vorgegebene nicht-ausgeartete quadratische Form Q invariant lassen. Und zwar kann es sich entweder um alle *komplexen* Transformationen von dieser Art handeln, oder um die *reellen* Transformationen, welche eine reelle quadratische Form Q in sich überführen. Im reellen Gebiet gibt es die Unterschiede des Trägheitsindex, und unsere Resultate beziehen sich nicht etwa nur auf den definiten Fall[3]). Es wird nötig sein

[3]) Den definiten Fall behandelte Herr I. Schur in seiner zweiten Mitteilung: Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie. Sitzungsber. Berl. Akad. 1924, S. 297.

wischen gerader und ungerader Dimensionszahl $2n$, bzw. $2n+1$ zu nterscheiden. Als Normalform von Q verwenden wir

22) $(x_1x_1' + x_2x_2' + \ldots + x_nx_n')$, bzw. $x_0^2 + 2(x_1x_1' + x_2x_2' + \ldots + x_nx_n')$.

ie unitäre Beschränkung tritt ein, indem wir x_i' konjugiert zu x_i (und ei ungerader Dimensionszahl außerdem x_0 reell) nehmen und fordern, daß iese Bedingungen bei der Transformation erhalten bleiben. Ich verzichte er auf die genauere Betrachtung der einzelnen Operation von $\mathfrak{d}$; es ge- ügt die Bemerkung, daß bei gerader Dimensionszahl $2n$ ihre Multipli- atoren paarweise zueinander reziprok sind, bei ungerader Dimensionszahl $n+1$ zu den n Paaren reziproker Multiplikatoren noch der Einspänner $= 1$ hinzutritt. Von der Gruppe $\mathfrak{d}_u$ derjenigen unitären Transformationen it der Determinante 1 in $2n$ bzw. $2n+1$ Variablen

$$(x_0), \; x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_n, \; x_1', \; x_2', \; \ldots, \; x_n',$$

elche die Form Q in sich überführen, ist es wohl bekannt, daß jedes rer Elemente t sich in der Form schreiben läßt

$$t = u^{-1}(\varepsilon)\, u,$$

o u und die Diagonalmatrix (ε) der Multiplikatoren

$$(\varepsilon_0 = 1), \quad \varepsilon_i = e(\varphi_i), \quad \varepsilon_i' = \bar{\varepsilon}_i = e(-\varphi_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

leichfalls zu $\mathfrak{d}_u$ gehören. Bei ungerader Dimensionszahl ist mit (ε) jede erjenigen Hauptmatrizen innerhalb $\mathfrak{d}_u$ konjugiert, welche aus ihr durch ie schon oben erwähnten $2^n \cdot n!$ Substitutionen der Gruppe (S) für die rehwinkel $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ hervorgehen. Bei gerader Dimensionszahl muß an sich jedoch auf diejenige Hälfte $(S)'$ von (S) beschränken, deren lemente die Permutationen der φ sind, verbunden mit gleichzeitigem Vechsel des Vorzeichens an einer *geraden* Anzahl der Winkelargumente.

Die Matrix einer willkürlichen infinitesimalen Operation von $\mathfrak{d}$ ist in em Schema (23) angegeben.

23)

0	ϱ_i	σ_i
$-\varrho_k$	ϱ_{ik}	ϱ_{ik}'
$-\varrho_k'$	σ_{ik}'	σ_{ik}

(24)

0	$\varrho_i \lambda_i$	$-\sigma_i \lambda_i$
$\sigma_k \lambda_k$	$\varrho_{ik}(\lambda_i - \lambda_k)$	$\varrho_{ik}'(\lambda_i + \lambda_k)$
$-\varrho_k' \lambda_k$	$-\sigma_{ik}'(\lambda_i + \lambda_k)$	$\sigma_{ik}(-\lambda_i + \lambda_k)$

$\varrho_{ik} + \sigma_{ki} = 0$, ϱ_{ik}' und σ_{ik}' schiefsymmetrisch $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$.

er Rand von der Breite 1 tritt nur bei ungerader Dimensionszahl auf. ie zur infinitesimalen Gruppe $\mathfrak{d}^0$ gehörigen Hauptmatrizen seien wieder it $h(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ bezeichnet; $\varrho_{ii} = \lambda_i$, $\sigma_{ii} = -\lambda_i$. Das rechte Schema

(24) beschreibt, was aus der linken Matrix (23) entsteht durch die Kommutatormultiplikation mit h. Die Wurzeln sind also

$$\alpha = (\pm\lambda_i), \quad \pm\lambda_i \pm \lambda_k \quad (i < k, \text{ alle vier Vorzeichenkombinationen})$$

Für eine Linearform Λ der λ_i mit den Koeffizienten m_i ist dementsprechend

$$\Lambda_\alpha = (\pm 2\, m_i), \quad \pm m_i \pm m_k \qquad (i < k) \tag{25}$$

Es ist wiederum dafür Sorge getragen, daß $\alpha_\alpha = 2$ wird. Der Übergang von Λ zu $\Lambda' = \Lambda - \Lambda_\alpha \cdot \alpha$ ist in dem eingeklammerten Fall, der nur für die ungeraden Dimensionszahlen in Frage kommt, die Änderung des Vorzeichens eines einzigen λ_i; im Falle $\alpha = \lambda_i \mp \lambda_k$ $(i < k)$ die Vertauschung von λ_i mit λ_k, bzw. diese Vertauschung verbunden mit gleichzeitiger Vorzeichenänderung von λ_i und λ_k. Unter einer halbganzen Zahl verstehe ich eine solche von der Form: ganze Zahl $+\frac{1}{2}$. Aus der Tabelle (25) folgt: entweder sind die Koeffizienten m_i eines vorkommenden Gewichtes Λ alle ganze oder alle halbganze Zahlen. Für das höchste Gewicht ist außerdem stets

$$m_1 \geqq m_2 \geqq \ldots \geqq m_n \quad \text{und} \quad m_i + m_k \geqq 0 \quad \text{für} \quad i \neq k.$$

Im Falle der ungeraden Dimensionszahl kommt die Ungleichung hinzu $m_i \geqq 0$. Folglich:

$$\begin{cases} (\text{Dim. } 2n+1) & m_1 \geqq m_2 \geqq \ldots \geqq m_{n-1} \geqq m_n \geqq 0, \\ (\text{Dim. } 2n\ \ \ ) & m_1 \geqq m_2 \geqq \ldots \geqq m_{n-1} \geqq |m_n|. \end{cases} \tag{26}$$

Im zweiten Fall kann m_n auch negativ sein.

Realisierung. *Zu jedem der möglichen höchsten Gewichte gehört eine und nur eine irreduzible Darstellung.*

Dimensionszahl $2n+1$. Jedes mögliche höchste Gewicht setzt sich durch nicht-negative ganzzahlige Koeffizienten p_i zusammen aus

$$\mu_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$
$$\mu_n = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}{2}.$$

Wie man die irreduziblen Darstellungen mit dem höchsten Gewicht $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ findet, ist uns bekannt. In einer Darstellung, die das höchste Gewicht μ_n besitzt, müssen alle Linearformen

$$\frac{\pm\lambda_1 \pm \lambda_2 \pm \ldots \pm \lambda_n}{2} \tag{27}$$

als Gewichte auftreten; ihre Variablenzahl beträgt also mindestens 2^n. Und wenn wir eine zum höchsten Gewicht μ_n gehörige Darstellung der Dimensionszahl 2^n finden, muß sie irreduzibel sein. Denn die Gewichte (27) sind alle voneinander verschieden, und aus einem von ihnen erhält man

e übrigen durch wiederholte Anwendung der zu den Wurzeln $\alpha = \lambda_i$ hörigen Übergänge $A \to A'$. Eine solche Darstellung ist in der Tat on Cartan konstruiert worden[4]). Die 2^n Variablen werden zweckmäßig urch einen Buchstaben x mit n Indizes gekennzeichnet, deren jeder die erte $+$ oder $-$ besitzen kann. Ich gebe die Operationen an, welche der gesuchten Darstellung der Hauptmatrix h und den zu den Wurzeln gehörigen Elementen e_α von $\mathfrak{c}^0$ korrespondieren.

$H = H(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$: jedes x geht über in $\frac{\pm\lambda_1 \pm \lambda_2 \pm \cdots \pm \lambda_n}{2} x$, wo e Vorzeichenkombination im Faktor zusammenfällt mit der Indizesfolge r betreffenden Variablen x.

E_α, $\alpha = \lambda_i$. Diejenigen x, deren i-ter Index $+$ ist, gehen über in 0. in $x = x_-$ aber, dessen i-ter Index $-$ ist, geht über in $\pm x_+$, wo x_+ us x_- entsteht, indem der i-te Index aus $-$ in $+$ verwandelt wird; as Vorzeichen vor x_+ ist gleich dem Produkt des 1-ten bis $(i-1)$-ten ndex von x_+. — Analog für $\alpha = -\lambda_i$: die Rollen von $+$ und $-$ im ten Index sind zu vertauschen.

E_α, $\alpha = \lambda_i + \lambda_k$ $(i < k)$. Alle x außer denjenigen, welche an i-ter nd k-ter Stelle den Index $-$ tragen, gehen in 0 über. Diese aber, x_{--}, hen über in $\pm x_{++}$, indem der i-te und k-te Index in $++$ umgeandelt werden und das Vorzeichen vor x gleich dem Produkt der zwischen r i-ten und k-ten Stelle stehenden Indizes von x genommen wird. — nalog für die andern drei in der Formel $\alpha = \pm\lambda_i \pm \lambda_k$ enthaltenen öglichkeiten.

Durch Komposition gewinnt man aus den erwähnten irreduziblen Darellungen, die zu den höchsten Gewichten μ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ gehören, jedem der möglichen höchsten Gewichte eine derartige Darstellung. iejenigen, in denen die Koeffizienten des höchsten Gewichtes den Nenner 2 ben, können selbstverständlich auf dem Gebilde $\mathfrak{d}$ nicht eindeutig, sondern üssen mindestens zweideutig sein[5]).

Dimensionszahl $2n$. Alle möglichen höchsten Gewichte können mittels nzzahliger nicht-negativer Koeffizienten kombiniert werden aus

$$\mu_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-2),$$

$$\mu_{n-1} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n-1} - \lambda_n}{2},$$

$$\mu_n = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n-1} + \lambda_n}{2}$$

---

[4]) Cartan II, S. 86, 91.

[5]) Sie werden in den Schurschen Untersuchungen außer Betracht gelassen.

Es gilt, nur noch die beiden irreduziblen Darstellungen zu finden, die z dem höchsten Gewicht μ_{n-1} bzw. μ_n gehören[4]); sie besitzen die Dimen sionszahl 2^{n-1}. Die sämtlichen Gewichte sind

$$\frac{\pm\lambda_1 \pm \lambda_2 \pm \cdots \pm \lambda_n}{2},$$

wo im ersten Fall nur diejenigen Vorzeichenkombinationen zulässig sind deren Produkt $-$ ist, im zweiten Fall diejenigen, deren Produkt $+$ ist Die Definition dieser beiden Darstellungen ist genau die gleiche wie be ungerader Dimensionszahl — mit der Modifikation, daß im ersten Fa die n Indizes der Variablen an die Bedingung gebunden sind, daß ih Produkt — sei, im zweiten Fall aber $+$, und die Wurzeln $\alpha = \pm$ samt den zugehörigen E_α zum Fortfall kommen.

§ 5.

Die Darstellungen der Drehungsgruppe: Integraler Teil.

Satz 5. *Die gewöhnliche reelle Drehungsgruppe* $\mathfrak{d}_u$ *ist nicht einfac zusammenhängend, aber ein gewisses zweiblättriges Überlagerungsgebilde* $\mathfrak{d}$ *über* $\mathfrak{d}_u$ *ist einfach zusammenhängend.* (Gültig für $n \geqq 3$.)

Der reelle Raum, in welchem sich die reellen Drehungen abspielen, is dadurch gekennzeichnet, daß (x_0 reell ist,) x_i und x_i' zueinander konjugie sind. Unsere Behauptung folgt für die Dimensionszahlen $n = 3$ und $n =$ aus den bekannten Quaternionenformeln für die Drehungen. Eine g schlossene Kurve auf $\mathfrak{d}_u$ ist eine kontinuierliche Kreiseldrehung um eine festen Punkt O, die den Kreisel in seine Anfangslage zurückbringt; un die Frage ist, ob ich jede solche geschlossene Bewegung des Kreisels stet in die Ruhe überführen kann. Es ist nützlich, sich auch anschaulich i dreidimensionalen Raum klarzumachen, daß das einmalige Herumdreh des Kreisels um eine feste durch O gehende Achse sich nicht stetig die Ruhe verwandeln läßt, wohl aber das zweimalige Herumdrehen. W führen den Beweis allgemein nach der schon auf $\mathfrak{g}_u$ und $\mathfrak{c}_u$ angewendet Methode.

Als singulär betrachte ich ein Element t von $\mathfrak{d}_u$, wenn von sein Multipikatoren $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$; $\varepsilon_1' = \bar{\varepsilon}_1, \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_n'$ zwei mit verschieden Indizes behaftete, z. B. ε_i und ε_k oder ε_i und ε_k' $(i \neq k)$ einander gleich sin bei ungerader Dimensionszahl außerdem den Fall, wo ein Multiplikator a dieser Serie, z. B. ε_1 und damit auch ε_1', $= 1\,(= \varepsilon_0)$ wird. Hingegen g es nicht als ein singuläres Vorkommnis, wenn bei gerader Dimensionsza $\varepsilon_1 = \varepsilon_1' = \pm 1$ oder wenn bei ungerader Dimensionszahl $\varepsilon_1 = \varepsilon_1' = -1$ wi Wiederum sieht man leicht ein, daß die singulären t innerhalb $\mathfrak{d}_u$ ei Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen weniger bilden. Wir stellen u

lfe der Drehwinkel φ_i des nicht-singulären t wiederum die Figur 1 her. ırchläuft t eine geschlossene Kurve $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{d}_u$, welche durch keine singue Stelle hindurchgeht, so können die vertikalen Sehnen sich nicht gegentig überholen, jede muß in ihre Ausgangslage wieder zurückkehren. *Bei gerader Dimensionszahl* kann aber das am weitesten nach links gegene Paar $\varepsilon_n, \varepsilon_n'$ durch -1 hindurchgehen, so daß nach vollständiger ırchlaufung φ_n über $\frac{1}{2}$ in $1-\varphi_n$ übergegangen ist. Kehren alle φ_i zu ren Ausgangswerten zurück, so sind wir imstande, $\mathfrak{K}$ stetig in den Einitspunkt zusammenzuziehen. Tritt hingegen die andere Möglichkeit ein, lassen sich die Pendelungen von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ noch immer stetig in n Ruhwert $\varphi = 0$ zusammenziehen; gleichzeitig führe man den von φ_n rchlaufenen Bogen, indem man seine vertikale Anfangssehne den übrigen rtikalen Strecken nach gegen 1 rücken läßt, in die einmalige Durchıfung des ganzen Kreises von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 1$ über. Man erhält dann ı Ende des Deformationsprozesses an Stelle von $\mathfrak{K}$ die stetig sich vollehende volle Umdrehung einer reellen zweidimensionalen, mit dem Kurvenrameter μ stetig variierenden Ebene:

$$e_1 \to \cos\varphi \cdot e_1 - \sin\varphi \cdot e_2,$$
$$e_2 \to \sin\varphi \cdot e_1 + \cos\varphi \cdot e_2.$$

e „reellen" Vektoren e_1, e_2 und der Drehwinkel φ hängen stetig von μ , und φ durchläuft einmal die Skala der Winkelwerte von 0 bis 1. esen Prozeß kann ich offenbar stetig überführen in die volle Umdrehung $\mathfrak{K}_0$ ıer irgendwie fest vorgegebenen reellen zweidimensionalen Ebene. Darum jede geschlossene Kurve $\mathfrak{K}$ entweder homolog 0 oder homolog $\mathfrak{K}_0$. Da evident ist, daß sich $\mathfrak{K}_0$ nicht stetig auf einen Punkt zusammenziehen ßt, ist unser Satz für ungerade Dimensionszahl bewiesen.

Bei gerader Dimensionszahl ist die Möglichkeit zu erwägen, daß das ı weitesten nach rechts gelegene Paar $\varepsilon_1, \varepsilon_1'$ durch $+1$ hindurchgleiten nn und dadurch φ_1 über 0 in $-\varphi_1$ sich verwandelt. Wenn aber ıht bloß ein einziges Paar da ist, d. h. wenn n nicht $= 2$ ist, wird m ersten Paar unter allen Umständen durch die übrigen Paare das nüberrücken nach -1 verwehrt. Die erwähnte Möglichkeit ist darum n keinen Folgen, weil die Deformation, welche φ_1 ersetzt durch $\sigma \cdot \varphi_1$ der von 1 bis 0 abnehmende Deformationsparameter), den von φ_1 rchlaufenen Bogen ebenso wie die Pendelungen von $\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ stetig die Ruhelage $\varphi = 0$ überführt. Es bleibt nur die andere Möglichkeit diskutieren, daß das n-te, das am weitesten nach links gelegene ar durch -1 hindurchgeht und φ_n über $\frac{1}{2}$ hinüber in $1-\varphi_n$ sich rwandelt. Das Resultat ist dann offenbar das gleiche wie bei ungerader mensionszahl.

Die oben wiedergegebene Cartansche Tabelle läßt erkennen, daß e tatsächlich Darstellungen der abstrakten Gruppe $\mathfrak{d}_u^*$ gibt, die erst auf $\mathfrak{d}_u^*$ nicht schon auf $\mathfrak{d}_u$ eindeutig sind.

Dem schon im I. Kapitel eingeschlagenen Gedankengang gemäß folg nun *die Berechnung des Volumens* $d\Omega$. Als Komponenten eines infini tesimalen Elementes (23) von $\mathfrak{d}_u$ können wir verwenden

(ϱ_i, σ_i) alle ϱ_{ik} und diejenigen $\varrho'_{ik}, \sigma'_{ik}$, für welche $i < k$ ist.

Darum gilt

$$d\Omega = \Big\{\prod_i (\varepsilon_i - 1)\Big(\frac{1}{\varepsilon_i} - 1\Big)\Big\} \cdot \prod_{i \neq k} \Big(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_k} - 1\Big) \cdot \prod_{i<k} (\varepsilon_i \varepsilon_k - 1)\Big(\frac{1}{\varepsilon_i \varepsilon_k} - 1\Big)$$
$$d\varphi_1 d\varphi_2 \ldots d\varphi_n.$$

Das Produkt in der geschweiften Klammer tritt nur auf bei ungerade Dimensionszahl. Wir bekommen also, wenn wir uns wieder der Schreib weise (14) bedienen:

$$(28) \qquad \Delta = \prod_i s\Big(\frac{\varphi_i}{2}\Big) \cdot \prod_{i<k} (c(\varphi_i) - c(\varphi_k)), \qquad (\text{Dim.} = 2n+1),$$

$$(28') \qquad \Delta = \prod_{i<k} (c(\varphi_i) - c(\varphi_k)). \qquad (\text{Dim.} = 2n).$$

Weil wir immer ungerade und gerade Dimensionszahl unterscheiden müsse beziehe sich die erste Aussage stets auf den ersten, die zweite auf de zweiten Fall.

Die primitiven Charakteristiken χ sind endliche Fourierreihen d Winkelargumente $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ in einem etwas erweiterten Sinne: Aggr gate von Termen der Gestalt

$$e(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2 + \ldots + m_n\varphi_n),$$

wo die m_i entweder lauter ganze oder lauter halbganze Zahlen sind. D Charakteristiken sind symmetrisch gegenüber der Gruppe (S) bzw. $(S$ $\Delta \cdot \chi = \xi$ ist eine endliche Fourierreihe von alternierendem Charakter gegenüb (S) bzw. $(S)'$; und darum additiv zusammengesetzt aus Elementarsumm

$$\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = \sum \pm e(l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2 + \ldots + l_n\varphi_n).$$

Für die l_i, welche alle ganz oder alle halbganz sind, gelten die U gleichungen

$$l_1 > l_2 > \ldots > l_n > 0 \quad \text{bzw.} \quad l_1 > l_2 > \ldots > l_{n-1} > |l_n|.$$

Die alternierende Summe erstreckt sich über die an den Argumenten v zunehmenden Substitutionen von (S) bzw. (S'). In Determinantenfo ist *im Falle der ungeraden Dimensionszahl*

$$(29) \qquad \xi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = |s(l_1\varphi), s(l_2\varphi), \ldots, s(l_n\varphi)|$$

d Δ das niedrigste vorkommende ξ:

0) $$\Delta = \xi(r_1, r_2, \ldots, r_n),$$

1) $$r_1 = n - \frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad r_{n-1} = \frac{3}{2}, \quad r_n = \frac{1}{2}.$$

2) $$\chi = \frac{\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n)}{\xi(r_1, r_2, \ldots, r_n)}$$

die Charakteristik der irreduziblen Darstellung „vom Gewichte" $m_i = l_i - r_i$, h. derjenigen, deren höchstes Gewicht diese Koeffizienten m_i trägt. albganze l_i liefern die auf $\mathfrak{d}_u$ eindeutigen, ganze l_i die zweideutigen Darellungen. Die Ausdrücke (29) traten schon bei der Gruppe $\mathfrak{c}$ auf, vgl. ormel (16).

Im Falle der geraden Dimensionszahl haben wir

$$2 \cdot \xi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = |c(l_1\varphi), c(l_2\varphi), \ldots, c(l_n\varphi)|, \quad \text{wenn } l_n = 0 \text{ ist;}$$

t hingegen $l_n \neq 0$, so gilt

3) $$2 \cdot \xi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = |c(l_1\varphi), \ldots, c(l_n\varphi)| + |s(l_1\varphi), \ldots, s(l_n\varphi)|.$$

Wiederum ist Δ das niedrigste vorkommende ξ, (30),

4) $$r_1 = n - 1, \quad \ldots, \quad r_{n-1} = 1, \quad r_n = 0,$$

nd (32) liefert die Charakteristik der irreduziblen Darstellung vom Gewichte $m_i = l_i - r_i$. Die Variablenzahlen sind

5) $$N = \frac{P(l_1, l_2, \ldots, l_n)}{P\left(n - \frac{1}{2}, \ldots, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)} \qquad (\text{Dim.} = 2n + 1)$$

zw.

5') $$N = \frac{P'(l_1, l_2, \ldots, l_n)}{P'(n-1, \ldots, 1, 0)} \qquad (\text{Dim.} = 2n);$$

ist durch (21) erklärt,

$$P'(l_1, l_2, \ldots, l_n) = \prod_{i<k} (l_i - l_k)(l_i + l_k).$$

Der Übergang von den Elementen der Gruppe $\mathfrak{d}_u$ zu denen der vollen ruppe $\mathfrak{d}$ vollzieht sich ohne weiteres. Rational durch die Komponenten on t lassen sich natürlich nur die Charakteristiken $\chi(t)$ der auf $\mathfrak{d}$ *eineutigen* irreduziblen Darstellungen ausdrücken. Neben den Entwicklungseffizienten p_i von $\frac{1}{f(\zeta)}$, vgl. Formel (19), treten im folgenden auch dienigen von

$$\frac{1-\zeta}{f(\zeta)}, \qquad \frac{1+\zeta}{f(\zeta)}, \qquad \frac{1-\zeta^2}{f(\zeta)}$$

if; sie sind bzw.

$$= p_i - p_{i-1}, \qquad p_i + p_{i-1}, \qquad p_i - p_{i-2}.$$

Dimensionszahl $2n+1$. Nimmt man die l gleich ganzen Zahle so unterscheidet sich der Ausdruck (32) nur dadurch von (17), daß i Nenner (28) statt (15) steht. Außerdem ist

$$\frac{1}{\prod_i (1-\varepsilon_i\zeta)(1-\varepsilon_i^{-1}\zeta)} \quad \text{jetzt nicht} \quad = \frac{1}{f(\zeta)}, \quad \text{sondern} \quad = \frac{1-\zeta}{f(\zeta)}.$$

Aus der in (20) angegebenen p-Determinante entsteht $\chi(t)$ also dadurc daß p_i durch $p_i - p_{i-1}$ ersetzt und das Ganze mit

$$\delta = \prod_i c\left(\frac{\varphi_i}{2}\right) = \prod_i (\varepsilon_i^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_i^{-\frac{1}{2}})$$

multipliziert wird.

$$\delta^2 \text{ ist } = \prod_i (2 + c(\varphi_i)).$$

Unter dem Produktzeichen steht der Wert von

$$1 + \zeta^2 - c(\varphi_i)\zeta = (1-\varepsilon_i\zeta)(1-\varepsilon_i^{-1}\zeta) \quad \text{für} \quad \zeta = -1.$$

Darum wird

$$\delta^2 = \frac{1}{2} f(-1) = \frac{1}{2} |e+t|.$$

Für *die zweideutigen Darstellungen* finden wir somit:

$$(36) \quad \chi(t) = \sqrt{\frac{1}{2}|e+t|} \cdot |p_{l-n} - p_{l-n-1},\ p_{l-n+1} - p_{l-n-2}, \ldots, p_{l-1} - p_{l-}$$

$$[\text{Gewicht: } l_i + i - n - \tfrac{1}{2};\quad l_n > 0].$$

In der Charakteristikenformel für *die eindeutigen Darstellungen* ersetze wir das Zeichen l durch $l + \frac{1}{2}$, damit wir auch hier auf ganze Zahlen kommen.

$$\frac{\varepsilon^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon^{-(l+\frac{1}{2})}}{\varepsilon^{\frac{1}{2}} - \varepsilon^{-\frac{1}{2}}} = \varepsilon^l + \varepsilon^{l-1} + \ldots + \varepsilon^{-(l-1)} + \varepsilon^{-l}$$

ist der Koeffizient von ζ^l in der Potenzentwicklung von

$$\frac{1+\zeta}{(1-\varepsilon\zeta)(1-\varepsilon^{-1}\zeta)}, \text{ und es gilt } \prod_k \frac{1+\zeta}{(1-\varepsilon_k\zeta)(1-\varepsilon_k^{-1}\zeta)} = \frac{1-\zeta^2}{f(\zeta)}.$$

Darum bekommen wir jetzt aus der schon zur Herleitung von (20) b nutzten Cauchyschen Formel

$$\left|\frac{1+\zeta_l}{(1-\varepsilon_k\zeta_l)(1-\varepsilon_k^{-1}\zeta_l)}\right| : \left|\varepsilon_k^{l-1} + \varepsilon_k^{-(l-1)}\right|$$

$$= \prod_i \frac{1-\zeta_l^2}{f(\zeta_l)} \cdot |\zeta^{n-1}, \zeta^{n-2} + \zeta^n, \ldots, 1 + \zeta^{2n}|$$

ermals die p-Determinante (20), in der jedoch p_i durch $p_i - p_{i-2}$, zu ersetzen ist durch $l+1$:

7) $$\chi(t) = |p_{l-n+1} - p_{l-n-1},\ p_{l-n+2} - p_{l-n-2},\ \ldots,\ p_l - p_{l-2n}|\ ^{6})$$

$$[\text{Gewicht: } l_i + i - n;\quad l_n \geqq 0].$$

Dimensionszahl $2n$. Für die eindeutigen Darstellungen (l_i ganzhlig) mit $l_n = 0$ hat man sofort, da $\varepsilon^l + \varepsilon^{-l}$ der Koeffizient von ζ^l $(l \neq 0)$ der Potenzentwicklung von

$$\frac{1-\zeta^2}{(1-\varepsilon\zeta)(1-\varepsilon^{-1}\zeta)} \quad \text{ist und} \quad \prod_i (1-\varepsilon_i\zeta)(1-\varepsilon_i^{-1}\zeta) = f(\zeta),$$

e Gleichung (37). Sind die l_i ganze Zahlen und $l_n > 0$, so ist derselbe sdruck brauchbar für den ersten der beiden Summanden, in welche χ ch (33) zerfällt. Für den zweiten, den sin-Teil hat man

$$\frac{|\varepsilon^{l_1} - \varepsilon^{-l_1}, \ldots, \varepsilon^{l_n} - \varepsilon^{-l_n}|}{|\ldots, \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2},\ \varepsilon + \varepsilon^{-1},\ 1\ |},$$

i. die p-Determinante (20), multipliziert mit

$$\delta = \prod_i s(\varphi_i).$$

an findet

$$(-1)^n \delta^2 = \prod_i (2 - c(\varphi_i))\,(2 + c(\varphi_i)) = f(1) f(-1) = |e-t| \cdot |e+t|.$$

ezeichnet man die Koeffizientenmatrix (38) der invarianten quadratischen Form (22) mit $\tilde{e}$, so ist $|\tilde{e}| = (-1)^n$. Darum erhält man, nachdem man zunächst $|e-t|$ ersetzt hat durch die transponierte Determinante $|e-t'|$:

8)

0	$\begin{matrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{matrix}$	0

$$\delta^2 = |(\tilde{e} - t'\tilde{e})(e+t)|.$$

Nun ist $t'\tilde{e}t = \tilde{e}$, also δ^2 gleich der Determinante der schiefsymmetrischen Matrix $\tilde{e}t - t'\tilde{e}$. Die Determinante einer schiefsymmetrischen Matrix ist aber das uadrat einer ganzen rationalen Funktion ihrer Komponenten, nämlich r „Pfaffiante". Setzt man also

$$\pi(t) = \text{Pfaffiante von } (\tilde{e}t - t'\tilde{e}),$$

---

[6]) Vgl. zu dieser und den übrigen Formeln die unter [3]) zitierte Abhandlung n I. Schur.

so kommt[7])

$$2\chi(t) = |p_{l-n+1} - p_{l-n-1},\ p_{l-n+2} - p_{l-n-2}, \cdots|$$

$$\pm \pi(t) \cdot |p_{l-n},\ p_{l-n+1} + p_{l-n-1}, \cdots| \tag{39}$$

[Gewicht: $l_1 - n + 1,\ l_2 - n + 2, \ldots, l_{n-1} - 1, \pm l_n \quad (l_n \geqq 0)$;

für $l_n = 0$ ist der Faktor 2 links zu löschen und fällt rechts das zweit Glied fort.]

Sind die l halbganze Zahlen, so schreiben wir an Stelle von l diesma $l - \frac{1}{2}$.

$$\frac{\varepsilon^{l-\frac{1}{2}} + \varepsilon^{-(l-\frac{1}{2})}}{\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}}, \qquad \frac{\varepsilon^{l-\frac{1}{2}} - \varepsilon^{-(l-\frac{1}{2})}}{\varepsilon^{\frac{1}{2}} - \varepsilon^{-\frac{1}{2}}}$$

sind die Koeffizienten von ζ^{l-1} in den Potenzentwicklungen der Funktione

$$\frac{1-\zeta}{(1-\varepsilon\zeta)(1-\varepsilon^{-1}\zeta)}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{1+\zeta}{(1-\varepsilon\zeta)(1-\varepsilon^{-1}\zeta)}.$$

Darum ersetze man in der p-Determinante (20) p_i durch $p_i - p_{i-1}$, bzw $p_i + p_{i-1}$; so kommen die beiden Determinanten in der Formel (40) zu stande. Außerdem sind die Produkte

$$\prod_i \left(\varepsilon_i^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_i^{-\frac{1}{2}}\right), \qquad \prod_i \left(\varepsilon_i^{\frac{1}{2}} - \varepsilon_i^{-\frac{1}{2}}\right)$$

ins Quadrat erhoben, bzw. gleich

$$f(-1) = |e + t| \quad \text{und} \quad (-1)^n f(1) = (-1)^n |e - t| = |\tilde{e} - t'\tilde{e}|.$$

Somit findet sich jetzt

$$2\chi(t) = \sqrt{|e+t|} \cdot |p_{l-n} - p_{l-n-1},\ p_{l-n+1} - p_{l-n-2}, \cdots|$$

$$\pm \sqrt{(-1)^n |e-t|} \cdot |p_{l-n} + p_{l-n-1},\ p_{l-n+1} + p_{l-n-2}, \cdots| \tag{40}$$

$$\left[\text{Gewicht: } l_1 - n + \frac{1}{2},\ l_2 - n + \frac{3}{2}, \ldots, l_{n-1} - \frac{3}{2},\ \pm\left(l_n - \frac{1}{2}\right);\quad l_n > 0\right.$$

In den Formeln (36), (37), (39), (40) bedeuten $l_1, l_2, \ldots, l_n$ ste ganze Zahlen, die den Ungleichungen $l_1 > l_2 > \ldots > l_n$ genügen; außerde ist, wie jedesmal vermerkt ist, l_n entweder der Einschränkung $l_n >$ oder $l_n \geqq 0$ unterworfen. — Die vorkommenden Irrationalitäten sind

$$\sqrt{(-1)^n |e-t|} \quad \text{und} \quad \sqrt{|e+t|}.$$

Bei ungerader Dimensionszahl ist die erste $= 0$; bei gerader Dimension zahl ist ihr Produkt rational $= \pi(t)$.

[7]) Die Berechnung dieser Charakteristiken, welche er η nennt, ist Herrn Schu noch nicht gelungen; ebenso fehlen bei ihm natürlich diejenigen der zweideutigen D stellungen. Eine rekursive Bestimmung der η gelang im Anschluß an die Schursch Untersuchungen, aber ohne Benutzung des Integralkalküls Herrn R. Brauer. (Diss tation Berlin, erscheint demnächst.)

Satz 6. *Jede Darstellung von* $\mathfrak{d}$ *zerfällt in irreduzible. Die Di-*
ensionszahlen der irreduziblen Darstellungen sind unter (35), (35′) *ver-*
ichnet. Den Ausdruck der Charakteristiken durch die Multiplikatoren
n t findet man nach Anweisung der Gleichung (32) *in den Formeln*
9), (31) *bzw.* (33), (34), *durch die Matrix t selber in* (37), (36)
w. (39), (40).

Auf die von Herrn I. Schur neben $\mathfrak{d}$ behandelte Gruppe *aller Q* in-
riant lassenden linearen Transformationen, zu welcher auch diejenigen
n der Determinante -1 gehören, gehe ich hier nicht ein. Denn unser
andpunkt ist der infinitesimale. Auch die Charakteristiken

$$\chi = \sum_{(k)} r_{k_1 k_2 \dots k_n} \cdot e(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \dots + k_n\varphi_n)$$

nd für uns lediglich die „erzeugenden Funktionen", welche die vorkom-
enden Gewichte $k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \dots + k_n\varphi_n$ und ihre Multiplizitäten
$r_{k_1 \dots k_n}$ zusammenfassen. — Die durch Hinzunahme der Dilatation er-
iterten Gruppen $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ können analog behandelt werden wie in
ap. I, § 8.

Kapitel III.

Struktur der halb-einfachen Gruppen.

Begonnen wurde die Untersuchung der Struktur der halb-einfachen
ntinuierlichen Gruppen endlicher Parameterzahl von Killing[8]); aber erst
rtan gelang in seiner Thèse (Paris 1894) ein einwandfreier Aufbau. Das
sultat war eine vollständige Tabelle aller abstrakten *einfachen* Gruppen
ren direkte Produkte die halb-einfachen sind): zu den drei großen Klassen
r Gruppen $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, deren Darstellungstheorie in den beiden vorigen
apiteln entwickelt wurde, traten nur noch weitere fünf einzelne Gruppen
nzu. Die Untersuchung zerfällt in zwei Teile, einen allgemeinen, in
lchem die Haupteigenschaften der halb-einfachen Gruppen ausfindig ge-
acht werden, und einen speziellen, der durch viele Fallunterscheidungen
ndurch zu den wenigen konkreten Möglichkeiten vordringt, welche zufolge
ner Eigenschaften allein offen bleiben. Ich komme hier auf den allge-
einen Teil zurück, weil er nicht nur wesentlicher Vereinfachungen fähig
, sondern für unsere Zwecke weitergeführt werden muß, als es durch
rtan geschehen ist. Das Hauptziel dabei ist, die „unitäre Beschrän-
ng", die bisher eine so bedeutsame Rolle spielte, richtig auf alle halb-
fachen Gruppen zu übertragen.

[8]) Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen, Math.
nalen **31**, S. 252; **33**, S. 1; **34**, S. 57; **36**, S. 161 (1888—1890).

§ 1.

Grundbegriffe. Zerlegung nach einer maximalen auflösbaren Untergruppe.

Der Begriff der *infinitesimalen Gruppe* $\mathfrak{a}$ wurde schon in Kap. I, § in Erinnerung gebracht. Eine lineare Teilschar $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{a}$ ist eine *Unter gruppe*, wenn irgend zwei zu $\mathfrak{b}$ gehörige Elemente b_1, b_2 stets ein zu gehöriges Kommutatorprodukt $[b_1, b_2]$ erzeugen. Eine *invariante* (*au gezeichnete, selbstkonjugierte*) *Untergruppe* liegt vor, wenn mit b zugleic $[bx]$ der Schar angehört, welches auch das Gruppenelement x innerhalb sein mag. Im letzten Fall ist $\mathfrak{a}$ mod. $\mathfrak{b}$ genommen (Projektion von nach $\mathfrak{b}$; in der durch Projektion entstehenden Mannigfaltigkeit gelten zw Elemente von $\mathfrak{a}$ als gleich, wenn ihre Differenz zu $\mathfrak{b}$ gehört) ebenfal eine Gruppe, die *Faktorgruppe*. Die Elemente von der Form $[xy]$ un alle diejenigen, die sich aus solchen additiv zusammensetzen, bilden d *Kommutatorgruppe* oder *abgeleitete Gruppe* $\mathfrak{a}'$; sie ist eine invarian Untergruppe von $\mathfrak{a}$. Schärfer gilt: Die Ableitung einer invarianten Unte gruppe von $\mathfrak{a}$ ist wiederum eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{a}$. Demna sind die sukzessiven Ableitungen $\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'', \ldots$ samt und sonders invarian Untergruppen von $\mathfrak{a}$. Bricht diese Reihe ab mit der infinitesimalen Gruppe so ist $\mathfrak{a}$ eine *auflösbare* (oder „integrable") *Gruppe*. Man kann dies Begriff auch so fassen: Die Gruppe $\mathfrak{a}$ ist auflösbar, wenn sie sich mitt einer Reihe

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_r, \mathfrak{a}_{r-1}, \ldots, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_0 = 0$$

abbauen läßt, in welcher jedes $\mathfrak{a}_{i-1}$ invariante Untergruppe des vorh gehenden $\mathfrak{a}_i$ ist und die Parameterzahl von Glied zu Glied um 1 sin Enthält eine Gruppe keine andere invariante Untergruppe als 0 und s selbst, so heißt sie *einfach*; *halb-einfach* hingegen, wenn sie keine and auflösbaren invarianten Untergruppen enthält außer 0. Die einparametrig Gruppen sind zugleich Abelsch und einfach; aber abgesehen von dies trivialen Fall ist eine einfache Gruppe stets auch halb-einfach.

Zu einer beliebigen in abstracto gegebenen Gruppe gehört immer von Lie als *Parametergruppe* bezeichnete Transformationsgruppe. In korrespondiert dem Gruppenelement T die Transformation $X = TX'$ Gruppenmannigfaltigkeit in sich selber; sie ist so auf die ursprüngli Gruppe homomorph bezogen. Eine andere isomorphe Transformatio gruppe, die „*adjungierte*", erhält man, wenn man dem Element T Transformation

$$X = TX'T^{-1}$$

ordnet. Diese Darstellung ist jedoch unter Umständen „verkürzt"; es tspricht nämlich allen denjenigen Elementen T die Identität, welche m *Zentrum* der Gruppe angehören, d. h. mit allen Elementen X r Gruppe vertauschbar sind. Im Gebiet der kontinuierlichen Gruppen sie dennoch von größerer Wichtigkeit als die Parametergruppe, da die ansformation aus jedem *infinitesimalen* Element x wieder ein infinitemales x' entstehen läßt:

$$x = Tx'T^{-1}$$

eine homogene lineare Transformation im r-dimensionalen Vektorraum $\mathfrak{a}$, d wir bekommen so eine Darstellung der kontinuierlichen Gruppe durch eare Transformationen. Das infinitesimale Element t wird dabei räsentiert durch die infinitesimale lineare Transformation, welche dem llkürlichen Vektor x des Raumes $\mathfrak{a}$ die Änderung $x - x'$ gleich

$$dx = [tx] \tag{1}$$

teilt. Daß dies eine isomorphe Darstellung ist, bildet den eigentlichen halt des Multiplikationsgesetzes

$$[[st]x] = [t[sx]] - [s[tx]].$$

gehört dem Zentrum an, wenn $[tx]$ identisch in x gleich 0 ist. Das ntrum ist eine invariante Untergruppe, deren Elemente s, t vertauschbar d: $[st] = 0$. Für eine halb-einfache Gruppe $\mathfrak{a}$ besteht demnach das ntrum nur aus 0, und hier ist die infinitesimale Gruppe $\mathfrak{A}$ der adjunerten linearen Transformationen (1) eine *homomorphe* Darstellung von $\mathfrak{a}$.

Jede homogene lineare Transformation in einem m-dimensionalen ktorraum $\mathfrak{r}$, den die Variable x durchläuft,

$$dx = Tx$$

sitzt ein von der Wahl des Koordinatensystems unabhängiges charakistisches Polynom

$$f(\zeta) = |\zeta E - T| \qquad (E \text{ die } m\text{-dimensionale Einheitsmatrix}).$$

$\zeta = \alpha$ eine Wurzel von f, so existiert ein Vektor $e \neq 0$, der durch se Abbildung sich in αe verwandelt:

$$de = Te = \alpha e.$$

n *verschiedenen* Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ von $f(\zeta)$ entsprechend, kann man n Raum $\mathfrak{r}$ in Teilräume $\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \ldots$ zerspalten, deren jeder invariant gegenüber T, von folgender Beschaffenheit[9]): Ist α_1 eine ν_1-fache

[9]) Vgl. etwa Weyl, Mathematische Analyse des Raumproblems, Berlin 1923, 88–95.

Wurzel des charakteristischen Polynoms, so ist $\mathfrak{r}_1$ von ν_1 Dimensionen, und alle Vektoren x, die zu $\mathfrak{r}_1$ gehören, erfüllen die Gleichung

$$(T - \alpha_1 E)^{\nu_1} x = (d - \alpha_1)^{\nu_1} x = 0.$$

Genügt umgekehrt ein Vektor x einer Gleichung $(d - \alpha_1)^l x = 0$ mit einem beliebig hohen positiven Exponenten l, so liegt x in $\mathfrak{r}_1$. Entsprechendes gilt für $\mathfrak{r}_2, \ldots$.

Diese Tatsachen werden angewendet auf die Operationen der adjungierten Gruppe, auf die Matrix T der linearen Transformation

$$dx = [tx].$$

Benutzt man irgendeine Basis $e_1, e_2, \ldots, e_r$ der infinitesimalen Gruppe und ist darin

$$t = \tau_1 e_1 + \tau_2 e_2 + \ldots + \tau_r e_r \tag{2}$$

so besteht jene Matrix aus den in den Gleichungen

$$[te_i] = \sum_k \gamma_{ik} e_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots,$$

auftretenden Koeffizienten γ_{ik}. In ihrer Abhängigkeit vom Elemente sind sie Linearformen der Parameter $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$. Das charakteristische Polynom

$$f(\zeta; t) = |\zeta E - T| = \zeta^n - \psi_1(t)\zeta^{n-1} + \psi_2(t)\zeta^{n-2} - \ldots \pm \psi_r(t), \tag{3}$$

dessen Koeffizienten $\psi_i(t)$ homogene ganze rationale Funktionen der durch den Index i angezeigten Ordnung in den Parametern $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ von sind, ist eine Invariante gegenüber der adjungierten Gruppe; d. h. es ist $df = 0$, wenn man t den infinitesimalen Zuwachs $dt = [at]$ erteilt, welches auch das Element a von $\mathfrak{a}$ sein mag. Der letzte Koeffizient $\psi_r(t)$ verschwindet identisch. Besonders wichtig ist die in den Parametern homogene lineare *Spur*

$$\psi_1(t) = \sum_i \gamma_{ii}.$$

Ist $\mathfrak{b}$ eine q-parametrige Untergruppe von $\mathfrak{a}$, so ist das charakteristische Polynom $g(\zeta; t)$ des beliebigen Elements t von $\mathfrak{b}$ für die Gruppe $\mathfrak{b}$ — ist vom Grade q — ein Teiler des Polynoms $f(\zeta; t)$. Ist $\mathfrak{b}$ insbesondere eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{a}$, so gilt für die Elemente t von

$$f(\zeta; t) = \zeta^{r-q} \cdot g(\zeta; t). \tag{4}$$

Bei fest gegebenem $t = t_0$ zerspalten wir den r-dimensionalen linearen Raum $\mathfrak{a}$, in welchem sich die Transformation

$$T_0: \quad dx = [t_0 x]$$

spielt, nach den verschiedenen charakteristischen Wurzeln von T_0 in eilräume. Von einem Vektor oder Element x, das in dem zur Wurzel α_0 hörigen Teilraum liegt, sagen wir kurz, es gehöre zu α_0.

Hilfssatz. *Gehört x_α zur Wurzel α_0, x_β zur Wurzel β_0, so* $[x_\alpha x_\beta]$ $\alpha_0+\beta_0$. (Insbesondere ist $[x_\alpha x_\beta]=0$, wenn $\alpha_0+\beta_0$ keine Wurzel s charakteristischen Polynoms ist.)

Beweis. Wird $\alpha_0+\beta_0=\gamma_0$, $[x_\alpha x_\beta]=x_\gamma$ gesetzt, so folgt

$$[t_0[x_\alpha x_\beta]]=[[t_0 x_\alpha]x_\beta]+[x_\alpha[t_0 x_\beta]]$$

er

$$T_0 x_\gamma=[T_0 x_\alpha, x_\beta]+[x_\alpha, T_0 x_\beta],$$
$$(T_0-\gamma_0)x_\gamma=[(T_0-\alpha_0)x_\alpha, x_\beta]+[x_\alpha,(T_0-\beta_0)x_\beta].$$

urch wiederholte Anwendung dieser Relation ergibt sich, daß $(T_0-\gamma_0)^l x_\gamma$ ne Summe von Ausdrücken der Form ist:

$$[(T_0-\alpha_0)^i x_\alpha,(T_0-\beta_0)^j x_\beta] \quad \text{mit } i+j=l.$$

bald l also mindestens so groß ist wie die Summe der Vielfachheiten r beiden Wurzeln α_0 und β_0, ist

$$(T_0-\gamma_0)^l x_\gamma=0.$$

Gemäß dem Hilfssatz bilden die zur Wurzel 0 gehörigen Vektoren, denen insbesondere t_0 selber gehört, nicht bloß eine lineare Mannigtigkeit, sondern eine *Gruppe* $\mathfrak{h}$ innerhalb $\mathfrak{a}$. Ist h ein Element von $\mathfrak{h}$, läßt die Abbildung $dx=[hx]$ jeden der zu den verschiedenen Wurn α_0 von t_0 gehörigen Teilräume invariant; denn mit x_α gehört auch mer $[hx_\alpha]$ zur gleichen Wurzel α_0.

Das t_0, von welchem wir ausgehen, sei insbesondere als ein reguläres ement gewählt, d. h. als ein solches, dessen charakteristische Gleichung $\zeta;t_0)$ die Maximalzahl verschiedener Wurzeln hat, die überhaupt ein ement innerhalb $\mathfrak{a}$ besitzen kann[10]). Verschwinden unter den Koeffizienten n (3) die letzten n identisch, so hat für das spezielle t_0 die Wurzel 0 n $f(\zeta;t_0)$ nur gerade die Multiplizität n, und $\mathfrak{h}$ ist n-parametrig. Mit lfe einer Basis $h_1,h_2,\ldots,h_n$ von $\mathfrak{h}$ sei jedes Element von $\mathfrak{h}$ in die rm gesetzt:

$$h=h(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)=\lambda_1 h_1+\lambda_2 h_2+\ldots+\lambda_n h_n.$$

---

[10]) Spaltet man, die Parameter τ als Unbestimmte behandelnd, aus f den größten einsamen Teiler von $f(\zeta)$ und $\frac{df}{d\zeta}$ ab, so bedeutet diese Bedingung, daß die Disminante des übrigbleibenden Faktors $f_1(\zeta)$, eine ganze rationale, nicht identisch schwindende Funktion der Parameter von t, für $t=t_0$ verschieden von 0 ist.

Es wird etwa

$$t_0 = h^0 = \lambda_1^0 h_1 + \lambda_2^0 h_2 + \ldots + \lambda_n^0 h_n$$

sein. α_0 bedeute eine Wurzel der charakteristischen Gleichung von t, und $\mathfrak{r}_\alpha$ den zugehörigen Teilraum. Da die Formel $dx = [hx]$ eine Abbildung des Teilraums $\mathfrak{r}_\alpha$ auf sich selber definiert, können wir deren charakteristisches Polynom $f_\alpha(\zeta; h)$ herstellen. Sein Grad ν_α ist gleich der Dimensionszahl von $\mathfrak{r}_\alpha$.

$$f(\zeta; h) \text{ ist } = \prod_{\alpha_0} f_\alpha(\zeta; h).$$

Das Produkt erstreckt sich über die verschiedenen Wurzeln α_0. Ich behaupte, daß $f_\alpha(\zeta; h)$ für alle Werte der Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ die Potenz eines Linearfaktors sein muß: $(\zeta - \alpha)^{\nu_\alpha}$. Denn gäbe es λ-Werte für welche f_α verschiedene Wurzeln besäße, so wäre für $t = t_0$ die Maximalzahl verschiedener Wurzeln des Polynoms $f(\zeta; t)$ nicht erreicht gewesen; $\nu_\alpha \cdot \alpha$ ist die Teilspur von h im Raume $\mathfrak{r}_\alpha$ und demnach α selber eine Linearform der Parameter λ_i; α_0 ist ihr Wert für $\lambda_i = \lambda_i^0$. Insbesondere muß $f_0(\zeta; h)$, das charakteristische Polynom von h in der Gruppe $\mathfrak{h}$ identisch $= \zeta^n$ sein, da im Produkt der übrigen Faktoren $f_\alpha(\zeta; h)$ der Koeffizient von ζ^0 nicht identisch verschwindet. In der gewonnenen Produktzerlegung

$$f(\zeta; h) = \prod(\zeta - \alpha)$$

nennen wir die Linearformen α der Parameter λ *die Wurzeln der Gruppe* $\mathfrak{g}$. Das Element $t_0 = h^0$ spielt von jetzt ab keine Rolle mehr, an seine Stelle ist die ganze Gruppe $\mathfrak{h}$ getreten.

Die Gruppe $\mathfrak{h}$ *ist auflösbar.* Das geht aus dem folgenden Satz von Engel[11]) hervor: *Ist das charakteristische Polynom eines willkürlichen Elementes* h *in einer* n*-parametrigen infinitesimalen Gruppe* $\mathfrak{h}$ *gleich* ζ^n, *so ist* $\mathfrak{h}$ *auflösbar.* Sein Beweis beruht auf dem fundamentalen Liesche Theorem über *infinitesimale auflösbare Gruppen linearer Transformationen*. Ist $\mathfrak{H}$ eine solche, welche aus linearen Transformationen eines m-dimensionalen Raumes $\mathfrak{r}$ besteht:

$$dx = Hx = (\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \ldots + \lambda_n H_n)\, x$$

— die λ_i sind die Parameter, H_i feste m-dimensionale Matrizen, x durchläuft die Vektoren des Raumes $\mathfrak{r}$ —, so besagt dieses Theorem: *daß im Raume* $\mathfrak{r}$ *ein durch den Nullpunkt gehender Strahl existiert, welcher*

---

[11]) Vgl. Umlauf, Dissertation, Leipzig 1891, S. 35; Cartan, Thèse, S. 46; über die Beweise für dieses und das Liesche Theorem im Anhang des gegenwärtigen Kapitels.

genüber allen Transformationen von $\mathfrak{H}$ invariant ist. Mit anderen Worten: existiert ein von 0 verschiedener Vektor e in $\mathfrak{r}$, so daß

$$He = \Lambda \cdot e \tag{5}$$

t, wo Λ eine Linearform der Parameter λ_i bedeutet. Gehört H insesondere zur Ableitung $\mathfrak{H}'$, so wird $\Lambda = 0$. Denn aus (5) folgt in leicht erständlicher Bezeichnung

$$[HH^*]e = \Lambda(\Lambda^* e) - \Lambda^*(\Lambda e) = 0.$$

an kann den Lieschen Satz von neuem anwenden auf den $(m-1)$-mensionalen Raum, der aus $\mathfrak{r}$ durch Projektion nach e entsteht; und fortfahrend, erhält man eine Folge von Vektoren $e_1, e_2, \ldots, e_m$, welche n Koordinatensystem in $\mathfrak{r}$ bilden und Gleichungen genügen

$$\begin{cases} He_1 = \Lambda_1 e_1, \\ He_2 \equiv \Lambda_2 e_2 (\mathrm{mod}\, e_1), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ He_m \equiv \Lambda_m e_m (\mathrm{modd}\, e_1, e_2, \ldots, e_{m-1}), \end{cases} \tag{6}$$

denen die Λ_i Linearformen der λ sind. Das charakteristische Polynom on H zerfällt demnach in Linearfaktoren

$$(\zeta - \Lambda_1)(\zeta - \Lambda_2)\ldots(\zeta - \Lambda_m).$$

ies Theorem kann man insbesondere anwenden auf die lineare Transrmationsgruppe, welche zu einer auflösbaren infinitesimalen Gruppe adngiert ist. Der Satz von Engel ist im wesentlichen die Umkehrung es so entstehenden Satzes über die Konstitution der auflösbaren Gruppen.

Hier machen wir von dem Lieschen Theorem Gebrauch für die zu isomorphe Gruppe von Abbildungen $dx = [hx]$ des zur Wurzel α gehörigen Teilraums $\mathfrak{r}_\alpha$. Danach existiert ein bestimmtes Element $e_\alpha \neq 0$, daß simultan für alle h die Gleichung besteht

$$[he_\alpha] = \alpha \cdot e_\alpha. \tag{7}$$

t $\mathfrak{r}_\alpha$ nicht eindimensional, gibt es weiter ein von e_α linear unabhängiges lement e'_α, für welches

$$[he'_\alpha] \equiv \alpha \cdot e'_\alpha (\mathrm{mod}\, e_\alpha) \tag{7'}$$

lt, usf. Für ein Element der Gruppe $\mathfrak{h}$ von der Form $[h_1 h_2]$ und dait für jedes Element der abgeleiteten Gruppe $\mathfrak{h}'$ sind die Wurzeln $\alpha = 0$.

Diese Ausführungen lassen bereits deutlich erkennen, daß die Konitutionsformeln der Gruppen $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ wesentliche Züge tragen, die allen ruppen gemeinsam sind.

§ 2.
Die Gewichte.

Es liege eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{a}$ durch lineare Transformationen vor. Dabei entspreche dem Element h die Matrix H, dem Element e_α die Matrix E_α. Außerdem sei neben α auch $-\alpha$ Wurzel. $[E_\alpha E_{-\alpha}] = H_\alpha$ ist eine spezielle Matrix H. Der Wert einer beliebigen Linearform $\Lambda = \Lambda(H)$ der Variablen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ für $H = H_\alpha$ werde wie früher mit Λ_α bezeichnet. Gilt für einen Vektor e des Darstellungsraumes eine Gleichung

$$He = \Lambda \cdot e, \tag{5}$$

wo Λ eine Linearform der λ_i ist, so sagen wir, e sei vom *Gewichte* Λ und falls $e \neq 0$ ist, Λ komme in der Darstellung als Gewicht vor. Wir können nun genau die in Kap. I, § 2 angestellte Überlegung wiederholen. Ist Λ ein vorkommendes Gewicht, nicht dagegen $\Lambda - \alpha$ (wir nehmen jetzt an, α sei eine von 0 verschiedene Wurzel), so bilde man aus den der Gleichung (5) genügenden Vektor $e = e_0 \neq 0$ die Reihe $e_0, E_\alpha e_0 = e_1$, $E_\alpha e_1 = e_2, \ldots$. Ist in ihr e_{g+1} das erste Element, welches $= 0$ ist, so gilt

$$\Lambda_\alpha = -\frac{g}{2}\alpha_\alpha. \tag{8}$$

Daraus fließen wichtige Folgerungen:

1. Ist $\alpha_\alpha = 0$, so verschwindet Λ_α für jedes vorkommende Gewicht Λ. (Das ist selbstverständlich auch richtig, wenn $\alpha = 0$ ist.)

2. Unter der entgegengesetzten Voraussetzung $\alpha_\alpha \neq 0$ tritt mit Λ zugleich

$$\Lambda' = \Lambda - \frac{2\Lambda_\alpha}{\alpha_\alpha} \cdot \alpha \tag{9}$$

als Gewicht auf; und $\frac{2\Lambda_\alpha}{\alpha_\alpha}$ ist eine ganze Zahl.

Aus dem früher geführten Beweise von (8) notieren wir noch (für $\alpha \neq 0$) die Gleichung

$$E_{-\alpha} E_\alpha e_i = -e_i \cdot \sum_{j=0}^{i} (\Lambda + j\alpha)_\alpha.$$

Der Faktor rechts ist

$$= (i+1)\Lambda_\alpha + \frac{i(i+1)}{2}\alpha_\alpha = -\frac{(i+1)(g-i)}{2}\alpha_\alpha.$$

Ersetzen wir das Zeichen $\Lambda + i\alpha$ durch Λ, so heißt das: Teilt Λ die konstruierte α-Serie

$$\Lambda - i\alpha, \ldots, \Lambda - \alpha, \Lambda, \Lambda + \alpha, \ldots, \Lambda + k\alpha$$

von Gewichten so, wie aus der Bezeichnung hervorgeht, dann gilt für den von uns konstruierten Vektor $e_\Lambda (= e_i)$ vom Gewichte Λ die Gleichung

$$E_{-\alpha} E_\alpha e_\Lambda = \frac{(i+1)k}{2}\alpha_\alpha \cdot e_\Lambda. \tag{10}$$

e Transformation $E_{-\alpha} E_\alpha$ besitzt also innerhalb des von den Vektoren $e_1, \ldots, e_g$ aufgespannten $(g+1)$-dimensionalen Teilgebiets, welches ihr genüber invariant ist, die Teilspur

$$\frac{\alpha_\alpha}{2}\{1 \cdot g + 2 \cdot (g-1) + \ldots + (g-1) \cdot 2 + g \cdot 1\} = \frac{\alpha_\alpha}{2} \cdot \frac{g(g+1)(g+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

In zweierlei Hinsicht bedarf diese Formel der Ergänzung.

1. Wir projizieren den Darstellungsraum $\mathfrak{r}$ modd $e_0, e_1, \ldots, e_g$ und wenden die che Überlegung auf den entstehenden Raum $\mathfrak{r}'$ von $g+1$ Dimensionen weniger an. ist möglich, daß in ihm abermals eine Serie von Gewichten der Form $\Lambda + i\alpha$ auf- t mit der gleichen Linearform Λ und zugehörigen Vektoren e_i' an Stelle von e_i. teht sie aus $g'+1$ Gliedern, so ist der von der ersten und zweiten Vektorserie ammen aufgespannte $(g+1)+(g'+1)$-dimensionale Raum invariant gegenüber der ildung $E_{-\alpha} E_\alpha$, und die Teilspur der Abbildung in diesem Gebiet ist

$$= \frac{\alpha_\alpha}{2}\left\{\frac{g(g+1)(g+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{g'(g'+1)(g'+2)}{3}\right\}.$$

kann man fortfahren. Für die Gesamtspur von $E_{-\alpha} E_\alpha$ findet man den Wert

$$\frac{\alpha_\alpha}{2} \sum \frac{g(g+1)(g+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

sich die Summe über alle α-Serien erstreckt, in welche auf die geschilderte Weise Reihe der Gewichte in verallgemeinertem Sinne, nämlich der charakteristischen rzeln $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_m$ von H — Formel (6) — zerlegt werden kann; $g+1$ bedeutet jede α-Serie ihre Länge.

Ist insbesondere $\alpha_\alpha \neq 0$, so folgt aus der zu (8) analogen Gleichung, welche drückt, daß die Werte der Seriengewichte für H_α Null zum Schwerpunkt haben, die zweite Serie die erste an beiden Enden um die gleiche Anzahl überragt oder die gleiche Anzahl gegenüber der ersten verkürzt ist. Es geht daraus hervor: $\alpha_\alpha \neq 0$, so sind immer zwei durch die Formel (9) verbundene Linearformen Λ Λ' charakteristische Wurzeln von H *der gleichen Multiplizität*, während die da- chen gelegenen Linearformen der arithmetischen Reihe $\Lambda + i\alpha$ Wurzeln von der chen oder höherer Multiplizität sind.

2. Die Resultate bleiben bestehen, wenn wir an Stelle von $E_{-\alpha}$ die irgend- m zur Wurzel $-\alpha$ gehörigen Element $t_{-\alpha}$ von $\mathfrak{a}$ korrespondierende Matrix $T_{-\alpha}$ wenden. $[E_\alpha T_{-\alpha}] = H_\alpha^*$ ist ebenfalls eine Matrix H, $\Lambda(H_\alpha^*)$ werde $= \Lambda_\alpha^*$ ge- t. Für die Spur der Matrix $T_{-\alpha} E_\alpha$ bekommt man analog zu (11):

$$\frac{\alpha_\alpha^*}{2} \cdot \sum \frac{g(g+1)(g+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

§ 3.

tans Kriterium für die auflösbaren und für die halb-einfachen Gruppen.

Daß die Spur $\psi_1(t)$ eine Invariante der adjungierten Gruppe ist, mt darauf hinaus, daß $\psi_1(t) = 0$ ist für alle Elemente t der abgelei- n Gruppe $\mathfrak{a}'$. Dies sieht man auch so ein: Korrespondieren den Ele- nten s, t von $\mathfrak{a}$ in der adjungierten Gruppe die Transformationen S, T, dem Element $[st]$ die Transformation $ST - TS$. Aber die beiden

Transformationen ST und TS haben die gleiche Spur, $ST - TS$ als die Spur 0. — Benutzen wir als Basis von $\mathfrak{a}$ das willkürliche Elemen $h(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ der in § 1 konstruierten maximalen auflösbaren Unte gruppe $\mathfrak{h}$ und die zu den verschiedenen Wurzeln $\alpha \neq 0$ gehörigen Element $e_\alpha, e'_\alpha, \ldots$:

$$t = h(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) + \sum_{\alpha \neq 0} (\tau_\alpha e_\alpha + \tau'_\alpha e'_\alpha + \ldots), \tag{12}$$

so hängt $\psi_1(t)$ nur von den Parametern λ_i ab, ist nämlich gleich d Summe aller Wurzeln α (jede in ihrer Vielfachheit gerechnet). Denn g hört t_α zur Wurzel $\alpha \neq 0$, so entsteht vermöge der Abbildung $dx = [t_\alpha$ aus einem zur Wurzel ϱ gehörigen x ein zur Wurzel $\varrho + \alpha \neq \varrho$ gehöriges d Die Spur dieser Abbildung ist also $= 0$. Darum ist $\psi_1(t) = \psi_1(h)$. D Teilspur von $dx = [hx]$ in dem zur Wurzel α gehörigen Teilraum $\mathfrak{r}_\alpha$ i aber gleich $\nu_\alpha \cdot \alpha$.

Von besonderer Wichtigkeit wird für uns die quadratische Form ψ_2 oder die Spur $\varphi(t)$ der Transformation T^2; es ist $\varphi(t) = \psi_1^2 - 2\psi_2$. D Spur $\varphi(s, t)$ der Abbildung ST:

$$dx = [t[sx]] \tag{13}$$

ist eine symmetrische Bilinearform von s und t, $\varphi(t, t) = \varphi(t)$ die z gehörige quadratische Form.

Die folgenden Entwicklungen beruhen darauf, daß die Resultate d § 2, insbesondere die Formel (8) angewendet werden auf die adjungier Gruppe; für diese fallen die Gewichte mit den Wurzeln zusammen. D Formel (8) muß noch dahin verallgemeinert werden: Sind $t_\alpha, t_{-\alpha}$ irge zwei zu den entgegengesetzten Wurzeln $\alpha, -\alpha$ gehörige Elemente, so der Wert einer jeden Wurzel ϱ für das in $\mathfrak{h}$ enthaltene

$$h_\alpha^{**} = [t_\alpha t_{-\alpha}], \tag{14}$$

ϱ_α^{**}, ein rationales Multiplum von α_α^{**}. Daß im Falle $\alpha = 0$ für (1 alle Wurzeln verschwinden, wurde schon am Ende von § 2 erwähnt. $\alpha \neq 0$, so sei

$$\varrho - i\alpha, \ldots, \varrho - \alpha, \varrho, \varrho + \alpha, \ldots, \varrho + k\alpha \tag{15}$$

eine zusammenhängende Reihe von Wurzeln, so daß weder $\varrho - (i+1$ noch $\varrho + (k+1)\alpha$ als Wurzel auftritt. Wir betrachten die lineare Mann faltigkeit

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_{\varrho - i\alpha} + \ldots + \mathfrak{r}_{\varrho - \alpha} + \mathfrak{r}_\varrho + \mathfrak{r}_{\varrho + \alpha} + \ldots + \mathfrak{r}_{\varrho + k\alpha}.$$

Sie ist invariant gegenüber den t_α und $t_{-\alpha}$ korrespondierenden Transf mationen T_α, $T_{-\alpha}$ der adjungierten Gruppe. Da

$$H_\alpha^{**} = T_\alpha T_{-\alpha} - T_{-\alpha} T_\alpha$$

, wird die Spur der Transformation H_α^{**} jenes Teilraums gleich 0:

$$\sum_{j=-i}^{k} g_j(\varrho + j\alpha)_\alpha^{**} = 0;$$

bezeichnet die Dimensionszahl von $\tau_{\varrho+j\alpha}$.

Wenn $\mathfrak{a}$ eine auflösbare Gruppe ist, so gilt nach dem Lieschen Theorem alle Elemente t von $\mathfrak{a}'$:

$$f(\zeta; t) = \zeta^r;$$

h. für solche Elemente verschwinden die sämtlichen $\psi_i(t)$. Nach dem tze von Engel ist — unter Berücksichtigung der Gleichung (4) für $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}'$ diese Bedingung auch hinreichend dafür, daß $\mathfrak{a}'$ und damit $\mathfrak{a}$ eine auf-bare Gruppe ist. Cartan verschärfte das Kriterium, indem er zeigte, daß an statt aller Koeffizienten nur den einen ψ_2 ins Auge zu fassen braucht:

Hilfssatz. $\mathfrak{a}$ *ist dann und nur dann auflösbar, wenn für alle Elemente t von $\mathfrak{a}'$ die Gleichung $\varphi(t) = 0$ besteht.*

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt insbesondere $\varphi(h_\alpha^{**}) = 0$. Nun aber ϱ_α^{**} ein rationales Multiplum von α_α^{**}. Das Verschwinden der adratsumme aller ϱ_α^{**} — $\varphi(h)$ ist nämlich die Quadratsumme aller urzeln — hat demnach zur Folge, daß α und damit jedes ϱ für $h = h_\alpha^{**}$ eich 0 wird. Ein beliebiges Element der Kommutatorgruppe $\mathfrak{a}'$, das zu $\mathfrak{h}$ hört, setzt sich additiv aus Elementen von der Form (14) zusammen. arum verschwinden die Wurzeln samt und sonders für jedes Element n $\mathfrak{h}$, das der abgeleiteten Gruppe $\mathfrak{a}'$ angehört.

Hieraus folgt, daß $\mathfrak{a}'$ nicht mit der ganzen Gruppe $\mathfrak{a}$ zusammenfällt. nst würden alle Wurzeln identisch verschwinden, d. h. $\mathfrak{a}$ wäre $= \mathfrak{h}$; da er $\mathfrak{h}$ auflösbar ist, besitzt $\mathfrak{h}'$ wenigstens einen Parameter weniger als $\mathfrak{h}$.

Darum ist die Parameterzahl von $\mathfrak{a}'$ geringer als die von $\mathfrak{a}$. Aber ch in dem charakteristischen Polynom, das zur Gruppe $\mathfrak{a}'$ gehört, verhwinden gemäß der Gleichung (4) die zu ψ_1, ψ_2 analogen Koeffizienten entisch. Die Anwendung unseres Ergebnisses auf $\mathfrak{a}'$ statt auf $\mathfrak{a}$ lehrt, ß wiederum $\mathfrak{a}''$ wenigstens einen Parameter weniger enthält als $\mathfrak{a}'$. So rtfahrend erkennt man die Auflösbarkeit von $\mathfrak{a}$.

Satz 1.[12]) $\mathfrak{a}$ *ist dann und nur dann halb-einfach, wenn die quadratische Form $\varphi(t)$ nicht ausgeartet ist.*

Da $\varphi(t)$ eine Invariante gegenüber der adjungierten Gruppe ist, bilden diejenigen Elemente t, deren Parameter $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ den linearen eichungen genügen

6) $$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_1} = \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_2} = \ldots = \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_r} = 0.$$

[12]) Cartan, Thèse, S. 52.

eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{a}$.[13]) Nach dem Hilfssatz ist diese Unter gruppe auflösbar. Wenn $\mathfrak{a}$ halb-einfach ist, dürfen die Gleichungen den nach nur die einzige Lösung $\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_r = 0$ besitzen, oder $\varphi($ muß eine nicht-ausgeartete quadratische Form der Parameter τ sein.

Die Umkehrung spielt für uns keine Rolle, ist aber leicht zu b weisen. Ist $\mathfrak{a}$ nicht halb-einfach, so gibt es eine von 0 verschiedene au lösbare ausgezeichnete Untergruppe $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{a}$. Die Reihe der Ableitunge $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{b}'', \ldots$ bricht ab. Die letzte von 0 verschiedene darunter, $\mathfrak{c}$, i eine ausgezeichnete Untergruppe von $\mathfrak{a}$, welche Abelsch ist. Wählt ma die r-gliedrige Basis für $\mathfrak{a}$ so, daß darin eine Basis von $\mathfrak{c}$ enthalten is so kommen in der charakteristischen Gleichung $f(\zeta; t)$ und darum auc in $\varphi(t)$ die zu $\mathfrak{c}$ gehörigen Parameter offenbar nicht vor.

Mit Satz 1 ist das erste wesentliche Ziel der Strukturuntersuchun erreicht. Für eine beliebige halb-einfache Gruppe bietet sich als diejenig Darstellung durch lineare Transformationen, von der man seinen Ausgan nehmen kann, von selbst die adjungierte Gruppe dar. So verfuhren w freilich nicht in Kap. I und II, wo uns von vornherein eine Darstellun in einem Raum von viel geringerer Dimensionszahl zur Verfügung stan als die Parameterzahl der Gruppe beträgt. Dadurch aber, daß wir ei nicht-ausgeartete quadratische Form $\varphi(x)$ konstruiert haben, welche i variant ist gegenüber den Transformationen der adjungierten Gruppe, i der Weg geebnet, der adjungierten Gruppe in analoger Weise sich zu b dienen wie der linearen Transformationsgruppen $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$ in den beid vorigen Kapiteln.

Durch eine ähnliche Schlußweise wie die zu Satz 1 führende erken man, daß jede halb-einfache Gruppe das direkte Produkt von einfach (nicht einparametrigen) Gruppen ist; diese Zerlegung ist eindeutig b stimmt. Doch bedürfen wir hier dieser für die Konstruktion aller hal einfachen Gruppen fundamentalen Erkenntnis nicht[14]).

Von jetzt ab bedeute $\mathfrak{a}$ stets eine halb-einfache Gruppe, und die B zeichnung *Wurzel* werde allein für die von 0 verschiedenen Wurzeln ve wendet. Die in Satz 1 gewonnene Bedingung wird weiter ausgewertet in de

Satz 2. *Ist $\mathfrak{a}$ halb-einfach, so ist die maximale auflösbare Unte gruppe $\mathfrak{h}$ Abelsch. Die Wurzeln α treten nur einfach auf und sind paa weise einander entgegengesetzt: α, $-\alpha$. Es existieren unter ihnen voneinander linear unabhängige. α_α, der Wert von α für $h_\alpha = [e_\alpha e_{-\alpha}]$ ist $\neq 0$. Die Multipla $2\alpha, 3\alpha, \ldots$ einer Wurzel α kommen nicht unt den Wurzeln vor.*

---

[13]) Cartan, Thèse, S. 21, 22.
[14]) Cartan, Thèse, S. 53.

Beweis. Wir verwenden wiederum die Basisdarstellung (12). Ist neben s ein zweites willkürliches Element der Gruppe $\mathfrak{a}$:

$$s = h(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{\alpha}(\sigma_\alpha e_\alpha + \sigma'_\alpha e'_\alpha + \ldots),$$

hat die Spur der Abbildung (13) die Gestalt

$$\varphi(s, t) = Q(x, \lambda) + \sum_{\alpha}(\sigma_\alpha \tau_{-\alpha}).$$

ist eine symmetrische Bilinearform der Parameter x und λ; die zugehörige quadratische Form $Q(\lambda)$ ist die Quadratsumme aller Wurzeln. $\tau_{-\alpha}$) soll je ein Glied bedeuten, das aus einem numerischen Koeffizienten, der zur Wurzel α gehörigen Variablen $\sigma_\alpha, \sigma'_\alpha, \ldots$ und einer zu $-\alpha$ gehörigen $\tau_{-\alpha}, \tau'_{-\alpha}, \ldots$ multiplikativ zusammengesetzt ist.

1. $Q(\lambda)$, die Quadratsumme der Wurzeln, darf nicht ausgeartet sein; darum müssen unter den Wurzeln ebenso viele unabhängige vorkommen, als die Anzahl der Variablen λ beträgt. Und 0 ist das einzige Element in $\mathfrak{h}$, für welches alle Wurzeln verschwinden. Da nun aber für ein Element der abgeleiteten Gruppe $\mathfrak{h}'$ tatsächlich alle Wurzeln $= 0$ sind, reduziert sich $\mathfrak{h}'$ auf 0.

2. Wäre α Wurzel, aber nicht $-\alpha$, so käme die Variable σ_α in $\varphi(s, t)$ nicht vor — entgegen dem Umstand, daß $\varphi(s, t)$ nicht ausartet ist.

3. Aus demselben Grunde, weil die Variable σ_α in $\varphi(s, t)$ vorkommen muß, kann α nicht verschwinden für jedes zu $\mathfrak{h}$ gehörige Element von der Form $h^*_\alpha = [e_\alpha t_{-\alpha}]$, $t_{-\alpha} = e_{-\alpha}$ oder $e'_{-\alpha}$ oder $e''_{-\alpha} \ldots$; vgl. die Formel (11*). Es sei $t = t_{-\alpha}$ als ein zur Wurzel $-\alpha$ gehöriges Element so gewählt, daß $\alpha^*_\alpha = \alpha(h^*_\alpha) \neq 0$ ist. Die Annahme, es gäbe ein $e'_\alpha = e_1 \not\equiv 0 \pmod{e_\alpha}$, welches der Beziehung

$$[h e_1] \equiv \alpha \cdot e_1 \pmod{e_\alpha} \tag{3}$$

genügt, führt auf einen Widerspruch mit Hilfe der in § 2 befolgten Schlußweise. Man bilde wiederum die Reihe

$$e_1, \quad E_\alpha e_1 = [e_\alpha e_1] = e_2, \quad E_\alpha e_2 = e_3, \quad \ldots.$$

Für $t = t_{-\alpha}$ ergibt sich

$$T e_2 = [t e_2] \equiv -\alpha^*_\alpha \cdot e_1 \pmod{e_\alpha}.$$

Denn es ist

$$[t[e_\alpha e_1]] = [e_\alpha [t e_1]] - [[e_\alpha t] e_1]. \tag{9}$$

Da $[t e_1]$ zu $\mathfrak{h}$ gehört, so ist das erste Glied rechts ein Multiplum von e_α. Das zweite aber ist nach (18): $\equiv -\alpha^*_\alpha e_1 \pmod{e_\alpha}$. Durch Anwendung der Formel (19) auf $e_2, e_3, \ldots$ an Stelle von e_1 ergibt sich durch Induktion weiter

$$[t e_3] = -3\alpha^*_\alpha \cdot e_2, \ldots;$$

allgemein

$$[te_{g+1}] = -\frac{g(g+1)}{2}\alpha_\alpha^* \cdot e_g$$

(absolut von $g = 2$ ab, mod e_α für $g = 1$). Weil ein e_{g+1} mit hinreichen hohem Index verschwinden muß, folgt daraus rückwärts das Verschwinde von $e_g, \ldots, e_3, e_2$ und schließlich $e_1 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, e_\alpha)$ gegen die Voraussetzun Zugleich ist damit bewiesen, daß $\alpha_\alpha \neq 0$ ist. Ist $-i\cdot\alpha$ eine Wurzel, ab nicht mehr $-(i+1)\alpha$, so ergibt sich durch unsere Methode, v $e_{-i\alpha} = e_{-i}$ anfangend, eine Serie von Elementen

$$e_{-i}, \ldots, e_{-1}, e_0, e_1, \ldots, e_i, \ldots,$$

deren jedes aus dem vorhergehenden durch die Abbildung E_α erzeugt wir Sie muß wegen $\alpha_\alpha \neq 0$ gerade mit e_i abbrechen. Das zur Wurzel α g hörige e_1 ist notwendig ein Multiplum von e_α, folglich $e_2 = [e_\alpha e_1] =$ Darum kann i nicht $\geqq 2$ sein.

Die Analogie mit den in den beiden ersten Kapiteln benutzten Ko stitutionsformeln ist vollkommen.

Satz 3. *Wir haben eine Abelsche Untergruppe* $\mathfrak{h}$, *deren allgemein Element* h *von* n *Parametern* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *abhängt, und zu jeder Wurz* α *ein Element* e_α. h *und die den verschiedenen Wurzeln korrespondierend* e_α *bilden zusammen eine Basis für die ganze Gruppe* $\mathfrak{a}$. *Und es gelt die Beziehungen*

$$[hh'] = 0; \quad [he_\alpha] = \alpha\cdot e_\alpha; \quad [e_\alpha e_{-\alpha}] = h_\alpha;$$

$$[e_\alpha e_\beta] = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \alpha+\beta \neq 0 \text{ keine Wurzel ist.} \\ N_{\alpha\beta}\cdot e_{\alpha+\beta}, & \text{wenn } \alpha+\beta \text{ Wurzel ist.} \end{cases}$$

Willkürlich ist noch 1. die Wahl der Basis von $\mathfrak{h}$; und 2. kann durch irgendein (nicht verschwindendes) Multiplum von e_α ersetzt werde $\varphi(s,t)$ nimmt nunmehr die Gestalt an:

$$Q(\varkappa,\lambda) + \sum_\alpha N_\alpha \sigma_\alpha \tau_{-\alpha}. \tag{20}$$

Nach (11) ist der Koeffizient

$$N_\alpha = \frac{1}{2}\alpha_\alpha \sum \frac{g(g+1)(g+2)}{1\cdot 2\cdot 3}, \tag{21}$$

die Summe erstreckt über die verschiedenen α-Serien von Wurzeln, der Länge mit $g+1$ bezeichnet ist. Zu diesen Serien ist auch die 3gliedri $-\alpha, 0, \alpha$ zu rechnen. Faßt man immer mit einer α-Serie die entgege gesetzte zusammen, die entsteht, indem man jedes Glied ϱ in $-\varrho$ v wandelt (nur die eine Serie $-\alpha, 0, \alpha$ geht dabei in sich über), so erken man, daß N_α ein ganzzahliges Multiplum von α_α ist; der ganzzahlige Fakt ist positiv und $\geqq 2$.

§ 4.

Die Gruppe (S).

Bis hierher bin ich im wesentlichen, von einigen Modifikationen und Folgende vorbereitenden Ergänzungen abgesehen, der Thèse von Cartan olgt. Von nun ab gehe ich eigene Wege.

Im λ-Raum der Variablen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ korrespondiert jeder Wurzel ine homogene lineare Transformation S_α, welche die willkürliche Linear- n ξ der λ verwandelt in

$$\xi' = \xi - \frac{2\xi_\alpha}{\alpha_\alpha}\cdot\alpha. \tag{}$$

führt insbesondere α selber in $-\alpha$ über. S_α ist $= S_{-\alpha}$. Für eine Wurzel st insbesondere $\frac{2\varrho_\alpha}{\alpha_\alpha}$ eine ganze Zahl. Durch S_α werden die sämtlichen rzeln lediglich untereinander vertauscht. Infolgedessen erzeugen die eine *endliche Gruppe* (S). Statt der Quadratsumme Q aller Wurzeln nuß ich zunächst die analog gebaute positiv-definite Hermitesche Form rachten, die ich gleichfalls mit Q bezeichne:

$$Q = \sum_\alpha \alpha\bar{\alpha}.$$

ist gegenüber S_α und darum gegenüber allen Operationen der Gruppe invariant. Ich verwende geometrische Termini, welchen die dem Raum durch die Form Q aufgeprägte Metrik zugrunde liegt. Die Trans- mation S_α von der Gestalt (22) kann, da sie Q invariant läßt und ht die Identität ist, nichts anderes sein als die Spiegelung an der ene $\alpha = 0$. S_α ist folglich zu sich selbst invers, und es gilt mit der zeichnung (22):

$$S_{\varrho'} = S_\alpha S_\varrho S_\alpha.$$

hrt man Ebenenkoordinaten ein, indem man

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} x^i \lambda_i, \qquad \text{insbesondere} \qquad \alpha = \sum_{i=1}^{n} a^i \lambda_i$$

zt, und bezeichnet G^* die zu Q reziproke Hermitesche Form bzw. die gehörige bilineare Bildung

$$G^*(x\bar{y}) = \sum g_{ik} x^i \bar{y}^k \qquad (g_{ki} = \bar{g}_{ik}),$$

wird

$$\frac{\xi_\alpha}{\alpha_\alpha} = \frac{G^*(x\bar{a})}{G^*(a\bar{a})}. \tag{}$$

Ich schreibe von jetzt ab (mehr dem Setzer als dem Leser zuliebe) $(\xi$ an Stelle von ξ_α. Sucht man sich insbesondere n unabhängige Wurzel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ heraus und verwendet sie als Koordinaten λ, so liefert (2

$$2\frac{(\alpha_k \alpha_i)}{(\alpha_i \alpha_i)} = \frac{2 g_{ki}}{g_{ii}} = \text{ganze Zahl } a_{ik}.$$

Die Determinante der a_{ik} ist demnach $\neq 0$. Daraus folgt weiter, daß f eine beliebige Wurzel

$$\varrho = r^1 \alpha_1 + r^2 \alpha_2 + \ldots + r^n \alpha_n$$

die Koeffizienten r^i rationale Zahlen sind, welche sich aus den gan zahligen Gleichungen berechnen

$$\frac{2(\varrho \alpha_i)}{(\alpha_i \alpha_i)} = \sum_k a_{ik} r^k.$$

Jetzt kann ich von der Hermiteschen zur quadratischen Form

$$Q = \sum \varrho^2 \qquad (\varrho \text{ durchläuft alle Wurzel}$$

zurückkehren: sie ist eine positiv-definite Form mit *rationalen* Koef zienten, und das gleiche gilt für die reziproke Form G^*.

Will man die geometrisch evidente Gleichung (23) rechnerisch b stätigen, so geschieht das am bequemsten so, daß man die defini Hermitesche Form in solcher Weise auf die Gestalt bringt

$$Q = c(\lambda_1 \bar{\lambda}_1 + \lambda_2 \bar{\lambda}_2 + \ldots + \lambda_n \bar{\lambda}_n)$$

(c eine positive Konstante), daß $\alpha = \lambda_1$ wird. Schreibt man die Tran formation (22):

$$\lambda_i' = \lambda_i - c_i \alpha, \qquad \left(\frac{2(\xi \alpha)}{(\alpha \alpha)} = c_1 x^1 + c_2 x^2 + \ldots + c_n \right.$$

so ergeben sich aus ihrem unitären Charakter sogleich die Relationen

$$c_2 = c_3 = \ldots = c_n = 0;$$

darum

$$\frac{2(\xi \alpha)}{(\alpha \alpha)} = c_1 x^1 = c\, c_1\, G^*(x \bar{a}).$$

Satz 4. *Wir können die Parameter λ_i so wählen, daß alle Wurze Linearformen der λ_i mit rationalen Koeffizienten werden. Die Spiegelung S_α an den Ebenen $\alpha = 0$ im Sinne der durch die definite quadratisc Form Q im λ-Raum festgelegten Metrik erzeugen eine endliche Grup (S), die das System der Wurzeln invariant läßt.*

Wir wissen, wie bedeutungsvoll die Gruppe (S) auch für die D stellungen von a ist; denn in einer Darstellung treten mit einem Gewic Λ immer auch diejenigen Linearformen der λ_i als Gewichte auf, die aus durch die Operationen der Gruppe (S) hervorgehen: das System

wichte ist gleichfalls invariant gegenüber (S). Und wenn wir das Wort ewicht" in dem erweiterten Sinne gebrauchen wie in Zusatz 1, § 2, so ben „äquivalente" Gewichte, welche durch eine Operation der Gruppe (S) einander hervorgehen, auch stets die gleiche Multiplizität.

Damit haben wir mehrere Resultate abgeleitet und zum Teil in einhere Form gebracht, welche von Killing und Cartan durch kompliirte Determinantenrechnungen gefunden wurden. Die Formel

$$a_{ik} = 2\frac{g_{ki}}{g_{ii}}, \qquad g_{ki} = g_{ik}$$

etzt die unübersichtlichen Gleichungen in Cartans Thèse, Theorem X, 61. Da g_{ik} die Koeffizienten einer definiten quadratischen Form sind, gilt

$$0 < \det g_{ik} \leqq g_{11} \cdot g_{22} \cdots g_{nn}$$

er

$$0 < \det a_{ik} \leqq 2^n,$$

d entsprechende Ungleichungen für jeden Ausschnitt der quadratischen rm; vgl. Cartan, Thèse, S. 61. Die wirkliche Bestimmung aller einhen und halb-einfachen kontinuierlichen Gruppen basiert auf der Bemmung der zugehörigen endlichen Gruppen (S), d. h. aller derjenigen dlichen Gruppen, deren Erzeugende Spiegelungen in einem n-dimenalen euklidischen Raum sind und die gewissen Ganzzahligkeitsbedingen genügen.

Durch die im Satz 4 ausgesprochene Forderung sind die Koordinaten im λ-Raum bis auf eine lineare Transformation mit rationalen Koeffinten festgelegt. Es ist sogar eine invariante Festlegung bis auf *ganzlige unimodulare Transformationen* möglich. Ich bezeichne eine Linearm ξ der Variablen λ_i als ganzzahlig, wenn $\frac{2(\xi\alpha)}{(\alpha\alpha)}$ für alle Wurzeln α e ganze Zahl ist. Die Wurzeln selber fallen unter diesen Begriff; nso, wie wir wissen, die Gewichte irgendeiner Darstellung von $\mathfrak{a}$. Die zzahligen Formen bilden ein *Gitter*, und ich kann infolgedessen unter en n unabhängige auswählen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, aus denen sich alle andern tels ganzzahliger Koeffizienten linear kombinieren lassen. Bei solcher hl des Koordinatensystems im λ-Raum bekommt auch die quadratische rm Q ganzzahlige Koeffizienten.

Da wir e_α und $e_{-\alpha}$ je noch mit einem willkürlichen von 0 verschieen Faktor multiplizieren können, läßt sich dafür sorgen, daß der effizient N_α in (20) gleich -1 wird. Dann haben wir also

$$\varphi(t) = Q(\lambda) - \sum_{\varrho} \tau_\varrho \tau_{-\varrho}.$$

(21) geht die wichtige Tatsache hervor, daß unter diesen Umständen) negativ ausfällt. Wir drücken aus, daß $\varphi(t)$ eine Invariante für

die adjungierte Gruppe ist, insbesondere gegenüber der zu ihr gehörige Transformation $dt = [e_\alpha t]$; d. h. es ist $\varphi(s, t) = 0$, wenn $s = [e_\alpha t]$ ge nommen wird. In der Bezeichnung (12), (17) sind die Komponente von s:

$$h(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n) = \tau_{-\alpha} h_\alpha,$$

$$\sigma_\alpha = -\alpha,$$

$$\sigma_{\alpha+\varrho} = N_{\alpha,\varrho}\tau_\varrho \quad \text{oder}$$

$$\sigma_{-\varrho} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \varrho + \alpha \neq 0 \text{ keine Wurzel ist;} \\ N_{\alpha,-\varrho-\alpha}\cdot\tau_{-\varrho-\alpha}, & \text{wenn } \varrho + \alpha \text{ Wurzel is} \end{cases}$$

Das Verschwinden des so entstehenden $\varphi(s, t)$ liefert die Gleichungen

$$-\alpha = \sum_\varrho (\varrho\alpha)\varrho \tag{25}$$

und

$$\sum_\varrho N_{\alpha,-\varrho-\alpha}\tau_\varrho\tau_{-\varrho-\alpha} = 0. \tag{26}$$

Die Summen erstrecken sich über alle Wurzeln ϱ; in der zweiten Gl chung bleiben nur diejenigen Glieder stehen, für welche auch $\varrho +$ Wurzel ist.

Wir beschäftigen uns aber zunächst mit der ersten. Aus ihr fol wenn β gleichfalls eine Wurzel ist,

$$-(\alpha\beta) = \sum_\varrho (\varrho\alpha)(\varrho\beta).$$

Daraus geht hervor, daß $(\alpha\beta)$ *symmetrisch* ist in α und β (wodurch si nachträglich die Schreibweise $(\alpha\beta)$ rechtfertigen mag), und darum ka man auch schreiben

$$-(\alpha\beta) = \sum_\varrho (\alpha\varrho)(\beta\varrho).$$

Es ist demnach $-(\alpha\beta)$ der Wert der symmetrischen Bilinearform

$$G(\xi, \eta) = \sum_\varrho \xi_\varrho \eta_\varrho \quad \text{für} \quad \xi = \alpha,\ \eta = \beta. \tag{27}$$

Unter ξ, η verstehe ich hier zwei willkürliche Linearformen der λ:

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} x^i \lambda_i, \qquad \eta = \sum_{i=1}^{n} y^i \lambda_i.$$

Die quadratische Form $G(\xi\xi)$ ist positiv-definit, weil ξ_ϱ für alle Wurzel nur dann verschwindet, wenn ξ identisch $= 0$ ist. Von neuem erken wir, daß $(\alpha\alpha)$ negativ ist für jede Wurzel α. Die Form G muß w bis auf einen konstanten Faktor mit der schon vorher eingeführten F G^* identisch sein. In der Tat: aus

$$\beta_\alpha = -G(\beta, \alpha)$$

und β Wurzeln) folgt sogleich für jede Linearform ξ:

$$\xi_\alpha = G(\xi, \alpha),$$

rum nach der Definition (27)

$$G(\xi\eta) = \sum_\varrho G(\xi\varrho) G(\varrho\eta).$$

s bedeutet für die Matrizen:

$$G = GQG$$

er, weil die Determinante von G verschieden von 0 ist: G reziprok Q.

Ist außer α und β auch $\alpha + \beta$ Wurzel, so besagt die Gleichung $\alpha + \beta) = (\xi\alpha) + (\xi\beta)$, daß

$$h_{\alpha+\beta} = h_\alpha + h_\beta$$

[15]).

§ 5.
Die unitäre Beschränkung.

Wir nutzen weiter die Identität (26) aus:

$$\sum_{\varrho,\omega} N_{\alpha\omega}\, \tau_\varrho \tau_\omega = 0.$$

e Summe läuft über alle Wurzelpaare ϱ, ω, welche der Bedingung $-\omega + \alpha = 0$ genügen. Für ein solches Wurzelpaar gilt demnach

$$N_{\alpha\varrho} + N_{\alpha\omega} = 0.$$

rücksichtigt man die schiefe Symmetrie

$$N_{\beta\alpha} = -N_{\alpha\beta},$$

heißt das: für drei Wurzeln α, β, γ, welche ein „Dreieck" bilden, d. h. Summe 0 haben, gilt $N_{\gamma\alpha} = N_{\alpha\beta}$; eine Gleichung, welche wir sofort ch zyklische Vertauschung ergänzen können zu:

$$N_{\beta\gamma} = N_{\gamma\alpha} = N_{\alpha\beta}.$$

: diese Zahl ist demnach auch die Bezeichnung $N_{\alpha\beta\gamma}$ geeignet: $N_{\alpha\beta\gamma}$ bt ungeändert bei zyklischer Vertauschung der drei Wurzelindizes, bei gerader Vertauschung wechselt das Vorzeichen. Sind α, β zwei Wurzeln, en Summe nicht wieder eine Wurzel ist, so setze ich $N_{\alpha\beta} = 0$. Das chen α' sei mit $-\alpha$ gleichbedeutend.

Die Gleichung

$$[e_\alpha [e_\beta e_\gamma]] + [e_\beta [e_\gamma e_\alpha]] + [e_\gamma [e_\alpha e_\beta]] = 0$$

[15]) Diese einfachere und weitertragende Beziehung tritt an Stelle des Theorem VII, 7, in Cartans Thèse.

liefert, wenn die drei Wurzeln α, β, γ ein Dreieck bilden, von neuem die Beziehung (28). Im andern Fall aber wird, wenn $\beta + \gamma \neq 0$ ist,

$$[e_\beta e_\gamma] = N_{\beta\gamma}\, e_{\beta+\gamma},$$
$$[e_\alpha [e_\beta e_\gamma]] = N_{\alpha,\beta+\gamma}\, N_{\beta,\gamma}\, e_{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Sind demnach $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier Wurzeln, welche ein Viereck bilden:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0,$$

so gilt, weil nach (30) $N_{\alpha,\beta+\gamma}$ durch $N_{\delta\alpha}$ ersetzt werden kann, die Beziehung

$$N_{\beta\gamma} N_{\alpha\delta} + N_{\gamma\alpha} N_{\beta\delta} + N_{\alpha\beta} N_{\gamma\delta} = 0$$
$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0; \quad \beta + \gamma,\ \gamma + \alpha,\ \alpha + \beta \neq 0). \tag{31}$$

Endlich eine letzte Vorbereitung. Nach der auf die adjungierte Gruppe anzuwendenden Gleichung (10) ist, wenn β der folgenden α-Serie von Wurzeln angehört,

$$\beta - i\alpha, \ldots, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \ldots, \beta + k\alpha:$$

$$[e_{-\alpha} [e_\alpha e_\beta]] = \frac{(i+1)\,k}{2} \alpha_\alpha \cdot e_\beta. \tag{32}$$

Ist $\beta + \alpha$ noch Wurzel ($k \geqq 1$), so ist der Faktor

$$-\frac{(i+1)\,k}{2} \alpha_\alpha = R_{\alpha\beta} \tag{33}$$

eine positive Zahl. Die Gleichung (32) liefert

$$N_{\alpha', \alpha+\beta} N_{\alpha\beta} = -R_{\alpha\beta}.$$

Es ist aber nach (30)

$$N_{\alpha', \alpha+\beta} = N_{\beta'\alpha'} = -N_{\alpha'\beta'}.$$

Also ergibt sich:

$$N_{\alpha\beta} N_{\alpha'\beta'} = R_{\alpha\beta} \tag{34}$$

ist eine positive rationale Zahl, wenn neben α und β auch $\alpha + \beta$ Wurzel auftritt. Daraus geht insbesondere hervor, daß unter dieser Voraussetzung $N_{\alpha\beta}$ stets $\neq 0$ ist; außerdem zeigt sich, daß die Zahl (34) symmetrisch von den beiden Wurzeln α und β abhängt.

Ohne die vollzogene Normierung von $h_\alpha = [e_\alpha e_{\alpha'}]$ zu zerstören, können wir e_α mit einer beliebigen von 0 verschiedenen Zahl μ multiplizieren, wenn wir gleichzeitig $e_{\alpha'}$ durch $\frac{1}{\mu} e_{\alpha'}$ ersetzen.

Hilfssatz. *Die e_α lassen sich unter Wahrung der Gleichung (34) so normieren, daß für irgend zwei Wurzeln α und β stets $N_{\alpha\beta} = N_{\alpha'\beta'}$ gilt. $N_{\alpha\beta}$ ist dann eine reelle Zahl.*

Wir benutzen die in den vorigen Kapiteln eingeführte Rangordnung einer Linearform der Variablen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ mit rationalen Koeffizienten

ißt positiv, wenn der erste von 0 verschiedene Koeffizient positiv ist; e Wurzel β steht höher als α, in Zeichen: $\beta > \alpha$ oder $\alpha < \beta$, wenn $-\alpha$ positiv ist. Es sei ϱ eine positive Wurzel und Σ_ϱ die Gesamtheit rjenigen Wurzeln α, für welche $\varrho' < \alpha < \varrho$ ist. Es sei bereits be-esen, daß

5) $$N_{\alpha\beta\gamma} = N_{\alpha'\beta'\gamma'}$$

für alle ein Dreieck bildenden Wurzeln α, β, γ, welche dem System Σ_ϱ tnommen sind. Wir wollen die Gleichung (35) ausdehnen auf den Fall, ß dem System Σ_ϱ noch die beiden Wurzeln ϱ', ϱ hinzugefügt werden, h. auf das System Σ_{ϱ^*}, das durch die nächsthöhere Wurzel ϱ^* be-mmt wird.

Dazu dient die Relation (31). Besteht zwischen den Wurzeln α, β, ϱ Gleichung $\alpha + \beta = \varrho$ und gehören α und β zu Σ_ϱ, so ist

6) $$0 < \alpha < \varrho, \qquad 0 < \beta < \varrho.$$

enso, wenn die Wurzeln γ und δ zu Σ_ϱ gehören und $\gamma + \delta = \varrho$ ist. ttels der Relation (31), in welcher γ', δ' an Stelle von γ, δ zu schreiben , wird $N_{\alpha\beta\varrho'} N_{\gamma'\delta'\varrho}$ in die Summe zweier Produkte verwandelt, deren les in der Drei-Indizes-Bezeichnung (35) nur Wurzeln aufweist, die dem ielraum Σ_ϱ angehören. Denn es ist z. B.

$$N_{\beta\gamma'} N_{\alpha\delta'} = N_{\beta,\gamma',\nu-\beta} \cdot N_{\alpha,\delta',\delta-\alpha};$$

gen (36) und $0 < \gamma < \varrho$, $0 < \delta < \varrho$ entstammen hier alle sechs Indizes

$$\beta, \ -\gamma, \ \gamma - \beta, \quad \alpha, \ -\delta, \ \delta - \alpha$$

m System Σ_ϱ. Wird auf gleiche Art das Produkt $N_{\alpha'\beta'\varrho} N_{\gamma\delta\varrho'}$ ver-ndelt, so schließen wir auf Grund unserer Annahme, daß (35) bereits System Σ_ϱ gilt, auf die Gleichung

$$N_{\alpha\beta\varrho'} N_{\gamma'\delta'\varrho} = N_{\alpha'\beta'\varrho} N_{\gamma\delta\varrho'}$$

er

7) $$\frac{N_{\alpha\beta}}{N_{\alpha'\beta'}} = \frac{N_{\gamma\delta}}{N_{\gamma'\delta'}},$$

Worten: Ist die positive Wurzel ϱ auf doppelte Art als Summe zweier Σ_ϱ gehöriger Wurzeln $\alpha + \beta$ bzw. $\gamma + \delta$ dargestellt, so gilt die Glei-ung (37); *für alle derartigen Zerlegungen von ϱ hat also der Quotient* $\frac{\beta}{\beta'}$ *denselben Wert* μ_ϱ^2. — Die Anwendbarkeit von (31) in der hier be-tzten Modifikation der Bezeichnung ist an die Voraussetzung gebunden, ß weder α noch β gleich γ, d. h. daß die Zerlegung $\varrho = \gamma + \delta$ von der rlegung $\varrho = \alpha + \beta$ $(= \beta + \alpha)$ verschieden ist. Handelt es sich beidemal

um dieselbe Zerlegung, so ist die Gleichung (37) aber selbstverständlich. Der Beweis lehrt zugleich, daß die niedrigste positive Wurzel ϱ, die sich additiv aus zwei zwischen ϱ' und ϱ gelegenen Wurzeln $\alpha+\beta$ zusammensetzen läßt, nur *einer* solchen Zerlegung fähig ist. Denn für zwei verschiedene Zerlegungen $\varrho=\alpha+\beta=\gamma+\delta$ lieferte unsere Methode die unmögliche Gleichung $N_{\alpha\beta\varrho'}N_{\gamma'\delta'\varrho}=0$.

Ersetzt man e_ϱ, $e_{\varrho'}$ bzw. durch $\mu_\varrho e_\varrho$, $\frac{1}{\mu_\varrho}e_{\varrho'}$, so verwandelt sich $N_{\alpha\beta}$ in $\frac{1}{\mu_\varrho}N_{\alpha\beta\varrho'}$, $N_{\alpha'\beta'\varrho}$ in $\mu_\varrho N_{\alpha'\beta'\varrho}$ und $\frac{N_{\alpha\beta}}{N_{\alpha'\beta'}}$ in 1. Da es auf die Reihenfolge der Indizes nicht ankommt, gilt alsdann (35) innerhalb des auf Σ_ϱ nächstfolgenden Systems Σ_{ϱ^*}. Damit ist gezeigt, wie man, von niedrigeren zu höheren Wurzeln α aufsteigend, die Normierung der e_α so vollziehen kann, daß durchweg die Gleichung

$$N_{\alpha\beta}=N_{\alpha'\beta'}$$

zutrifft.

Zufolge (34) ist alsdann $N_{\alpha\beta}^2$ eine positive rationale Zahl und demnach $N_{\alpha\beta}$ selber reell.

Satz 5. *Bei geeigneter Normierung der zu den Wurzeln α gehörigen Basiselemente e_α gelten die folgenden Tatsachen:*

$$h_{\alpha+\beta}=h_\alpha+h_\beta;$$
$$N_{\alpha\beta}=N_{\beta\gamma}=N_{\gamma\alpha}$$

für drei Wurzeln α,β,γ, deren Summe $=0$ ist;

$$N_{\beta\gamma}N_{\alpha\delta}+N_{\gamma\alpha}N_{\beta\delta}+N_{\alpha\beta}N_{\gamma\delta}=0$$

für vier Wurzeln $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, deren Summe $=0$ ist und unter denen sich keine zwei entgegengesetzte befinden. $N_{\alpha\beta}$ ist reell und

$$N_{-\alpha,-\beta}=N_{\alpha\beta}.$$

Wenn $\alpha+\beta$ neben α und β eine Wurzel ist, verschwindet $N_{\alpha\beta}$ nicht.

Nachdem wir in § 4 die Parameter λ_i, jetzt die Parameter τ_α normiert haben, *fassen wir in der Gruppe $\mathfrak{a}$ allein diejenigen Elemente t ins Auge, deren Parameter λ_i rein imaginär sind und deren Parameter τ_α, $\tau_{-\alpha}$ für jedes Wurzelpaar α, $-\alpha$ konjugiert-komplexe Werte annehmen* (*Analogie der unitären Beschränkung*). Diese t bilden eine infinitesimale *Gruppe* $\mathfrak{k}$ und zwar eine Gruppe von r reellen Parametern. Denn es ist mit den alten Bezeichnungen

$$[st]=\sum_\alpha\{\alpha(\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_n)\cdot\tau_\alpha-\alpha(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\cdot\sigma_\alpha\}e_\alpha$$
$$+\sum_\alpha\sigma_\alpha\tau_{-\alpha}h_\alpha+\sum_\varrho\Big(\sum_{\alpha+\beta=\varrho}N_{\alpha,\beta}\sigma_\alpha\tau_\beta\Big)e_\varrho \tag{38}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$) ist eine Linearform der λ_i mit rationalen Koeffizienten; rum wird bei rein imaginären λ: $\bar{\alpha} = -\alpha$ sein. Die zweite Summe auf r rechten Seite von (38) ist gleich

$$\sum_{\alpha>0} (\sigma_\alpha \tau_{\alpha'} - \sigma_{\alpha'} \tau_\alpha) h_\alpha.$$

für alle Wurzeln ϱ die Zahlen $\varrho(h_\alpha) = \varrho_\alpha$ rational sind, gilt das gleiche für e Werte der λ-Parameter von $h = h_\alpha$. Nach dem letzten Hilfssatz ist endlich

$$N_{\alpha'\beta'} = \bar{N}_{\alpha\beta}.$$

us dem allen folgt in der Tat, daß mit s und t auch $[st]$ der linearen har $\mathfrak{a}_u$ angehört. Außerdem ist für die Elemente t von $\mathfrak{a}_u$ die Invariante r adjungierten Gruppe

$$-\varphi(t) = -Q(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) + \sum_\varrho \tau_\varrho \bar{\tau}_\varrho$$

sitiv definit.

Satz 6. *Durch Reellitätsbedingungen kann man aus der infinitesi-alen halb-einfachen Gruppe* $\mathfrak{a}$ *von* r *komplexen Parametern eine Unter-uppe* $\mathfrak{a}_u$ *von* r *reellen Parametern herausheben, deren adjungierte Gruppe ne reelle positiv-definite quadratische Form invariant läßt.*

Damit ist das Fundament gewonnen, um die Darstellungstheorie der uppe $\mathfrak{a}$ in ähnlicher Weise aufzubauen, wie es in den beiden ersten apiteln für die speziellen halb-einfachen Gruppen $\mathfrak{g}^0$, $\mathfrak{c}^0$, $\mathfrak{d}^0$ geschehen ist.

Anhang.

Beweis des Lieschen Theorems. Die von irgendwelchen Elementen (Vektoren er Matrizen) $e_1, e_2, \ldots, e_g$ aufgespannte lineare Schar aller Elemente von der Form $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_g e_g$ bezeichne ich stets mit $(e_1, e_2, \ldots, e_g)$. Eine Basis der auf-baren infinitesimalen Gruppe $\mathfrak{H}$ linearer Transformation $H_1, H_2, \ldots, H_n$ kann ich bestimmen, daß

$$(H_1, H_2, \ldots, H_{i-1}) = \mathfrak{H}_{i-1}$$

gezeichnete Untergruppe von $\mathfrak{H}_i$ ist. Ich bezeichne die willkürliche Matrix $\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \ldots + \lambda_{i-1} H_{i-1}$ von $\mathfrak{H}_{i-1}$ jetzt mit H und setze $H_i = C$. Um den eschen Satz sukzessive für die Gruppen $\mathfrak{H}_0 = 0, \mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_n$ zu beweisen, gilt es zusehen, daß er für $\mathfrak{H}_i$ richtig ist, wenn er für $\mathfrak{H}_{i-1}$ zutrifft. Es sei also e ein von verschiedener Vektor im Raume $\mathfrak{r}$, für welchen allgemein

$$He = \Lambda \cdot e$$

($\Lambda = \gamma_1 \lambda_1 + \ldots + \gamma_{i-1} \lambda_{i-1}$ eine Linearform der Parameter von H); man soll e bestimmen, daß es außerdem einer Gleichung

$$Ce = \gamma \cdot e$$

nügt. Man bilde

$$e_0 = e, \quad Ce_0 = e_1, \quad Ce_1 = e_2, \ldots .$$

ter diesen Vektoren sei e_g der erste, welcher von den vorigen linear abhängt. Man d eine Gleichung haben

$$f(C)e = 0,$$

wo

$$f(\zeta) = \zeta^g + \beta_1 \zeta^{g-1} + \ldots + \beta_g$$

ein gewisses Polynom vom Grade g ist.

Mit H gehört auch $H' = [HC]$ zu $\mathfrak{H}_{l-1}$. Der Wert von Λ für H' werde m Λ' bezeichnet. Wir bekommen dann

$$[0] \qquad \begin{aligned} H e_0 &= \Lambda \cdot e_0, \\ H e_1 &= HC e_0 = H' e_0 + CH e_0 \end{aligned}$$

und daraus vermöge der auf H und H' angewendeten Gleichung [0]:

$$[1] \qquad \begin{aligned} H e_1 &= \Lambda' e_0 + \Lambda \cdot e_1; \\ H e_2 &= HC e_1 = H' e_1 + CH e_1 \end{aligned}$$

und daraus vermöge der auf H und H' anzuwendenden Gleichung [1]

$$[2] \qquad H e_2 = (\Lambda'' e_0 + \Lambda' e_1) + (\Lambda' e_1 + \Lambda e_2) = \Lambda'' e_0 + 2\Lambda' e_1 + \Lambda e_2,$$

. . . . . .

Die lineare Vektormannigfaltigkeit $\mathfrak{e} = (e_0, e_1, \ldots, e_{g-1})$ ist invariant sowohl gege über jedem H als auch gegenüber C. Die Spur von H in ihr ist gleich $g \cdot \Lambda$, die Sp von H' also $= g \cdot \Lambda'$. H' setzt sich aber aus zwei Abbildungen dieser Mannigfalti keit, H und C, gemäß der Formel zusammen: $H' = HC - CH$. Darum ist ihre Sp $= 0$, und wir bekommen $\Lambda' = 0$,

$$(**) \qquad H e_i = \Lambda \cdot e_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, g-1$$

Ist γ irgendeine Wurzel von $f(\zeta)$:

$$f(\zeta) = (\zeta - \gamma) f^*(\zeta),$$

so hat der nicht-verschwindende Vektor $f^*(C)\, e$ nach (*) und (**) die gewünschte Eigenschaften.

Beweis des Satzes von Engel. Die Kette

$$\mathfrak{h}_0 = 0, \ \mathfrak{h}_1, \ \mathfrak{h}_2, \ \ldots, \ \mathfrak{h}_n = \mathfrak{h},$$

in der jedes Glied $\mathfrak{h}_{l-1}$ eine invariante Untergruppe des nächstfolgenden $\mathfrak{h}_l$ sein u die Parameterzahl von Schritt zu Schritt um 1 wachsen soll, wird *von unten* aufg baut. Man muß also zeigen: Ist $\mathfrak{h}_{l-1}$ eine auflösbare Untergruppe von $\mathfrak{h}$, so ka man ein Element e finden, 1. so daß $(\mathfrak{h}_{l-1}, e) = \mathfrak{h}_l$ wiederum eine Gruppe ist u 2. für jedes Element h von $\mathfrak{h}_{l-1}$ das Produkt $[eh]$ wiederum zu $\mathfrak{h}_{l-1}$ gehört. D Teil 1 folgt durch Anwendung des Lieschen Theorems auf die Gruppe der linear Transformationen $dx = [hx]$, deren von x durchlaufenes Substrat der Vektorrau $\mathfrak{h} \bmod \mathfrak{h}_{l-1}$ ist. In der Tat gehen zwei $\bmod \mathfrak{h}_{l-1}$ kongruente Vektoren x dur diese dem willkürlichen Element h von $\mathfrak{h}_{l-1}$ korrespondierende Abbildung über zwei gleichfalls $\bmod \mathfrak{h}_{l-1}$ kongruente Vektoren dx. Weil diese zu $\mathfrak{h}_{l-1}$ isomorp Transformationsgruppe nach Voraussetzung auflösbar ist, existiert ein Eleme $e \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{h}_{l-1}}$, für welches

$$[he] \equiv \gamma \cdot e \pmod{\mathfrak{h}_{l-1}},$$

γ eine Linearform der Parameter von h ist. $(\mathfrak{h}_{l-1}, e) = \mathfrak{h}_l$ ist dann in der Tat ei Gruppe. Das charakteristische Polynom von h innerhalb $\mathfrak{h}_l$ und darum auch inn halb $\mathfrak{h}$, $f(\zeta; h)$, enthält den Faktor $(\zeta - \gamma)$. Benutzen wir jetzt die Voraussetzu $f(\zeta; h) = \zeta^n$, so folgt $\gamma = 0$, und damit ist die Richtigkeit von 2. erkannt.

(Eingegangen am 11. Februar 1925.)

heorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen. III.

Von

H. Weyl in Zürich.

Kapitel IV.

Darstellung aller halb-einfachen Gruppen.

§ 1.

Das einzelne Element der Gruppe.

$\mathfrak{a}^0$ bedeute eine infinitesimale halb-einfache Gruppe von r Parametern, diejenige infinitesimale Gruppe, welche aus ihr durch die am Schluß vorigen Kapitels gekennzeichnete „unitäre Beschränkung" hervorgeht. zu ihren Elementen a adjungierten infinitesimalen linearen Transfor-tionen $dx = [ax]$ erzeugen eine kontinuierliche Gruppe linearer Trans-mationen $\tilde{\mathfrak{a}}$, bzw. $\tilde{\mathfrak{a}}_u$. Da zu $\tilde{\mathfrak{a}}_u$ nach Kapitel III, Satz 6 eine invariante inite quadratische Form gehört, ist $\tilde{\mathfrak{a}}_u$ ein *geschlossenes Gebilde.* Das nitesimale Element $h = h(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ der adjungierten Gruppe er-lt dem willkürlichen Element

$$x = h(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_\alpha \tau_\alpha e_\alpha$$

$\mathfrak{a}^0$ mit den „Hauptparametern" x_i und den „Nebenparametern" τ_α Zuwachs $dx = [hx]$, der sich aus den Formeln ergibt:

$$dx_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad d\tau_\alpha = \alpha \cdot \tau_\alpha .$$

daraus durch Iteration entstehende endliche Transformation (ε) von $\tilde{\mathfrak{a}}$:

$$x' = (\varepsilon)\, x\, (\varepsilon)^{-1},$$

man zweckmäßig durch e^h bezeichnet, lautet daher, in den Parametern gedrückt:

$$x_i' = x_i, \qquad \tau_\alpha' = e^\alpha \cdot \tau_\alpha .$$

Die „Hauptelemente“ (ε) bilden eine n-parametrige Abelsche Untergrupp in $\tilde{\mathfrak{a}}$. Gehört (ε) zu $\tilde{\mathfrak{a}}_u$, so sind die λ_i rein imaginär; wir schreiben dan $\lambda_i = 2\pi\sqrt{-1}\,\varphi_i$ und $2\pi\sqrt{-1}\,\alpha$ an Stelle von α. Es gilt:

Satz 1. *Jedes Element t von $\tilde{\mathfrak{a}}_u$ läßt sich in die Form bringen*

$$t = u^{-1}(\varepsilon)u, \tag{3}$$

wo u sowohl wie das Hauptelement (ε) gleichfalls zu $\tilde{\mathfrak{a}}_u$ gehören.

In den in Kapitel I und II behandelten Sonderfällen traf dieser Sa mit bekannten algebraischen Tatsachen zusammen. Hier soll er allgemei mittels der Kontinuitätsmethode durch die gleichen Rechnungen begründ werden, die uns früher zur Volumbestimmung dienten.

Man gehe nämlich von einem in der Form (3) dargestellten Element zu dem endlich benachbarten $t + dt$ über und suche (ε) und u dabei zu variieren, daß die Gleichung (3) bestehen bleibt. Die Abweichung d infinitesimalen Elementes $(t + dt)t^{-1}$ von der Identität werde mit δt b zeichnet, ebenso sei $du \cdot u^{-1} = \delta u$ gesetzt. Die in Kapitel I, § 6 ei geführten Begriffe werden sinngemäß übertragen. Wir finden analog der dort aufgestellten Gleichung (25):

$$u \cdot \delta t \cdot u^{-1} = h(2\pi i\, d\varphi_1, \ldots, 2\pi i\, d\varphi_n) + \{(\varepsilon)\,\delta u\,(\varepsilon)^{-1} - \delta u\}. \tag{4}$$

Sind δu_α die Nebenparameter von δu, so sind die Haupt- und Nebe parameter von $u \cdot \delta t \cdot u^{-1}$ also

$$2\pi\sqrt{-1}\,d\varphi_i, \quad \text{bzw.} \quad (e(\alpha) - 1)\,\delta u_\alpha. \tag{5}$$

Bei gegebenem Zuwachs dt bestimmen sich daraus eindeutig 1. die Änd rungen der „Drehwinkel“ φ_i von t oder die Änderung von (ε), und 2. δ und damit die Variationen der Parameter von u, wenn wir die Haup parameter von δu gleich 0 nehmen, d. h. festsetzen, daß der Übergan von u zu $u + du$ „senkrecht“ zur „Geraden“ $[u]$ erfolgen soll. Nur m vorausgesetzt werden, daß (ε) *nicht singulär* ist, daß nämlich $e(\alpha)$ f keine der Wurzeln α gleich 1, keiner der $r - n$ Wurzelwinkel α eine Vo drehung ist.

Es durchlaufe u die ganze Mannigfaltigkeit $\tilde{\mathfrak{a}}_u$, bzw. die durch „Pr jektion“ daraus entstehende Mannigfaltigkeit $[\tilde{\mathfrak{a}}_u]$ von n Dimension weniger, deren Elemente die „Geraden“ von $\tilde{\mathfrak{a}}_u$ sind, (ε) aber alle nic singulären Hauptelemente von $\tilde{\mathfrak{a}}_u$. Unter diesen Umständen beschrei $t = u^{-1}(\varepsilon)u$ ein *Gebiet* $\mathfrak{T}$ auf $\tilde{\mathfrak{a}}_u$. Denn gemäß unserer Rechnung, welc lehrt, daß die Funktionaldeterminante nicht verschwindet, gehört mit stets auch eine ganze Umgebung von t dem Bereiche $\mathfrak{T}$ an. Wegen d Geschlossenheit des Gebildes $\tilde{\mathfrak{a}}_u$, auf welchem u und (ε) variieren, ist je

ıdelement t_0 von $\mathfrak{T}$ gleichfalls in der Form (3) darstellbar, aber hier d nun wenigstens eines der $e(\alpha)$ gleich 1. Die *singulären Elemente t*, man aus (3) erhält, wenn u ganz $\tilde{\mathfrak{a}}_u$ durchläuft, (ε) hingegen nur die-gen Hauptelemente, für welche einer der Wurzelwinkel $\alpha = 0$ ist, bil- ein Kontinuum t. Wir haben erkannt, daß $\mathfrak{T}$ eines der durch t auf bestimmten Gebiete ist. Der Beweis von Satz 1 wird zu Ende geführt ch die Erkenntnis, daß das Kontinuum t *drei* Dimensionen weniger hat $\tilde{\mathfrak{a}}_u$ und folglich $\tilde{\mathfrak{a}}_u$ durch t nicht zerlegt wird.

Ist (ε) ein singuläres Hauptelement, für welches die Wurzel $\alpha = 0$ so kann man, ohne t zu ändern, u in (3) ersetzen durch irgendein ment von der Gestalt $s \cdot u$, wo s die $(n+2)$-parametrige Gruppe $\mathfrak{s}$ chläuft, deren infinitesimale Elemente sich linear aus den Haupt-nenten h und e_α, $e_{-\alpha}$ zusammensetzen. Denn für ein infinitesimales ment s^0 von $\mathfrak{s}$ stimmt $(\varepsilon)s^0(\varepsilon)^{-1}$ nach den Gleichungen (2) mit s^0 rein; und die Vertauschbarkeit mit (ε) überträgt sich von den infini-malen auf alle Elemente der Gruppe $\mathfrak{s}$. Die zu einem festen singu-en (ε) gehörigen Elemente von der Form $u^{-1}(\varepsilon)u$ bilden also nur eine $-n-2$)-dimensionale Mannigfaltigkeit, die singulären Hauptelemente ber eine $(n-1)$-dimensionale.

Nach (3) sind die $r-n$ Größen $e(\alpha)$ samt der n-fach zu rechnenden l 1 die charakteristischen Wurzeln, die Multiplikatoren der linearen nsformation t von $\tilde{\mathfrak{a}}_u$ (oder $\tilde{\mathfrak{a}}$); die $e(\alpha)$ sind also bis auf die Reihen-ge eindeutig durch t bestimmt.

Will man die analogen Überlegungen für die ganze Gruppe $\tilde{\mathfrak{a}}$, nicht unitär beschränkte $\tilde{\mathfrak{a}}_u$ durchführen, so muß man diejenigen Transfor-tionen t als singuläre ausnehmen, die nicht bloß n, sondern $n+1$ Mul-ikatoren $= 1$ besitzen. Sie bilden ein Kontinuum t von 1 *komplexen* ɹension weniger als $\tilde{\mathfrak{a}}$. Da infolgedessen $\tilde{\mathfrak{a}}$ durch t nicht zerlegt wird l die Randpunkte des analog wie oben definierten Gebietes $\mathfrak{T}$ sicher t gehören, ergibt sich auch hier das Resultat, das jedes nicht-singuläre ment t von $\tilde{\mathfrak{a}}$ sich mit Hilfe eines Elementes u und eines Haupt-nentes (ε) von $\tilde{\mathfrak{a}}$ in der Form (3) schreiben läßt. Auf die zu t ge-igen singulären Elemente überträgt sich diese Darstellungsweise aber ıt, denn sonst hätte t nicht 1, sondern 3 komplexe Dimensionen weniger $\tilde{\mathfrak{a}}$; hier treten ähnliche Komplikationen auf, wie sie die Elementar-ertheorie kennen lehrt.

Der Aufbau einer halb-einfachen Gruppe in § 1 des vorigen Kapitels g davon aus, daß ein beliebiges nicht-singuläres (infinitesimales) Element ı Hauptelement ernannt wurde. Wir verstehen jetzt, warum die Resul-davon unabhängig sind, auf welches nicht-singuläre Element t_0 unsere hl dabei fiel. Denn da man t_0 stets aus einem Hauptelement durch

Transformation mittels eines gewissen zu $\tilde{\mathfrak{a}}$ gehörigen u gewinnen kan kommt die Abänderung jener Wahl darauf hinaus, daß alle Elemente d Gruppe mittels des festen u transformiert, die Elemente x der infinites malen Gruppe $\mathfrak{a}^0$ dem Automorphismus $x' = u^{-1} x u$ unterworfen werde

§ 2.

Analysis situs. Volumbestimmung. Volle Reduzibilität.

Im vorigen Paragraphen legten wir, obschon es sich um reine Struktu fragen handelte, die adjungierte Gruppe der Betrachtung zugrunde, dam die Gruppe auch hinsichtlich ihrer Zusammenhangsverhältnisse genau fes gelegt war. $\tilde{\mathfrak{a}}_u$ ist nicht notwendig einfach zusammenhängend, ich b haupte aber:

Satz 2. *Ein gewisses endlichblättriges Überlagerungsgebilde über ist einfach zusammenhängend.*

Dieses universelle Überlagerungsgebilde $\mathfrak{a}_u$ ist als die wahre abstrak Gruppe zu betrachten, deren Darstellung durch lineare Transformation unser Problem ist. Jede Darstellung der infinitesimalen Gruppe $\mathfrak{a}^0$ liefe eine *eindeutige* Darstellung von $\mathfrak{a}_u$.

Ein Element t auf $\tilde{\mathfrak{a}}_u$ beschreibe eine geschlossene Kurve $\mathfrak{K}$, welc das $(r-3)$-parametrige Kontinuum $\mathfrak{t}$ der singulären Elemente nicht trif Ich verfolge die stetige Änderung der Drehwinkel φ_i von t bei Durc laufung der Kurve und die damit verbundene stetige Änderung der Wurze

$$\alpha = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \ldots + a_n \varphi_n$$

und der Größen $e(\alpha)$. Ich behaupte: Kehren alle $e(\alpha)$ zu ihren Ausgang werten zurück, so kann ich die Kurve $\mathfrak{K}$ auf $\tilde{\mathfrak{a}}_u$ stetig in den Einheit punkt zusammenziehen. Denn kehren die $e(\alpha)$ zu ihren Ausgangswert zurück, so gilt das gleiche für die Wurzeln α selber, weil $e(\alpha)$ niem den Wert 1 passiert, α niemals gleich einem Vollwinkel wird. In (hängen u und die aus n Einsen und den Größen $e(\alpha)$ bestehende Diagon matrix (ε) stetig von dem Kurvenparameter ab. Die Deformation nehm ich so vor, daß u vom Deformationsparameter σ unabhängig bleibt, φ_i doch ersetzt wird durch $\sigma \cdot \varphi_i$; σ nimmt stetig von 1 bis 0 ab[1]). — Da

[1]) Wählen wir als Ausgangspunkt für die zu durchlaufenden geschlossen Kurven $\mathfrak{K}$ ein Hauptelement t_0, dessen $e(\alpha)$ nicht bloß von 1, sondern auch u untereinander verschieden sind, und startet u als Einheitsmatrix, so ist der Endw von u nach Durchlaufung der Kurve eine mit t_0 vertauschbare Matrix, zerfällt s in ein n-zeiliges und $r-n$ einzeilige Quadrate, die sich längs der Hauptdiagon aneinanderreihen. Infolgedessen bleibt $\mathfrak{K}$ bei der geschilderten Deformation e *geschlossene* Kurve. Eine analoge Bemerkung wäre schon der topologischen Unt suchung der Drehungsgruppe in Kapitel II hinzuzufügen gewesen.

) bei Fortsetzung längs einer geschlossenen Kurve $\mathfrak{K}$ auf $\tilde{\mathfrak{a}}_u$ höchstens e Permutation erfahren, ist damit der Satz bewiesen; das einfach zu-mmenhängende Überlagerungsgebilde ist höchstens $(r-n)!$-blättrig.

Weil $\mathfrak{a}_u$ geschlossen ist, gilt der Hauptsatz von § 1 so gut für $\mathfrak{a}_u$ für $\tilde{\mathfrak{a}}_u$.

Das Volumen $d\Omega$ desjenigen Teiles von $\mathfrak{a}_u$, auf welchem die Elemente t gen, deren Drehwinkel φ_i dem Spielraum $\varphi_i \ldots \varphi_i + d\varphi_i$ angehören, wird rechnet auf Grund der Gleichung (4) bzw. (5). Die Volummessung auf der rch Projektion entstehenden Mannigfaltigkeit $[\mathfrak{a}_u]$ ist möglich, weil der ergang von dem beliebigen Element δu der infinitesimalen Gruppe $\mathfrak{a}^0$ zu

$$\delta u' = (\varepsilon)\,\delta u\,(\varepsilon)^{-1}$$

ttels einer zu $\tilde{\mathfrak{a}}_u$ gehörigen Haupttransformation (ε) volumtreu ist. Denn multiplizieren sich dabei die Nebenparameter δu_α von δu mit den Fak-en $e(\alpha)$; und da die Wurzeln α paarweise einander entgegengesetzt gleich d, ist das Produkt der Faktoren $= 1$. Dieselbe Tatsache genügt nach er Bemerkung in § 3 des II. Kapitels, um einzusehen, daß der Übergang

$$\delta t \to u \cdot \delta t \cdot u^{-1}$$

imodular ist. Somit erhalten wir, unter Fortlassung eines konstanten n den Drehwinkeln unabhängigen Faktors,

$$d\Omega = \prod_\alpha (e(\alpha) - 1)\, d\varphi_1 d\varphi_2 \ldots d\varphi_n$$

er

$$d\Omega = \Delta\bar{\Delta}\, d\varphi_1 d\varphi_2 \ldots d\varphi_n,$$

$$\Delta = \prod_\alpha{}^{+} \varepsilon\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

s letzte Produkt erstreckt sich nur uber die *positiven* Wurzeln.

Die folgenden beiden Tatsachen:

1. $\mathfrak{a}_u$ ist geschlossen;
2. eine Linearform der Haupt- und Nebenparameter λ_i, τ_α des willkürlichen Elementes von $\mathfrak{a}^0$ verschwindet identisch, wenn sie unter der unitären Einschränkung

$$\lambda_i \text{ rein imaginär}, \quad \tau_{-\alpha} = \bar{\tau}_\alpha$$

verschwindet,

ren auf bekannten Wegen zu dem

Satz 3. *Jede Darstellung von $\mathfrak{a}^0$ durch lineare Transformationen fällt in eindeutig bestimmter Weise in irreduzible Darstellungen.*

§ 3.

Bestimmung der Dimensionszahl und Charakteristik einer irreduzible Darstellung von gegebenem höchsten Gewicht.

Die Hauptparameter λ_i mögen so gewählt sein — sie sind dadur bis auf eine ganzzahlige unimodulare Transformation bestimmt —, d eine Linearform Ξ derselben dann und nur dann ganzzahlige Koeffizient besitzt, wenn $\frac{2\,\Xi_\alpha}{\alpha_\alpha}$ für jede Wurzel α eine ganze Zahl ist („ganzzahli Form", Kapitel III, § 4). Die Wurzeln α selber sind ganzzahlige Forme Diejenigen Linearformen der λ_i, welche aus einer, Λ, durch die Substit tionen S der endlichen Gruppe (S) hervorgehen (Kapitel III, § 4), mög zu Λ *äquivalent* heißen. Schon im vorigen Kapitel erkannten wir:

Satz 4. *Die in einer irreduziblen Darstellung von* $\mathfrak{a}^0$ *vorkomme den Gewichte sind ganzzahlige Formen. Mit einer Linearform treten au immer die äquivalenten als Gewichte der gleichen Multiplizität auf. D höchste Gewicht ist demnach eine ganzzahlige Linearform, die von kein ihrer äquivalenten übertroffen wird. Es existieren nicht zwei inäquivalen irreduzible Darstellungen von demselben höchsten Gewicht.*

Der letzte Satz ist nach Cartan wie in Kap. I, § 3 zu beweisen.

Bei Beschränkung auf $\mathfrak{a}_u$ ersetzen wir die Parameter λ_i durch d Winkelvariablen φ_i $(\lambda_i = 2\pi\sqrt{-1}\,\varphi_i)$. Durchläuft

$$\Lambda = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_n\lambda_n$$

die sämtlichen vorkommenden Gewichte in der richtigen Multiplizität, ist die der Darstellung entsprechende *primitive Charakteristik*

$$\chi = \sum_{\Lambda} e^{\Lambda} = \sum e(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2 + \ldots + m_n\varphi_n).$$

Die endliche Fourierreihe χ ist invariant gegenüber den Substitutionen d Gruppe (S). Nach I. Schur gilt unter Verwendung des Integration elementes (6)

$$(9) \qquad \frac{1}{\Omega}\int \chi(\varphi)\chi(-\varphi)\,d\Omega = 1 \quad \text{mit} \quad \Omega = \int d\Omega$$

und für die Charakteristiken χ, χ' zweier inäquivalenter irreduzibler Da stellungen

$$(10) \qquad \int \chi(\varphi)\chi'(-\varphi)\,d\Omega = 0.$$

Um auf Grund dieser Orthogonalitätsrelationen die Charakteristik zu berechnen, liegt es nahe, das Produkt

$$(11) \qquad \chi\cdot\Delta = \xi$$

zuführen. Das ist eine endliche Fourierreihe, die sich gegenüber der uppe (S) nicht wie χ symmetrisch, sondern *alternierend* verhält.

Zunächst nämlich ist Δ eine *Fourierreihe*, d. h. eine endliche lineare mbination von Termen der Gestalt $e(\Phi)$, wo die Φ *ganzzahlige* Linearmen der Drehwinkel φ_i bedeuten. Um dies einzusehen, müssen wir gen, daß nicht erst die Summe $\Sigma^+ \varrho$ der positiven Wurzeln, sondern eits die Hälfte davon eine ganzzahlige Form

$$\Phi^0 = r_1 \varphi_1 + r_2 \varphi_2 + \ldots + r_n \varphi_n$$

, oder daß für jede Wurzel α

$$\sum_{\varrho}^{+} \frac{\varrho_u}{\alpha_a} \tag{2}$$

e ganze Zahl ist. Beweis: Zu jeder positiven Wurzel ϱ gehört die aus durch die Substitution S_α hervorgehende Wurzel

$$\varrho' = \varrho - \frac{2\varrho_a}{\alpha_a}\alpha \quad \text{mit} \quad \varrho_a' = -\varrho_a.$$

eselbe Substitution verwandelt ϱ' in ϱ. In (12) kommt neben ϱ die urzel $\tilde{\varrho} = +\varrho'$ oder $-\varrho'$ vor, je nachdem ϱ' positiv oder negativ ist. *ersten Fall* liefert das Wurzelpaar $\varrho, \tilde{\varrho}$ zur Summe (12) den Beitrag 0. enn ausnahmsweise $\tilde{\varrho}$, d. i. $\varrho' = \varrho$, also $\varrho_\alpha = 0$ ist, bleibt dies gültig; r Beitrag der *einen* Wurzel ϱ ist dann ebenfalls $= 0$. *Im zweiten ll* ist, $\tilde{\varrho} \neq \varrho$ vorausgesetzt, der Beitrag des Wurzelpaares $\varrho, \tilde{\varrho}$ die nze Zahl

$$\frac{\varrho_\alpha}{\alpha_\alpha} + \frac{\tilde{\varrho}_\alpha}{\alpha_\alpha} = \frac{2\varrho_\alpha}{\alpha_\alpha}.$$

kann hier nur dann $= \varrho$ sein, wenn ϱ ein Multiplum von α, mithin[2]) $= \pm\alpha$ ist; der Beitrag dieses Gliedes zu der Summe (12) ist ± 1.

Δ ist aber nicht nur eine Fourierreihe, sondern geht durch die Substitution S_α in $-\Delta$ über. Wir können die Wurzel α als positiv voraus-

---

[2]) Denn neben $\pm\alpha$ kann nicht ein weiteres konstantes Multiplum $c\alpha$ von α ichfalls als Wurzel auftreten. Man stelle sonst nämlich diejenige α-Serie von urzeln auf, zu welcher $c\alpha$ gehört:

$$\ldots, \quad (c-1)\alpha, \quad c\alpha, \quad (c+1)\alpha, \quad \ldots$$

e bekannte Schlußweise lehrt, daß der Schwerpunkt der Zahlenreihe $\ldots, c-1, c, -1, \ldots$ im Nullpunkt liegt. c ist also entweder eine ganze Zahl oder eine halbnze. Daß der erste Fall ausgeschlossen ist, wurde in Kap. III, Satz 4 gezeigt. Ist halbganz, so kommt $\frac{\alpha}{2}$ in der Reihe (*) vor. Es ist aber unmöglich, daß neben auch $\alpha = 2 \cdot \frac{\alpha}{2}$ als Wurzel auftritt.

setzen. Im Produkt (7) verwandelt sich der eine Faktor $s\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ durch S in $s\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = -s\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Ist $\varrho \neq \alpha$ und ϱ' negativ, so liefert das positiv Wurzelpaar $\varrho, \tilde{\varrho}$ zu dem Produkt den Beitrag $s\left(\frac{\varrho}{2}\right) s\left(-\frac{\varrho'}{2}\right)$, der durc S_α übergeht in $s\left(\frac{\varrho'}{2}\right) s\left(-\frac{\varrho}{2}\right)$, also ungeändert bleibt. Ist hingegen positiv, so ist der entsprechende Beitrag

$$s\left(\frac{\varrho}{2}\right) s\left(\frac{\varrho'}{2}\right), \quad \text{bzw.} \quad s\left(\frac{\varrho}{2}\right),$$

je nachdem $\varrho \neq \varrho'$ oder $\varrho = \varrho'$ ist; er ist wiederum invariant gege über S_α.

Eine Substitution der Gruppe (S) heiße *gerade* oder *ungerade*, nachdem sie Δ in $+\Delta$ oder $-\Delta$ überführt. Das Produkt einer gerad Anzahl von Erzeugenden S_α ist gerade, das Produkt einer ungeraden A zahl ungerade. Mit Δ ist auch (11) eine *alternierende Fourierreihe*, d. eine solche, welche bei den geraden Substitutionen von (S) ungeänd bleibt, bei den ungeraden ihr Vorzeichen wechselt. Jede alternieren Fourierreihe ist eine lineare Kombination aus den *Elementarsummen*

$$(13) \quad \xi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = \sum_S \pm e(\Phi S); \qquad \Phi = l_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + l_n \varphi$$

Darin bedeutet Φ eine ganzzahlige Form, welche höher steht als alle il äquivalenten. (Diese sind dann samt und sonders untereinander v schieden.) Die Summe erstreckt sich alternierend über alle Substitutione der Gruppe (S).

Jede alternierende Fourierreihe, inbesondere jede Elementarsumme ξ ist in dem Sinne durch Δ teilbar, daß der Quotient wiederum eine e liche — gegenüber (S) symmetrische — Fourrierreihe ist. Der Nachw beruht auf dem

Hilfssatz: *Eine Fourierreihe ist dann und nur dann teilbar du* $e(\alpha) - 1$, *wenn sie für alle Argumentwerte* φ_i *verschwindet, die* α z *Vollwinkel machen.*

Jedes Glied $e(\Phi)$ einer Fourierreihe η nimmt bei der Substitut S_α einen Faktor $e(g\alpha)$ an, $g = -\frac{2\Phi_\alpha}{\alpha_\alpha} =$ ganze Zahl. Es ist also $\eta S_\alpha =$ wenn α ein Vollwinkel ist. Außerdem gilt, wenn η alternierend ist, id tisch in allen Argumenten $\eta S_\alpha = -\eta$. Folglich muß in diesem F $\eta = 0$ sein für alle Argumentwerte, die α zum Vollwinkel machen. N dem Hilfssatz kann man daher setzen

$$\eta = (e(\alpha) - 1)\eta^*, \qquad \eta^* = \text{Fourierreihe}.$$

Ist β neben α eine zweite positive Wurzel, so verschwindet, weil die Ebenen $\beta = 0$ und $\alpha = 0$ im n-dimensionalen Raum der Winkelvariablen φ_i nicht zusammenfallen, mit η auch η^* auf allen Ebenen: $\beta =$ ganze Zahl. Darum enthält η^* den Faktor $e(\beta) - 1$. So ergibt sich schließlich, daß η durch das Produkt

$$\prod_{\alpha}^{+}(e(\alpha) - 1) \quad \text{und damit durch } \Delta$$

teilbar ist.

Im Hilfssatz möge α irgendeine ganzzahlige Form bedeuten. Ist g der größte gemeinsame Teiler ihrer Koeffizienten, so kann man voraussetzen, daß $\varphi_1 = \frac{\alpha}{g}$ ist; denn dies ist durch eine unimodulare Transformation immer zu erreichen. η ist ein Polynom[3]) in $z = e(\varphi_1)$, dessen Koeffizienten Fourierreihen der Argumente $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sind. Nach Voraussetzung verschwindet dieses Polynom für die g-ten Einheitswurzeln z, welche der Gleichung $z^g = 1$ genügen, und enthält darum den Faktor $z^g - 1$ oder $e(\alpha) - 1$.

Zu jeder Elementarsumme (13) kann man also die gegenüber (S) symmetrische Fourierreihe

$$\frac{\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n)}{\Delta} = \chi(m_1, m_2, \ldots, m_n) \tag{14}$$

bilden. Da $e(\Phi)$,

$$\Phi = l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2 + \ldots + l_n\varphi_n, \tag{15}$$

das höchste Glied in $\xi(l)$ und $e(\Phi^0)$,

$$\Phi^0 = r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2 + \ldots + r_n\varphi_n,$$

das höchste Glied in Δ ist, wird das höchte Glied $e(\Psi)$,

$$\Psi = m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2 + \ldots + m_n\varphi_n, \tag{16}$$

von $\chi(m)$ gegeben durch

$$\Psi = \Phi - \Phi^0, \quad m_i = l_i - r_i.$$

Weil $\chi(m)$ symmetrisch ist, kann Ψ nicht tiefer stehen als irgendeine der äquivalenten Formen ΨS.

Für eine beliebige Linearform Ξ ist die Summe aller ΞS gleich 0. Denn diese Summe ist eine Linearform H, welche gegenüber allen Substitutionen S_α invariant ist, d. h. für jede Wurzel α die Gleichung $H_\alpha = 0$ erfüllt. Darum ist nach einem in § 4 des vorigen Kapitels erbrachten Beweis in der Tat $H = 0$. Wird also Ξ von keiner seiner Äquivalenten ΞS der Höhe nach übertroffen, so ist Ξ notwendig 0 oder positiv.

---

[3]) In etwas erweitertem Sinne: lineare Kombination endlichvieler ganzzahliger (nicht notwendig positiver) Potenzen von z.

Mithin ist (16) nicht negativ. Ordnet man verschiedene Fourie reihen nach der Höhe ihres höchsten Gliedes, so ist also keine Elementa summe $\xi(l)$ niedriger als Δ. Doch Δ ist als alternierende Fourierreil gleich $\xi(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ + niedrigeren Elementarsummen. Da solche nie rigeren Elementarsummen nicht existieren, ergibt sich, daß Δ selbst d niedrigste Elementarsumme,

$$\Delta = \xi(r_1, r_2, \ldots, r_n),$$

sein muß. — Ist umgekehrt (16) eine vorgegebene ganzzahlige Form, d von keiner ihrer äquivalenten der Höhe nach übertroffen wird, so ste $\Phi = \Psi + \Phi^0$ höher als alle übrigen dazu äquivalenten Formen. Man ka daher nach (11) dasjenige $\chi(m)$ bilden, dessen höchstes Glied das gegebe $e(\Psi)$ ist.

Für das Produkt zweier verschiedener Elementarsummen findet m die *Orthogonalitätsrelation*

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 \xi\ l_1, l_2, \ldots, l_n)\, \bar{\xi}(l_1', l_2', \ldots, l_n')\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_n = 0. \tag{17}$$

Denn in keinem Glied des Produktes

$$e(\Phi S) \cdot e(-\Phi' S') = e(\Phi S - \Phi' S')$$

ist die ganzzahlige Form $\Phi S - \Phi' S' = 0$, weil ein ΦS nicht mit ein $\Phi' S'$ übereinstimmen kann, ohne daß die *ganze* Gruppe äquivalen Formen ΦS mit der ganzen Gruppe $\Phi' S$ zusammenfällt und daher a in beiden Gruppen die höchsten Formen Φ bzw. Φ' übereinstimm Ähnlich ergibt sich als Wert des Integrals

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 \xi(l_1, l_2, \ldots, l_n)\, \bar{\xi}(l_1, l_2, \ldots, l_n)\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_n \tag{18}$$

die Ordnung der Gruppe (S). Verwendet man die letzte Gleichung besondere für die niedrigste Elementarsumme, $l_i = r_i$, so findet man, das Gesamtvolumen $\Omega = \int d\Omega$ mit dieser Ordnungszahl übereinstim Darum kann man an Stelle von (18) auch schreiben

$$\frac{1}{\Omega} \int \chi(m)\, \bar{\chi}(m)\, d\Omega = 1, \tag{19}$$

während (17) gleichbedeutend ist mit der Gleichung

$$\int \chi(m)\, \bar{\chi}(m')\, d\Omega = 0 \qquad (m + \tag{20}$$

die Größen $\chi(m)$ genügen denselben Orthogonalitätsrelationen, we nach (9), (10) für die Charakteristiken der irreduziblen Darstellu bestehen.

Daraus soll bewiesen werden, daß jene primitiven Charakteristiken mit den $\chi(m)$ identisch sind. „Mögliches höchstes Gewicht" ist jede ganzzahlige Linearform (16), die von keiner ihrer äquivalenten übertroffen wird. Ist (16) das höchste Gewicht der primitiven Charakteristik χ, so ist die alternierende Fourierreihe $\xi = \chi \cdot \Delta$ additiv zusammengesetzt aus Elementarsummen (13), deren höchste zu den Zahlen $l_i = m_i + r_i$ gehört. Es gilt also eine Gleichung

$$\chi = c\,\chi(m) + c'\,\chi(m') + \ldots, \tag{21}$$

wo der erste Koeffizient $c \neq 0$ ist und die folgenden Glieder $\chi(m'), \ldots$ niedriger stehen als $\chi(m)$. In den früher behandelten Sonderfällen habe ich hieraus, aus den Orthogonalitätsrelationen (9), (10) und den entsprechenden für die Größen $\chi(m)$ durch induktives Fortschreiten von niedrigeren zu höheren Gewichten die Gleichung $\chi = \chi(m)$ erschlossen, indem ich mich auf die von Cartan sichergestellte Tatsache stützte, daß zu jedem möglichen höchsten Gewicht wirklich eine irreduzible Darstellung gehöre. Dadurch erschien die Bestimmung der Charakteristik *einer* irreduziblen Darstellung an die Existenz und Beherrschung *aller* gebunden. Direkter kommt man zum Ziel auf Grund der arithmetischen Bemerkung, daß die Koeffizienten $c, c', \ldots$ in (21) ganze Zahlen sind. Denn die Fourierreihe ξ hat ganzzahlige Koeffizienten, ebenso jede der Elementarsummen $\xi(l)$. Außerdem ist aber der Koeffizient des höchsten Gliedes in $\xi(l)$ gleich 1. Daraus ergibt sich in der Tat Glied für Glied die Ganzzahligkeit von $c, c', \ldots$. Die Beziehung (9) aber liefert mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen für die $\chi(m)$ die Gleichung

$$1 = c^2 + c'^2 + \ldots.$$

Darum muß

$$c = \pm 1, \quad c' = 0, \quad \ldots$$

sein. Da alle Koeffizienten von χ, insbesondere der des höchsten Gliedes, positive ganze Zahlen sind, ist notwendig $c = +1$, $\chi = \chi(m)$. Von neuem ist damit der Cartansche Satz bewiesen, daß das höchste Gewicht in einer irreduziblen Darstellung die Multiplizität 1 besitzt, und daß nur *eine* irreduzible Darstellung von gegebenem höchsten Gewicht existieren kann. Denn der Koeffizient des höchsten Gliedes in $\chi(m)$ ist $= 1$; und gäbe es zwei inäquivalente irreduzible Darstellungen vom höchsten Gewicht (16), so müßten nach unserem Resultat ihre Charakteristiken χ und χ' beide $= \chi(m)$ sein; und das widerstreitet der Relation (10) (oder dem Burnsideschen Theorem).

Aus der Charakteristikenformel $\chi = \chi(m)$ ermittelt man die *Dimensionszahl*, indem man alle Drehwinkel $\varphi_i = 0$ setzt. Wir führen die

Berechnung folgendermaßen durch. In Kap. III, § 4 lernten wir eine positiv-definite, gegenüber den Substitutionen der Gruppe (S) invariante quadratische Form

$$G(x) = \sum_{ik} g_{ik} x_i x_k \qquad (g_{ki} = g_{ik})$$

im Gebiete der willkürlichen Linearformen $x_1 \varphi_1 + x_2 \varphi_2 + \ldots + x_n \varphi_n$ kennen. Gleichzeitig mit ihr trat die reziproke Form

$$Q(\varphi) = \sum_{ik} q_{ik} \varphi_i \varphi_k \; (= \sum_{\varrho} \varrho^2)$$

auf. Wir setzen allgemein

$$x_i' = \sum_k g_{ik} x_k, \qquad x_i = \sum_k q_{ik} x_k'$$

und machen unter Benutzung einer einzigen Variablen φ in $\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ die Substitution $\varphi_i = r_i' \varphi$. Das höchste Glied in $\xi(l)$ lautet dann

$$e(\varphi \sum_i l_i r_i') = e(\varphi \sum_{ik} q_{ik} r_i' l_k').$$

Wegen des invarianten Charakters der Form Q geht

$$\sum_{ik} q_{ik} r_i' l_k'$$

durch Ausübung einer zu (S) gehörigen Transformation S auf die Größen r_i' in derselben Ausdruck über wie durch Ausübung der inversen S^{-1} auf die l_i'. Infolgedessen hat die alternierende Summe

$$\sum_S \pm e(\varphi \sum_{ik} q_{ik} r_i' l_k') S$$

den gleichen Wert, ob man nun die Operationen S auf die Größen r_i' oder auf die Größen l_i' ausübt. Mit andern Worten: die Elementarsumme $\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ geht durch die Substitution $\varphi_i = r_i' \varphi$ in dieselbe Funktion von φ über wie $\xi(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ durch die Substitution $\varphi_i = l_i'$. Weil aber

$$\xi(r_1, r_2, \ldots, r_n) = \prod_a^+ s\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

ist, kommt für $\varphi_i = r_i' \varphi$:

$$\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = \prod_a^+ s\left(\frac{\varphi}{2} G(l, a)\right),$$

wo sich das Produkt rechts über alle Systeme ganzer Zahlen $a = a_1, a_2, \ldots,$ erstreckt, denen positive Wurzeln

$$\alpha = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \ldots + a_n \varphi_n$$

korrespondieren. Für $\varphi_i = r_i' \varphi$, φ unendlich klein, gilt darum

$$\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n) \sim (2\pi i \varphi)^{\frac{r-n}{2}} \cdot \prod_a^+ G(l, a).$$

Daraus findet man als Wert von

$$\chi(m) = \frac{\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n)}{\xi(r_1, r_2, \ldots, r_n)}$$

für verschwindende Drehwinkel φ_i:

$$N_m = \frac{\prod_a^+ G(l, a)}{\prod_a^+ G(r, a)}.$$

Satz 5. *Die Charakteristik der irreduziblen Darstellung vom höchsten Gewicht*

$$m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2 + \ldots + m_n\varphi_n$$

ist

$$\chi = \frac{\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n)}{\Delta} = \frac{\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n)}{\xi(r_1, r_2, \ldots, r_n)}.$$

$\xi(l)$ *bedeutet die alternierend über alle Substitutionen* S *der Gruppe* (S) *zu erstreckende Elementarsumme*

$$\sum_S \pm e(\Phi S), \qquad \Phi = l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2 + \ldots + l_n\varphi_n.$$

$\Delta = \xi(r)$ *ist die niedrigste dieser Elementarsummen,*

$$\Phi^0 = r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2 + \ldots + r_n\varphi_n$$

(gleich der halben Summe aller positiven Wurzeln) die niedrigste ganzzahlige Form, welche höher steht als alle ihre äquivalenten. Die ganzen Zahlen l_i *sind* $= m_i + r_i$ *zu nehmen. Die Dimensionszahl jener Darstellung beträgt*

$$N = \prod_a \frac{G(l, a)}{G(r, a)} = \prod_a \frac{\Phi_a}{\Phi_a^0},$$

wo das Produkt sich über alle Wurzeln

$$\alpha = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots + a_n\varphi_n$$

in solcher Weise erstreckt, daß jedes Paar entgegengesetzt gleicher Wurzeln $\alpha, -\alpha$ *nur durch einen Faktor vertreten ist.*

§ 4.

Über die Konstruktion aller irreduziblen Darstellungen.

Es gilt endlich einzusehen:

Satz 6. *Zu jeder ganzzahligen Linearform* Ψ*, die von keiner ihrer äquivalenten übertroffen wird, gehört eine irreduzible Darstellung, deren höchstes Gewicht* Ψ *ist.*

Dies ist bereits von Cartan bewiesen worden[4]). Aber seine Konstruktion gründet sich auf die explizite Herstellung aller einfachen Gruppen

[4]) Cartan II.

und muß für jede Gruppe besonders durchgeführt werden Er zeigt i jedem Falle, daß unter den möglichen höchsten Gewichten n angegebe werden können: $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$, aus denen sich jedes linear mittels ganze nicht-negativer Koeffizienten p_i kombinieren läßt:

$$p_1\Psi_1 + p_2\Psi_2 + \ldots + p_n\Psi_n \qquad (p_i \geqq 0) \tag{22}$$

Es gelingt ihm, die irreduziblen Darstellungen ausfindig zu machen, welch zu diesen höchsten Gewichten $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ gehören. Durch Komposi tion gewinnt man daraus, wie wir wissen, eine Darstellung mit dem höch sten Gewicht (22), und aus ihr läßt sich eine irreduzible mit demselbe höchsten Gewicht abspalten. Cartans Methode besteht also in eine direkten algebraischen Konstruktion; sie baut die Darstellungen von unte her durch Komposition auf. Die halb-einfachen Gruppen werden aus de einfachen zusammengesetzt.

Ein anderer Weg, den man einschlagen kann, ist der des Abbau von vornherein bekannter Darstellungen. Es liegt nahe, als Ausgangspunk wiederum die adjungierte Gruppe $\tilde{\mathfrak{a}}$ zu benutzen und durch Reduktio dieser Darstellung und ihrer Potenzen die irreduziblen zu konstruiere Statt der Potenzen kann man allgemeiner jede Darstellung der volle linearen Gruppe $\mathfrak{g}_{(r)}$ in r Dimensionen verwenden; denn eine solche liefe natürlich immer auch eine Darstellung der in $\mathfrak{g}_{(r)}$ enthaltenen Untergruppe $\tilde{\mathfrak{a}}$ Aber auf diesem Wege wird man nur solche irreduzible Darstellungen g winnen, welche auf $\tilde{\mathfrak{a}}$ eindeutig sind.

Der richtige Ausgangspunkt für den Abbau liegt nicht in der adju gierten Gruppe, sondern in der sogenannten *regulären Darstellung*, d Frobenius in der Theorie der endlichen Gruppen zu analogem Zweck verwendet hat. Sie liefert durch ihre Reduktion mit einem Schlage al irreduziblen Darstellungen. Ihr Substrat kann deshalb selbstverständlic nicht ein Raum von endlich vielen Dimensionen sein, sondern sie ist ei Gruppe linearer Transformationen im „Raume" aller eindeutigen stetige Funktionen $\eta(s)$, deren Argument s die geschlossene einfach zusamme hängende Gruppenmannigfaltigkeit $\mathfrak{a}_u$ durchläuft. Und zwar entspricht de Elemente s_0 von $\mathfrak{a}_u$ die Transformation $T(s_0)$: $\eta \to \eta'$ jenes Funktiona raumes, welche durch die Gleichung

$$\eta(s) = \eta'(s_0^{-1}\, s)$$

gegeben wird. Man sieht sofort, daß für irgend zwei Elemente s_0, t_0

$$T(s_0)\, T(t_0) = T(s_0\, t_0)$$

gilt. Durch die Reduktion dieser regulären Darstellung kommt man, anal wie in der Frobeniusschen Theorie der Gruppencharaktere operieren zu dem Ergebnis:

Satz 6a. *Die primitiven Charakteristiken bilden ein (zum Integrationselement $d\Omega$ gehöriges) vollständiges Orthogonalsystem für die Gesamtheit der auf $\mathfrak{a}_u$ eindeutigen Klassenfunktionen.*

Das ist die natürliche, ohne Fallunterscheidungen durchführbare, freilich transzendente Konstruktionsmethode. In Verbindung mit den uns bekannten Eigenschaften der primitiven Charakteristiken geht aus dem angegebenen Resultat hervor:

1. Zwei Hauptelemente (ε), (ε'), für welche die (bis auf eine unimodulare Transformation bestimmten) normierten Winkelvariablen mod 1 gleiche Werte haben:

$$\varphi_i \equiv \varphi_i' \pmod 1,$$

fallen auf $\mathfrak{a}_u$ zusammen.

2. Zwei Hauptelemente (ε), (ε') sind innerhalb $\mathfrak{a}_u$ konjugiert, wenn das eine aus dem andern durch eine auf die Winkelvariablen auszuübende Substitution S der Gruppe (S) hervorgeht; oder zu jedem solchen S gibt es ein Element u_S von $\mathfrak{a}_u$ derart, daß

$$(\varepsilon)S = u_S^{-1}(\varepsilon)u_S$$

ist.

Die Sätze 6 und 6a kommen zur Übereinstimmung, wenn von diesen beiden Behauptungen die Umkehrung zutrifft. Sie gilt es also direkt zu beweisen. Ich verzichte vorläufig auf die exakte Durchführung dieser ganzen Methode, weil sie mir beim gegenwärtigen Stand der Untersuchung neben zu großen Kraftaufwand an ein Ziel zu verschwenden scheint, das bereits auf anderm Wege erreicht ist. Doch hoffe ich, daß sich das bald ändern wird; gewisse Ansätze von Cartan, welche an die vorliegende Arbeit anschließen und von denen der Verf. brieflich Kenntnis hat, versprechen in dieser Hinsicht merkliche Erleichterungen.

§ 5.

Beziehung zur Invariantentheorie.

Es sei $\mathfrak{a}$ eine gegebene Gruppe homogener linearer Transformationen von m Dimensionen. Liegen eine oder mehrere willkürliche Formen bestimmter Ordnung der m-gliedrigen Variablenreihen $x, y, \ldots$ vor, so versteht man unter einer *Invariante* dieser Formen gegenüber der Gruppe $\mathfrak{a}$ bekanntlich eine ganze rationale Funktion der Koeffizienten jener Formen, welche homogen ist in den Koeffizienten jeder einzelnen Form und sich nicht ändert, wenn man die Formen durch jene ersetzt, die aus ihnen durch eine willkürliche, kogredient auf die Variablenreihen $x, y, \ldots$ ausübende Transformation s der Gruppe $\mathfrak{a}$ hervorgehen. Nun erleiden aber z. B. die Koeffizienten einer willkürlichen kubischen Form der x unter dem Einfluß der Variablentransformationen gleichfalls eine Gruppe linearer

Transformationen, die auf $\mathfrak{a}$ isomorph bezogen ist. Wir können das Problem daher so fassen und zugleich verallgemeinern. Es liegen mehrere Darstellungen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ der in abstracto gegebenen Gruppe $\mathfrak{a}$ durch lineare Transformationen vor. Dem Element s von $\mathfrak{a}$ möge in $\mathfrak{A}$ die lineare Transformation S des willkürlichen m-dimensionalen Vektors x, in $\mathfrak{B}$ die lineare Transformation T des willkürlichen n-dimensionalen Vektors $y, \ldots$ korrespondieren. Eine ganze rationale Funktion $J(x, y, \ldots)$, welche homogen ist in den Komponenten jedes der Vektoren $x, y, \ldots$, heißt eine zugehörige *Invariante*, wenn sie bei den simultanen Transformationen $S, T, \ldots$, welche das beliebige Element s von $\mathfrak{a}$ an ihren Argumenten induziert, ungeändert bleibt. Der Hilbertsche Beweis des *Fundamentalsatzes*: *daß alle zu den gegebenen Darstellungen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ gehörigen Invarianten sich aus endlich vielen ganz rational aufbauen lassen*, erfordert eine Methode die aus jeder in den Komponenten der einzelnen Vektoren homogenen ganzen rationalen Funktion $f(x, y, \ldots)$ eine Invariante J_f erzeugt, die ins besondere dann, wenn f selber schon eine Invariante ist, mit f zusammen fällt (evtl. bis auf einen konstanten von 0 verschiedenen Faktor). Zu diesem Zweck hat Hurwitz *die Integrationsmethode* ersonnen. Wir erkennen jetzt die Tragweite dieser Methode: sie *führt* nicht bloß für die projektive und die orthogonale Gruppe *zum Ziel*, auf welche Hurwitz sie allein an gewendet hatte, sondern *für alle halb-einfachen Gruppen*. Sie erweist sich mit ihre große Überlegenheit über die rein algebraischen Methoden, welche Differentiationsprozesse nach Art des Cayleyschen Ω-Prozesses heran ziehen. *Zum erstenmal ist damit auf natürliche Weise ein gruppen theoretischer Gültigkeitsbereich für die Invariantentheorie abgegrenzt.*

Man führt die unitäre Beschränkung ein und bildet das über die ge *schlossene* Mannigfaltigkeit $\mathfrak{a}_u$ zu erstreckende Integral

$$\int_{\mathfrak{a}_u} f(xS, yT, \ldots)\,|ds| = J_f(x, y, \ldots).$$

$J_f(x, y, \ldots)$ ist gewiß eine Invariante gegenüber $\mathfrak{a}_u$. Daß hier aber die unitäre Beschränkung wieder fortgelassen werden kann, zeigt man am bequemsten, indem man durch die infinitesimalen Operationen hindurchgeht. Die Änderung dJ_f von J_f bei einer infinitesimalen Operation von $\mathfrak{a}$ ist eine Linearform von deren Parametern. Die Form verschwindet, wenn diese Parameter der unitären Beschränkung (8) unterworfen sind; also verschwindet sie überhaupt identisch. J_f ist folglich gegenüber den infinitesimalen Operationen von $\mathfrak{a}$, demnach auch gegenüber allen Operationen von $\mathfrak{a}$ invariant.

Betrachtet man nur diejenigen Invarianten, welche in bezug auf jeden der Argumentvektoren $x, y, \ldots$ *von bestimmter Ordnung* sind, so entsteht die viel weniger tiefliegende Frage nach den linear unabhängigen und

en Invarianten der so definierten endlichen *Schar*. Ist z. B. in x die rdnung 3, in y die Ordnung 2, ... vorgeschrieben, so kann man die charinvarianten als Linearformen der Variablen

$$x_i x_k x_l y_r y_s \cdots$$

etrachten, die ihrerseits das Substrat für eine in gewisser Weise aus den arstellungen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ komponierte Darstellung $\mathfrak{A}$ abgeben. Das Problem esteht also in abgeänderter Bezeichnung darin: im x-Raum einer Darellung $\mathfrak{A}$ der Gruppe $\mathfrak{a}$ die sämtlichen Linearformen $J = J(x)$ zu erittelu, welche sich bei den linearen Transformationen der Gruppe $\mathfrak{A}$ icht ändern. Die Anzahl der linear unabhängigen J gibt offenbar an, ie oft in $\mathfrak{A}$ bei vollständiger Reduktion die Identität $J' = J$ als irreuzible Darstellung von $\mathfrak{a}$ vorkommt. Enthält $\mathfrak{A}$ die irreduzible Darstelung vom höchsten Gewicht (16) und der Charakteristik χ_m bei vollständiger Reduktion g_m-mal, so gilt für die Charakteristik ζ von $\mathfrak{A}$:

$$\zeta(\varphi) = \sum g_m \chi_m(\varphi).$$

araus folgt mittels der Orthogonalitätsrelationen für die χ_m:

$$g_m = \frac{1}{\Omega}\int \zeta(\varphi)\chi_m(-\varphi)\,d\Omega. \tag{23}$$

nsbesondere ist die Anzahl der linear unabhängigen Scharinvarianten

$$g_0 = \frac{1}{\Omega}\int \zeta(\varphi)\,d\Omega. \tag{24}$$

iese Formel wurde von Hrn. I. Schur im Falle der orthogonalen ruppe entwickelt[5]) und zu interessanten Folgerungen verwendet.

Aber auch die allgemeinere Formel (23) hat ihr Interesse. Ist J ine Invariante mehrerer Formen, so stellt die Gleichung $J = 0$ eine inariante Beziehung zwischen diesen Formen dar. Es gibt jedoch auch nvariante Beziehungen zwischen Formen, welche nicht durch eine, sondern durch mehrere, z. B. durch zwei Gleichungen $J_1 = 0$, $J_2 = 0$ ausedrückt werden. Dann gehen J_1, J_2 unter dem Einfluß der Substitutionen er Gruppe über in lineare Kombinationen dieser beiden Funktionen. Venn nicht jede der beiden Funktionen einzeln invariant ist, muß J_1 in en Komponenten jeder Form von der gleichen Ordnung sein wie J_2. etrachten wir wiederum nur solche Paare (J_1, J_2), für welche diese Ordungszahlen vorgeschrieben sind, so kann man das Problem so stellen: lle Paare (J_1, J_2) von Linearformen im x-Raum zu bestimmen, die nter dem Einfluß der Gruppenelemente von $\mathfrak{a}$ vorgegebene, ihnen isomorph ugeordnete lineare Transformationen t erleiden:

$$J_1' = t_{11} J_1 + t_{12} J_2,$$
$$J_2' = t_{21} J_1 + t_{22} J_2.$$

[5]) Sitzungsber. d. Preuß. Akad. 1924, S. 189–208 und 346–355.

Die letzteren sollen eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{a}$ bilden. Kommt be vollständiger Reduktion der Transformationsgruppe $\mathfrak{A}$ der Variablen x dies irreduzible Darstellung g-mal in $\mathfrak{A}$ vor, so behaupte ich, gibt es g der artige Paare

$$(J_1', J_2'), \quad (J_1'', J_2''), \quad \ldots,$$

aus denen sich alle mittels konstanter Koeffizienten linear zusammen setzen lassen:

$$J_1 = \alpha' J_1' + \alpha'' J_1'' + \ldots,$$
$$J_2 = \alpha' J_2' + \alpha'' J_2'' + \ldots.$$

In der Tat: entsprechen demselben Element von $\mathfrak{a}$ in der N-dimen sionalen Darstellung $\mathfrak{A}$ die Matrix T, in der vorgegebenen zweidimensio nalen irreduziblen Darstellung die Matrix t, so kommt die Forderung daß das Paar

$$J_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1N} x_N,$$
$$J_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2N} x_N$$

die Transformation t erleidet, wenn die x durch T transformiert werden für die rechteckige Matrix A der Koeffizienten a auf die Gleichung hinaus

$$tA = AT.$$

Enthält das allgemeine T, in vollständig reduzierter Form geschrieben längs der Hauptdiagonale g-mal die Matrix t, im übrigen aber lauter zu inäquivalente irreduzible Matrizen, so teile man diesem Zerfall ent sprechend die Reihe der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_N$ und damit die Matrix A in Abschnitte ein. Für jeden der ersten g quadratischen Abschnitte A von A hat man die Gleichung

$$tA = At,$$

für die übrigen rechteckigen Abschnitte B Gleichungen

$$tB = Bt',$$

in denen t' irreduzibel und inäquivalent zu t ist. Nach einem in Kap. I § 6 erwähnten Satz von Schur folgt daraus, daß die Abschnitte A zwei dimensionale Einheitsmatrizen sind, die Abschnitte B verschwinden. Das ist aber genau die aufgestellte Behauptung, daß (J_1, J_2) sich linear zu sammensetzt aus den Paaren

$$(x_1, x_2), \quad (x_3, x_4), \quad \ldots, \quad (x_{2g-1}, x_{2g}),$$

an deren jedem T die Transformation t induziert. Das Resultat lautet: In zwei Darstellungen einer gegebenen halb-einfachen Gruppe, von denen die zweite irreduzibel ist, mögen einem willkürlichen Gruppenelement die linearen Transformationen oder Matrizen T bzw. t korrespondieren. Die erste Darstellung, deren Träger der x-Raum ist, sei N-dimensional, die zweite n-dimensional. Es gilt, Systeme $J_1, J_2, \ldots, J_n$ von n Linearforme

r N Variablen x zu ermitteln, welche allgemein untereinander nach t ansformiert werden, wenn die Variablen x der Transformation T unterorfen werden. Die Anzahl der linear unabhängigen dieser „invarianten rsteme" ist, wenn ζ und χ_m die Charakteristiken der beiden Darstelngen sind, aus der Formel (23) zu entnehmen.

Inhaltsübersicht.

apitel I. Das gruppentheoretische Fundament der Tensorrechnung.

§ 1. Ziel der Untersuchung.
§ 2. Cartans infinitesimale Methode: Die Gewichte.
§ 3. Cartans infinitesimale Methode: Bestimmung einer irreduziblen Darstellung durch ihr höchstes Gewicht.
§ 4. Erzeugung der irreduziblen Darstellungen.
§ 5. Der Satz von der vollen Reduzibilität.
§ 6. Bestimmung der Charakteristiken und Dimensionszahlen.
§ 7. Zusammenhang mit der symmetrischen Gruppe uud ihren Charakteren.
§ 8. Die Gruppe aller linearen Transformationen.

apitel II. Die Darstellungen der Komplexgruppe und der Drehungsgruppe.

§ 1. Das einzelne Element der Komplexgruppe. Die unitäre Beschränkung.
§ 2. Darstellungen der Komplexgruppe: Infinitesimaler Teil.
§ 3. Darstellungen der Komplexgruppe: Integraler Teil.
§ 4. Die Darstellungen der Drehungsgruppe: Infinitesimaler Teil.
§ 5. Die Darstellungen der Drehungsgruppe: Integraler Teil.

apitel III. Struktur der halb-einfachen Gruppen.

Einleitung.
§ 1. Grundbegriffe. Zerlegung nach einer maximalen auflösbaren Untergruppe.
§ 2. Die Gewichte.
§ 3. Cartans Kriterium für die auflösbaren und für die halb-einfachen Gruppen.
§ 4. Die Gruppe (S).
§ 5. Die unitäre Beschränkung.
Anhang.

apitel IV. Darstellung aller halb-einfachen Gruppen.

§ 1. Das einzelne Element der Gruppe.
§ 2. Analysis situs. Volumbestimmung. Volle Reduzibilität.
§ 3. Bestimmung der Dimensionszahl und Charakteristik einer irreduziblen Darstellung von gegebenem höchsten Gewicht.
§ 4. Über die Konstruktion aller irreduziblen Darstellungen.
§ 5. Beziehung zur Invariantentheorie.

(Eingegangen am 23. April 1925.)

Berichtigung zu Teil I (23, S. 271–309):

Auf S. 292, Zeile 3, lies $n+1$ anstelle von $n+2$.

Das in Kap. I, § 3 (23, S. 281) und Kap. IV, § 3 Burnside zugeschriebene ndlegende Theorem rührt in Wahrheit von Frobenius und J. Schur her: Berliner Akad. 1906, S. 215.

Über die linearen Mannigfaltigkeiten auf Hyperfläche zweiter Ordnung.

Von

Prof. Dr. Ph. Furtwängler in Wien.

Die folgenden Zeilen haben den Zweck, eine einfache analytische Da stellung der linearen Mannigfaltigkeiten höchster Dimension, die auf ein nicht singulären Hyperfläche zweiter Ordnung liegen, anzugeben[1]). Da d Wahl des Koordinatensystems freisteht, nehmen wir die Gleichung d Hyperfläche in homogenen Punktkoordinaten in der Gestalt

$$(1) \qquad Q_{2n} \equiv y_1 z_1 + y_2 z_2 + \ldots + y_n z_n = 0$$

oder in der Gestalt

$$(2) \qquad Q_{2n-1} \equiv y_1 z_1 + \ldots + y_{n-1} z_{n-1} + y_n^2 = 0$$

an, je nachdem die Anzahl der Variablen gerade oder ungerade ist. Die beiden Fälle sind wesentlich verschieden und sollen daher im folgend getrennt behandelt werden.

§ 1.

Es sei

$$(1) \qquad Q_{2n} \equiv y_1 z_1 + y_2 z_2 + \ldots + y_n z_n = 0 \qquad (n >$$

die Gleichung einer nicht singulären Hyperfläche zweiter Ordnung i R_{2n-1} in homogenen Punktkoordinaten. Ich bezeichne ferner mit L_m ei lineare Mannigfaltigkeit der Dimension $m-1$, die durch $2n-m$ u abhängige lineare homogene Gleichungen zwischen den Koordinaten y, bestimmt ist. Man erkennt zunächst, daß auf der Q_{2n} höchstens ei lineare Mannigfaltigkeit L_n von der Dimension $n-1$ liegen kann. Wür

[1]) Zur Behandlung dieses Problems bin ich durch Herrn J. Lense veranla der bei seinen demnächst in den Monatsheften für Math. und Phys. 35 erscheinend Untersuchungen über quadratische Differentialformen eine durchsichtige analytisc Darstellung der genannten Mannigfaltigkeiten brauchte. Synthetische Entwicklung über diese findet man bei A. Bertini, Einführung in die projektive Geometrie me dimensionaler Räume, übersetzt von A. Duschek, Wien 1924, S. 139 ff.

mlich eine L_{n+q} $(q > 0)$ auf ihr liegen, so wäre diese durch $n - q$ abhängige lineare Gleichungen definiert. Führt man nun ein neues ordinatensystem $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ ein, indem man $x_1, \ldots, x_{n-q}$ den linken iten der genannten $n - q$ linearen Gleichungen für die L_{n+q} gleichsetzt, würde Q_{2n} in eine nicht singuläre quadratische Form der Variablen x ergehen, und diese müßte identisch verschwinden, wenn man $n - q$ riable gleich Null setzt. Da dies bei einer nicht singulären quadratischen rm von $2n$ Variablen nicht möglich ist, kann auf der Q_{2n} höchstens ne L_n liegen, und eine solche liegt auch stets auf ihr, wie das Beispiel $= y_2 = \ldots = y_n = 0$ zeigt.

Es sei nun L_{n-p} $(p \geqq 0)$ eine auf der Q_{2n} gelegene lineare Mannigtigkeit, die also durch $n + p$ unabhängige lineare homogene Gleichungen ischen den Koordinaten y, z bestimmt ist. Ich behaupte, daß sich ter diesen Gleichungen stets n unabhängige finden, die nach einem Halbsystem der Variablen" auflösbar sind. Ich verstehe dabei unter nem „Halbsystem" n Variable $y_{i_1}, \ldots, y_{i_r}, z_{j_1}, \ldots, z_{j_s}$, deren Indizes $\ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s$ eine Permutation der Ziffern $1, 2, \ldots, n$ bilden, also rz gesagt n Variable mit lauter verschiedenen Indizes.

Zum Beweise beachte man, daß die Q_{2n} bei der Vertauschung (y_i, z_i) d bei den simultanen Vertauschungen (y_i, y_k), (z_i, z_k) in sich übergeht d daß daher eine auf der Hyperfläche liegende L_{n-p} durch diese Verschungen wieder in eine solche übergeht. Wäre nun unsere Behauptung lsch, so könnte man annehmen, daß unter den Gleichungen für die L_{n-p} wa $r < n$ vorhanden seien, die sich nach $y_1, y_2, \ldots, y_r$ auflösen lassen, d daß keine $r + 1$ vorhanden seien, die sich nach $r + 1$ Variablen mit rschiedenen Indizes auflösen lassen. Denkt man sich die für $y_1, \ldots, y_r$ fundenen Werte in die übrigen $n + p - r$ Gleichungen eingesetzt, so hält man $n + p - r$ nicht identische Gleichungen, von denen nach unserer nnahme keine die Variablen $y_{r+1}, \ldots, y_n, z_{r+1}, \ldots, z_n$ enthalten könnte. e können also nur die Variablen $z_1, \ldots, z_r$ enthalten, und man kann sie wa nach $z_1, z_2, \ldots, z_{n+p-r}$ auflösen [2]), die dann lineare homogene Funkonen von $z_{n+p-r+1}, \ldots, z_r$ werden. Wir hätten also für die L_{n-p} folgens Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = G_1(y_{r+1}, \ldots, y_n, z_{n+p-r+1}, \ldots, z_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_r = G_r(y_{r+1}, \ldots, y_n, z_{n+p-r+1}, \ldots, z_n), \\ z_1 = G_{r+1}(z_{n+p-r+1}, \ldots, z_r), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{n+p-r} = G_{n+p}(z_{n+p-r+1}, \ldots, z_r), \end{array}\right.$$

[2]) Es muß natürlich $n + p - r \leqq r$ sein.

wo die G_i lineare homogene Funktionen der hingeschriebenen Variabl bedeuten. Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichung $Q_{2n} = 0$ ein, müßte diese Gleichung identisch befriedigt werden, was nicht der Fall i da sich das Glied $y_n z_n$ nicht fortheben kann. Damit ist unsere Behauptu bewiesen.

Aus unseren Überlegungen folgt ferner, daß jede auf der Hyp fläche Q_{2n} gelegene L_{n-1} auf einer auf der Hyperfläche Q_{2n} gelegenen liegt[3]). Durch geeignete Änderung der Variablenbezeichnung kann m erreichen, daß die Gleichungen der L_{n-1} sich in der Gestalt

$$(4) \qquad \begin{cases} y_1 = a_{11} z_1 + \ldots + a_{1n} z_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = a_{n1} z_1 + \ldots + a_{nn} z_n, \\ 0 = b_1 z_1 + \ldots + b_n z_n \equiv \varphi(z) \end{cases}$$

darstellen lassen. Setzt man die Werte für die y_i aus (4) in Q_{2n} ein, muß sich ergeben:

$$Q_{2n} \equiv \varphi(z)\varphi_1(z),$$

wo $\varphi_1(z) = c_1 z_1 + \ldots + c_n z_n$ ist. Die Gleichungen

$$(5) \qquad \begin{cases} y_1 = a_{11} z_1 + \ldots + a_{1n} z_n - c_1 \varphi(z), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = a_{n1} z_1 + \ldots + a_{nn} z_n - c_n \varphi(z) \end{cases}$$

stellen dann eine auf der Hyperfläche Q_{2n} gelegene L_n dar, auf der durch (4) gegebene L_{n-1} liegt.

Es sei nun eine auf der Q_{2n} gelegene L_n gegeben, deren Gleichung nach $y_1, \ldots, y_n$ aufgelöst, das System

$$(6) \qquad y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} z_k \qquad (i = 1, 2, \ldots$$

ergeben mögen. Setzt man in (1) ein, so ergibt sich

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} z_i z_k \equiv 0,$$

woraus $a_{ik} + a_{ki} = 0$ folgt, d. h. die Matrix (a_{ik}) muß schiefsymmetrisch se

Auf Grund der vorstehenden Überlegungen kann man den Satz weisen:

Satz. *Jede auf der Hyperfläche zweiter Ordnung*

$$y_1 z_1 + y_2 z_2 + \ldots + y_n z_n = 0 \qquad (n >$$

[3]) Wir brauchen diese Tatsache im nächsten Paragraphen.

elegene lineare Mannigfaltigkeit höchster Dimension $n-1$ ist durch eins er beiden folgenden Gleichungssysteme bestimmt[4]):

$$\text{I)} \qquad \left.\begin{array}{l} y_1 = a_{11} z_1 + \ldots + a_{1n} z_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = a_{n1} z_1 + \ldots + a_{nn} z_n, \end{array}\right\} a_{ik} + a_{ki} = 0,$$

$$\text{II)} \qquad \left.\begin{array}{l} y_1 = b_{11} z_1 \quad + \ldots + b_{1,n-1} z_{n-1} \quad + b_{1,n} y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1} = b_{n-1,1} z_1 + \ldots + b_{n-1,n-1} z_{n-1} + b_{n-1,n} y_n, \\ z_n = b_{n,1} z_1 \quad + \ldots + b_{n,n-1} z_{n-1} \quad + b_{n,n} y_n \end{array}\right\} b_{ik} + b_{ki} = 0.$$

Die beiden Systeme sind von einander getrennt.

Beweis. Beachtet man, daß sich die Systeme I resp. II auch in der Weise schreiben lassen, daß auf der linken Seite ein beliebiges Halbsystem von Variablen steht, in dem die Anzahl der Variablen y kongruent n resp. $\equiv n-1 \pmod 2$ ist, so erkennt man, daß alle linearen Mannigfaltigkeiten der Dimension $n-1$, die auf der Hyperfläche zweiter Ordnung Q_{2n} liegen, durch (I) oder (II) gegeben sind. Daß die Systeme (I) und (II) eine L_n gemeinsam haben, ergibt sich so. Würden sich für spezielle Werte der Parameter zwei gleiche L_n in den beiden Systemen ergeben, so müßte für diese Parameterwerte die letzte Gleichung aus (II) eine lineare Kombination der Gleichungen aus (I) sein. In dieser linearen Kombination könnten die ersten $(n-1)$ Gleichungen aus (I) nicht auftreten. Es müßte daher die letzte Gleichung aus (I) mit der letzten Gleichung aus (II) bis auf einen Faktor übereinstimmen, was offenbar wegen $a_{nn} = b_{nn} = 0$ nicht möglich ist.

§ 2.

Es sei

$$2) \qquad Q_{2n-1} \equiv y_1 z_1 + y_2 z_2 + \ldots + y_{n-1} z_{n-1} + y_n^2 = 0 \qquad (n > 1)$$

die Gleichung einer nicht singulären Hyperfläche zweiter Ordnung im R_{2n-2}. Man kann diese dann als Schnitt der Q_{2n} (1) mit der Hyperebene $y_n = z_n$ auffassen. Ist nun L_{n-1} eine lineare Mannigfaltigkeit der Dimension $n-2$ auf der Q_{2n-1}, so liegt sie natürlich auch auf der Q_{2n} und daher nach dem früher Ausgeführten auch auf einer auf der Q_{2n} liegenden L_n. Bringt man diese mit der Hyperebene $y_n = z_n$ zum Schnitt, so erhält man, da die Gleichung $y_n = z_n$ nicht als lineare Kombination der Gleichungen des Systems (I) oder (II) darstellbar ist, eine L_{n-1} auf der Q_{2n-1}, die mit der angenommenen übereinstimmen muß. Schneidet man umgekehrt eine

[4]) Den Parametern a_{ik}, b_{ik} sind auch unendlich große Werte beizulegen.

beliebige auf der Q_{2n} gelegene L_n mit der Hyperebene $y_n = z_n$, so erhä man stets eine auf der Q_{2n-1} gelegene L_{n-1}. Aus diesen Überlegunge folgt auch, daß keine lineare Mannigfaltigkeit von höherer Dimension a $n-2$ auf der Q_{2n-1} liegen kann. Läge nämlich eine L_n darauf, so läg diese auch auf der Q_{2n} und würde daher durch die Gleichungen (I) od (II) dargestellt. Dann müßte aber die Gleichung $y_n = z_n$ eine linea Kombination der Gleichungen des Systems (I) oder (II) sein.

Eliminiert man daher aus (I) oder (II), was zu demselben Result führt, die Variable z_n durch die Beziehung $y_n = z_n$, so erhält man ei Darstellung sämtlicher linearer Mannigfaltigkeiten höchster Dimension $n-$ die auf der Q_{2n-1} liegen. Diese bilden daher ein einziges kontinuierlich System. Man erhält so folgenden

Satz. *Jede auf der Hyperfläche zweiter Ordnung*

$$Q_{2n-1} \equiv y_1 z_1 + y_2 z_2 + \ldots + y_{n-1} z_{n-1} + y_n^2 \qquad (n >$$

gelegene lineare Mannigfaltigkeit höchster Dimension $(n-2)$ *ist dur das Gleichungssystem*

$$\left.\begin{aligned} y_i &= \sum_{k=1}^{n-1} (a_{ik} + a_{in}\, a_{nk})\, z_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \\ y_n &= a_{n1} z_1 + a_{n2} z_2 + \ldots + a_{n,n-1} z_{n-1} \end{aligned}\right\} \; a_{ik} + a_{ki} = 0$$

gegeben[5]).

[5]) Den Parametern sind auch unendlich große Werte beizulegen.

(Eingegangen am 13. Mai 1925.)

ber eine Verallgemeinerung des Borelschen Theorems.

Von

Witold Hurewicz in Wien.

Einleitung.

Das sog. verallgemeinerte Borelsche Theorem besagt: Sei M eine arable[1]) Punktmenge eines metrischen Raumes; ist jedem Punkt a M eine ihn enthaltende offene Menge U_a zugeordnet, so gibt es unter Mengen U_a abzählbar viele, in deren Vereinigung M enthalten ist. seinen Untersuchungen über den Begriff der Dimensionszahl wurde K. Menger auf folgende Fragestellung geführt[2]): Jedem Punkt einer ge M sei eine sich *auf ihn zusammenziehende*[3]) *Folge* von Umungen zugeordnet; ist es dann immer möglich aus der Gesamtheit der iegenden Umgebungen eine Folge mit *nach Null konvergierenden chmessern* herauszugreifen, in deren Vereinigung M enthalten ist? Menger hat gezeigt, daß dies keineswegs immer der Fall ist, und hat Vermutung geäußert, es treffe dies nur für die Mengen F_σ[4]) zu. Im enden werden wir diese Vermutung für den Bereich der Borelschen gen und darüber hinaus für den Bereich der sog. Mengen (A) beigen. Der Beweis gelingt durch Zurückführung der Mengerschen gestellung auf eine andere, die eine naturgemäße Verallgemeinerung Fragestellung des Borelschen Theorems ist. Dadurch erhalten wir eich eine einfache Charakterisierung der Mengen F_σ und G_δ[4]) im Bereiche Borelschen Mengen.

---

[1]) Eine Menge heißt *separabel*, wenn sie eine in ihr dichte abzählbare Teilge enthält.

[2]) K. Menger, Einige Überdeckungssätze der Punktmengenlehre; Sitzungshte der Wiener Akademie, **133** (1924), S. 421—444.

[3]) Ist $\{A_n\}$ eine Folge von Mengen, die den Punkt a enthalten, und liegen in Umgebung U von a fast alle A_n, so sagt man, die Folge $\{A_n\}$ *zieht sich auf a nmen*.

[4]) Mit F_σ bezeichnet man die Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen en, mit G_δ den Durchschnitt von abzählbar vielen offenen Mengen.

§ 1.

Die Eigenschaften E und E^*.

Um schleppende Ausdrucksweisen zu vermeiden, führen wir einig Abkürzungen ein: Ein System von offenen Mengen bezeichnen wir (i Anschluß an K. Menger) als ein *Folgensystem* der Menge M, wenn zu jedem Punkt von M eine sich auf ihn zusammenziehende Folge v Mengen des Systems gibt. Eine Folge von Mengen mit gegen Null ko vergierenden Durchmessern nennen wir eine *Nullfolge*. Wir sagen m K. Menger, daß eine Menge M die *Eigenschaft* E hat, wenn man aus jede Folgensystem von M eine Nullfolge herausgreifen kann, in deren Verei gung M enthalten ist[5]). Jedes System von offenen Mengen, in deren Verei gung die Menge M enthalten ist, bezeichnen wir als eine *Überdeckung* von Ist $W_1, W_2, W_3 \ldots$ eine Folge von zu M gehörigen Überdeckungen, und W' eine Überdeckung von M, die aus je endlich vielen Mengen aus jed Überdeckung der Folge $\{W_n\}$ zusammengesetzt ist, so sagen wir, W' ge aus $\{W_n\}$ durch *endliche Auswahl* hervor. Wir definieren nun: D Menge M hat die *Eigenschaft* E^*, wenn es zu jeder Folge $\{W_n\}$ v Überdeckungen der Menge M eine Überdeckung W' von M gibt, die a $\{W_n\}$ durch endliche Auswahl hervorgeht.

Satz I. *Jede abgeschlossene und kompakte Menge hat die Eige schaft* E^*.

Dies folgt unmittelbar aus dem Borelschen Theorem[6]).

Satz II. *Hat jede Menge der Folge* $\{M_n\}$ *die Eigenschaft* E^*, *auch die Vereinigung* $M = \Sigma M_n$.

In der Tat: sei $\{W_n\}$ eine Folge von Überdeckungen der Menge M. gibt für jedes n eine Überdeckung W^n von M_n, die aus der Folge W_n, W_{n+} $W_{n+2}, \ldots$ durch endliche Auswahl hervorgeht. Fassen wir die Üb deckungen $W^1, W^2, W^3 \ldots$ zu einem einzigen System offener Mengen sammen, so erhalten wir eine Überdeckung W' von M, die aus $\{W$ durch endliche Auswahl gebildet ist.

Bezeichnen wir im Anschluß an K. Menger als *halbkompakt* j Menge, die Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen ist[7]), so fo aus Satz I und II

---

[5]) Das von K. Menger gestellte Problem lautet also: Welche Mengen ha die Eigenschaft E?

[6]) Das Borelsche Theorem besagt: Ist M *kompakt* und *abgeschlossen*, so k man aus jeder Überdeckung von M *endlich viele* Mengen herausgreifen, in de Vereinigung M enthalten ist.

[7]) Jede Menge eines Euklidischen Raumes ist halbkompakt. Jede halbkomp Menge ist separabel. Vgl. etwa H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen S. 94

Satz III. *Jedes halbkompakte F_σ hat die Eigenschaft E^** [8]).

Satz IV. *Hat die Menge M die Eigenschaft E^*, so auch jede in r abgeschlossene Menge $\overline{M}$* [9]).

Sei in der Tat, $\overline{M} = M \cdot F$, wo F eine abgeschlossene Menge bedeutet. trachten wir irgendeine Folge $\{W_n\}$ von zu $\overline{M}$ gehörigen Überckungen. Fügen wir zur Überdeckung W_n die zu F komplementäre enge $C(F)$ hinzu, so entsteht eine Überdeckung W_n' von M. Da M die genschaft E^* hat, so gibt es eine Überdeckung W' von M, die aus $W_n'\}$ durch endliche Auswahl hervorgeht. Entfernen wir aus W' die enge $C(F)$, falls dieselbe in W' vorhanden ist, so erhalten wir eine berdeckung W von $\overline{M}$, die aus der Folge $\{W_n\}$ durch endliche Auswahl rvorgeht.

Wir setzen nun die Eigenschaften E und E^* in Beziehung.

Satz V. *Hat die Menge M die Eigenschaft E^*, so hat sie auch die genschaft E.*

Sei nämlich Σ ein beliebiges Folgesystem von M. Diejenigen Mengen s Σ, deren Durchmesser $< \frac{1}{n}$ sind, bilden eine Überdeckung W_n von M, d jede aus der Folge $\{W_n\}$ durch endliche Auswahl gebildete Überckung von M ist eine Nullfolge aus Σ.

Wir wollen jetzt zeigen, daß für halbkompakte Mengen auch die nkehrung von Satz V gilt. Dazu benötigen wir folgenden

Hilfssatz. *Sei M eine kompakte Menge, W eine Überdeckung von r eine positive Zahl; dann gibt es eine Überdeckung W' von M, die genden Bedingungen genügt:*

1. *Jede Menge aus W' ist in der Vereinigung von endlich vielen ngen aus W enthalten.*

2. *Die Durchmesser sämtlicher Mengen aus W' sind $\leqq r$, haben r eine positive untere Schranke.*

Vermöge des verallgemeinerten Borelschen Theorems dürfen wir s auf den Fall beschränken, wo die Überdeckung W aus *abzählbar vielen* ngen besteht, etwa aus den Mengen $O_1, O_2, O_3, \ldots$. Setzen wir:

---

[8]) Jede halbkompakte abgeschlossene Menge, und daher auch jedes halbkompakte ist Vereinigung abzählbar vieler *kompakter* und *abgeschlossener* Mengen. In der , sei M halbkompakt und abgeschlossen, also $M = \Sigma M_n$, wo die M_n kompakte gen sind. Die Formel $M = \Sigma M_n^0$ (unter M_n^0 die abgeschlossene Hülle von M_n tanden) liefert die gewünschte Zerlegung von M in abzählbar viele kompakte abgeschlossene Mengen.

[9]) Auch für die Eigenschaft E gilt der analoge Satz: Hat die Menge M die nschaft E, so auch jede in ihr abgeschlossene Menge $\overline{M}$. Vgl. K. Menger, . O.

$\bar{O}_n = O_1 + O_2 + \ldots + O_n$. Sei a ein Punkt von M. Mit $k(a)$ bezeichnen wir die kleinste Zahl mit der Eigenschaft, daß a in $\bar{O}_{k(a)}$ enthalten ist. Wir ordnen nun jedem Punkt a von M die offene Menge

$$(*) \qquad G(a) = \bar{O}_{k(a)} \cdot U\left(a; \frac{r}{2}\right)$$

zu [10]). Die Mengen $G(a)$ bilden eine Überdeckung W' von M, die den gestellten Forderungen genügt. Es braucht nur gezeigt zu werden, daß die Durchmesser der Mengen $G(a)$ eine positive untere Schranke besitzen. Angenommen, dies sei nicht der Fall; dann gibt es in M eine Punktfolge $\{a_n\}$ von der Beschaffenheit, daß der Durchmesser $d(G(a_n))$ von $G(a_n)$ mit wachsendem n stets abnehmend gegen Null konvergiert. Dabei können wir annehmen, daß alle $d(G(a_n)) < \frac{r}{4}$ sind:

$$(1) \qquad d[G(a_{n+1})] < d[G(a_n)] < \frac{r}{4}.$$

Indem wir nötigenfalls die Folge $\{a_n\}$ durch eine Teilfolge ersetzen können wir weiter annehmen:

$$(2) \qquad k(a_{n+1}) \geqq k(a_n).$$

Aus (*) und (1) folgt:

$$(**) \qquad G(a_n) = \bar{O}_{k(a_n)} \cdot U\left(a_n; \frac{r}{4}\right).$$

Wir wollen nun zeigen: Der Abstand je zweier Punkte a_l und a_m $(l < m)$ ist größer als $\frac{r}{4}$. Andernfalls hätten wir nämlich:

$$U\left(a_m; \frac{r}{2}\right) > U\left(a_l; \frac{r}{4}\right).$$

Es gilt anderseits nach (2)

$$\bar{O}_{k(a_m)} > \bar{O}_{k(a_l)}.$$

Es wäre daher mit Rücksicht auf (*) und (**)

$$G(a_m) > G(a_l),$$

im Widerspruch mit

$$d[G(a_m)] < d[G(a_l)].$$

Damit ist gezeigt, daß die Folge $\{a_n\}$ keinen Häufungspunkt besitzt, was mit der vorausgesetzten Kompaktheit von m unvereinbar ist. Die Annahme, daß die Zahlen $d(G(a))$ keine positive untere Schranke besitzen, führt also zu einem Widerspruch, und damit ist der Hilfssatz bewiesen.

---

[10]) Mit $U(a; p)$ bezeichnet man die Menge aller Punkte, deren Abstand von a kleiner ist als p.

Nun zeigen wir zunächst:

Satz VI. *Hat die kompakte Menge M nicht die Eigenschaft E^*, so hat sie auch nicht die Eigenschaft E.*

In der Tat: Es gibt nach Annahme eine Folge $\{W_n\}$ von Überdeckungen von M, aus der sich durch endliche Auswahl keine Überdeckung herausgreifen läßt. Eine derartige Folge wollen wir eine *singuläre Überdeckungsfolge* von M nennen. Die Überdeckung W_n ersetzen wir nach dem soeben bewiesenen Hilfssatze durch eine Überdeckung W_n', so daß jede Menge aus W_n' in der Vereinigung endlich vieler Mengen aus W_n enthalten ist, und so, daß die Durchmesser aller Mengen aus W_n' $\leqq \frac{1}{n}$ sind, aber oberhalb einer positiven Schranke verbleiben. Die Folge $\{W_n'\}$ ist ebenfalls eine singuläre Überdeckungsfolge von M. Die Überdeckungen W_n' bilden in ihrer Gesamtheit ein Folgensystem von M. Eine aus diesem System herausgegriffene Nullfolge kann M nicht überdecken, da sie höchstens endlich viele Mengen aus jeder Überdeckung W_n enthält (denn die Durchmesser der Mengen aus W_n haben eine positive untere Schranke). M besitzt also nicht die Eigenschaft E.

Daraus folgt sofort

Satz VII. *Hat eine halbkompakte Menge die Eigenschaft E, so hat sie auch die Eigenschaft E^*.*

In der Tat, sei $M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$, wo die Mengen M_n kompakt sind. Indem wir nötigenfalls M_n durch $M \cdot M_n^0$ ersetzen[11]), können wir annehmen, daß die Mengen M_n in M abgeschlossen sind. Hat M die Eigenschaft E, so auch jede Menge M_n[12]). Nach Satz VI hat dann jede Menge der Folge $\{M_n\}$ die Eigenschaft E^*, und daher nach Satz II auch ihre Vereinigung M.

Die Sätze V und VII können wir zusammenfassen in

Satz VIII. *Damit die Menge M die Eigenschaft E habe, ist hinreichend und, wenn M halbkompakt ist, auch notwendig, daß sie die Eigenschaft E^* habe.*

§ 2.

Die Eigenschaft E^* und die relativ abgeschlossenen Mengen.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die Mengen, welche die Eigenschaft E^* haben, durch das Verhalten der in ihnen abgeschlossenen Teilmengen zu charakterisieren. Die Mengen M, die nicht die Eigenschaft E^*

[11]) Mit M^0 bezeichnen wir die abgeschlossene Hülle von M.

[12]) Vgl. Fußnote [9]).

haben, sind diejenigen, für die es eine singuläre Überdeckungsfolge gibt. Wir zeigen zunächst:

Satz IX. *Damit es eine singuläre Überdeckungsfolge der separablen Menge M gebe, ist notwendig und hinreichend, daß es ein System abgeschlossener Mengen Q_k^n $(n, k = 1, 2, \ldots)$ mit folgenden Eigenschaften gebe:*

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(a)} & Q_k^n > Q_{k+1}^n; \\ \text{(b)} & M \cdot \prod_{k=1}^{\infty} Q_k^n = 0; \end{array}\right\} \quad n, k = 1, 2, \ldots$$

$$\text{(c)} \qquad M \cdot \prod_{n=1}^{\infty} Q_{i_n}^n \neq 0 \quad \textit{für jede Indizesfolge } \{i_n\}.$$

Die Bedingung ist *notwendig*. In der Tat, angenommen, $\{W_n\}$ sei eine singuläre Überdeckungsfolge von M. Nach dem verallgemeinerten Borelschen Theorem können wir annehmen, daß für jedes n die Überdeckung W_n aus *abzählbar vielen* Mengen $O_1^n, O_2^n, O_3^n, \ldots$ besteht. Indem wir nötigenfalls O_k^n durch $O_1^n + O_2^n + \ldots + O_k^n$ ersetzen, können wir weiter annehmen, daß die Beziehung

$$\text{(a')} \qquad O_{k+1}^n > O_k^n \qquad (n, k = 1, 2, \ldots$$

erfüllt ist. Es gilt ferner:

$$\text{(b')} \qquad M < \sum_{k=1}^{\infty} O_k^n \qquad (n = 1, 2, \ldots$$

und für jede Indizesfolge $\{i_n\}$ gilt:

$$\text{(c')} \qquad M \cdot C[\sum_{n=1}^{\infty} O_{i_n}^n] \neq O,$$

denn M ist mit Rücksicht auf die Singularität der Folge $\{W_n\}$ in der Vereinigung $\sum_{n=1}^{\infty} O_{i_n}^n$ nicht enthalten.

Wir setzen nun für $n, k = 1, 2, \ldots$

$$Q_k^n = C(O_k^n).$$

Die Mengen Q_k^n sind abgeschlossen und genügen den Relationen (a), (b), (c). Dies folgt unmittelbar aus (a'), (b'), (c').

Die Bedingung ist *hinreichend*. Sei in der Tat $\{Q_k^n\}$ ein System abgeschlossener Mengen Q_k^n mit den Eigenschaften (a), (b), (c). Setzen wir

$$O_k^n = C(Q_k^n).$$

Die offenen Mengen O_k^n genügen den Beziehungen (a'), (b'), (c'). Fassen wir die Mengen $O_1^n, O_2^n, O_3^n, \ldots$ zu einer Überdeckung W_n zusammen. Die Folge $\{W_n\}$ ist eine singuläre Überdeckungsfolge von M.

Satz X. *Damit es eine singuläre Überdeckungsfolge der separablen enge M gebe, ist notwendig und hinreichend, daß es ein System abschlossener Mengen* $A_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ $(i_1, \ldots, i_n = 1, 2, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots)$ *it folgenden Eigenschaften gebe:*

$$\left.\begin{array}{l} A_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n} > A_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n+1} \\ A_{i_1, i_2, \ldots, i_n} > A_{i_1, i_2, \ldots, i_n, i_{n+1}} \\ M \cdot \prod_{k=1}^{\infty} A_{i_1, i_2, \ldots, i_n, k} = 0 \end{array}\right\} \text{für } i_1, \ldots, i_n = 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots$$

$$M \cdot A_{i_1} \cdot A_{i_1, i_2} \cdot A_{i_1, i_2, i_3, \ldots} \neq 0 \quad \text{für jede Folge } \{i_n\}.$$

Die Bedingung ist *notwendig*. In der Tat, bedeuten Q_k^n die in tz IX vorkommenden abgeschlossenen Mengen, so haben wir nur zu tzen: $A_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = Q_{i_1}^1 \cdot Q_{i_2}^2 \cdot \ldots \cdot Q_{i_n}^n$.

Die Bedingung ist *hinreichend*. Um dies zu zeigen, setzen wir:

$$Q_k^1 = A_k, \qquad Q_k^2 = Q_k^1 + \sum_{i_1=1}^{\infty} A_{i_1, k},$$

d allgemein:

$$Q_k^{n+1} = Q_k^n + \sum_{i_1, \ldots, i_n=1}^{\infty} A_{i_1, i_2, \ldots, i_n, k}.$$

ir haben zu beweisen, daß die so definierten Q_k^n abgeschlossene Mengen d, die die Eigenschaften (a), (b), (c) in Satz IX haben.

Q_k^n enthält jedes $A_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$, in dem mindestens ein Index $\geqq k$ (Beis durch vollständige Induktion). Daraus folgt: In (*) braucht die mmation nur von 1 bis $k-1$ erstreckt zu werden, und die Q_k^n sind Vereinigungen endlich vieler abgeschlossener Mengen abgeschlossen. s (*) und (α) ergibt sich durch den Schluß von n auf $n+1$, daß $> Q_{k+1}^n$, daß also die Bedingung (a) erfüllt ist. Um zu zeigen, daß e Mengen Q_k^n auch die Eigenschaft (b) haben, bemerken wir zunächst, daß zu M gehöriger Punkt a bei festgehaltenem Index n in höchstens endlich len unter den Mengen $A_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ enthalten sein kann[13]). Die Beziehung $\cdot \prod_{k=1}^{\infty} Q_k^n = 0$ besteht nun gewiß für $n = 1$ (infolge von (γ)). Angenommen, sei für ein bestimmtes n bereits nachgewiesen. Dann liegt jeder Punkt a M in höchstens endlich vielen Mengen der Folge $Q_1^n, Q_2^n, Q_3^n, \ldots$.

[13]) Angenommen, dies sei für $n-1$ nachgewiesen; wir wollen zeigen, daß es h für n zutrifft. Sei a ein Punkt von M. Es gibt nur endlich viele Systeme $i_2, \ldots, i_{n-1}$), für die der Punkt a in $A_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}}$ enthalten ist. Halten wir die izes $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$ fest, so gibt es mit Rücksicht auf (α) und (γ) nur endlich le i_n, für die a in $A_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n}$ liegt. a ist also, wie behauptet, in höchstens lich vielen $A_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ enthalten.

Daraus folgt aber, daß auch $M \cdot \prod_{k=1}^{\infty} Q_k^{n+1} = 0$, denn andernfalls gäbe in M einen Punkt a, der in allen Mengen der Folge $Q_1^{n+1}, Q_2^{n+1}, Q_3^{n+1}, \ldots$ enthalten wäre. Mit Rücksicht auf (*) müßte a in fast allen Mengen d Folge:

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty} A_{i_1,\ldots,i_n,1}, \quad \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty} A_{i_1,\ldots,i_n,2}, \quad \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty} A_{i_1,\ldots,i_n,3}, \quad \ldots$$

liegen. Es gäbe daher unter den Mengen $A_{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1}}$ unendlich viele, denen a enthalten ist, was, wie wir soeben bemerkt haben, nicht zutreff kann. Damit ist die Gültigkeit von (b) nachgewiesen. Um zu zeigen, daß d Q_k^n auch der Bedingung (c) genügen, beachten wir, daß auf Grund von (für beliebige Werte von $i_1, i_2, \ldots, i_n$ $Q_{i_n}^n > A_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$, und daher f jede Indizesfolge $\{i_n\}$

$$\prod_{n=1}^{\infty} Q_{i_n}^n > \prod_{n=1}^{\infty} A_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$$

ist; es gilt daher im Hinblick auf (δ):

$$M \cdot \prod_{n=1}^{\infty} Q_{i_n}^n \neq 0.$$

Damit ist Satz X vollständig bewiesen.

Natürlich können wir in ihm die absolut abgeschlossenen Meng $A_{i_1,\ldots,i_n}$ durch die relativ abgeschlossenen Mengen $F_{i_1,\ldots,i_n} = M \cdot A_{i_1,\ldots}$ ersetzen.

Ein System von in M abgeschlossenen Mengen $F_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$, das d Bedingungen

(α') $$F_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1},i_n} > F_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1},i_n+1},$$

(β') $$F_{i_1,i_2,\ldots,i_n} > F_{i_1,i_2,\ldots,i_n,i_{n+1}},$$

(γ') $$\prod_{k=1}^{\infty} F_{i_1,i_2,\ldots,i_n,k} = 0$$

genügt, wollen wir kurz als ein zu M gehöriges „*System* (F)“ bezeichn Satz X spricht sich dann so aus:

Satz XI. *Damit die separable Menge M die Eigenschaft E^* h ist notwendig und hinreichend, daß es zu jedem System (F) von M e Folge natürlicher Zahlen $\{j_n\}$ gebe, so daß*

$$F_{j_1} \cdot F_{j_1,j_2} \cdot F_{j_1,j_2,j_3} \ldots = 0$$

ist.

Nun können wir ohne weiteres separable Mengen angeben, die ni die Eigenschaft E^* haben[14]). Es gilt nämlich

[14]) Ein Beispiel einer solchen Menge findet sich schon bei K. Menger, a. a

Satz XII. *Ein kompaktes G_δ, das relativ zu seiner abgeschlossenen Hülle keinen inneren Punkt*[15]) *besitzt, hat nicht die Eigenschaft E^*.*

Sei M die betrachtete Menge. Wir können setzen: $M = O_1 \cdot O_2 \cdot O_3 \ldots$, wo die O_k kompakte offene Mengen bedeuten[16]). In O_1 liegt nach Voraussetzung sicher ein Punkt a von $M^0 - M$. Sei $U_1, U_2, U_3, \ldots$ eine Folge von Umgebungen von a, die samt ihren Begrenzungen in O_1 enthalten sind, und die, monoton abnehmend, sich auf a zusammenziehen. Die Menge $O_{i_1} \cdot O_2$ $(i_1 = 1, 2, \ldots)$ ist zu M^0 nicht fremd[17]) und enthält daher auch mindestens einen Punkt a_{i_1} von $M^0 - M$. Zu jedem der Punkte a_{i_1} $(i_1 = 1, 2, \ldots)$ bilden wir wiederum eine Folge von Umgebungen $U_{i_1,1}, U_{i_1,2}, U_{i_1,3}, \ldots$, die samt ihren Begrenzungen in $U_{i_1} \cdot O_2$ enthalten sind, und die monoton abnehmend sich auf a_{i_1} zusammenziehen. In jeder Menge $U_{i_1,i_2} \cdot O_3$ wählen wir einen zu $M^0 - M$ gehörigen Punkt a_{i_1,i_2} und konstruieren zu ihm eine Folge von Umgebungen $\{U_{i_1,i_2,i_3}\}$ $(i_3 = 1, 2, \ldots)$. In derselben Weise fortfahrend, definieren wir für jede endliche Indizesfolge $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ eine offene Menge $U_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, so daß:

$$U_{i_1, \ldots, i_{n-1}, i_n} > U_{i_1, \ldots, i_{n-1}, i_n + 1}; \tag{α}$$

$$U_{i_1, \ldots i_n} > U_{i_1, \ldots, i_n, i_{n+1}}; \tag{β}$$

$$M \prod_{k=1}^{\infty} U^0_{i_1, \ldots, i_n, k} = 0; \tag{γ}$$

$$U^0_{i_1, \ldots, i_n} < O_n. \tag{δ}$$

Sei nun $\{i_n\}$ eine beliebige Indizesfolge. Die Mengen $U^0_{i_1}$, $U^0_{i_1 \cdot i_2}$, $U^0_{i_1, i_2 \cdot i_3}, \ldots$ bilden eine monoton abnehmende Folge abgeschlossener, kompakter Mengen; ihr Durchschnitt ist daher nicht leer, und aus (4) folgt:

$$M \cdot \prod_{n=1}^{\infty} U^0_{i_1 i_2, \ldots, i_n} \neq 0.$$

Die Mengen $U^0_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ genügen den Bedingungen (α), (β), (γ), (δ) von Satz X. Daraus folgt: M hat nicht die Eigenschaft E^*.

Die notwendige Bedingung für das Bestehen der Eigenschaft E^* in Satz XI kann wesentlich verschärft werden. Es gilt nämlich:

Satz XIII. *Hat die Menge M die Eigenschaft E^*, und ist $\{F_{i_1, \ldots, i_n}\}$*

---

[15]) Ist also M die betrachtete Menge, M^0 ihre abgeschlossene Hülle, so liegt $M^0 - M$ dicht in M^0. Ein Beispiel liefert die Menge aller irrationalen Zahlen eines Intervalles.

[16]) Indem wir nötigenfalls die kompakte Menge M^0 als Raum zugrunde legen, dürfen wir die Mengen O_k als kompakt annehmen.

[17]) Sie enthält nämlich den Punkt a von M^0.

ein zu M gehöriges System (F), so gibt es eine Folge $\{j_n\}$ derart, da für jede Folge $\{i_n\}$, in der

$$i_n \geqq j_n \quad \text{für fast alle } n$$

ist, die Gleichung gilt:

$$\prod_{n=1}^{\infty} F_{i_1,\ldots,i_n} = 0 .$$

Wir zeigen zunächst: Zu jeder natürlichen Zahl m gibt es eine Indize folge $i_1^m, i_2^m, i_3^m, \ldots$, so daß für jede Folge $\{i_n\}$, die der Bedingun $i_{n+m} \geqq i_n^m$ für alle n genügt, die Gleichung gilt:

$$\prod_{n=1}^{\infty} F_{i_1,\ldots,i_n} = 0 .$$

Angenommen, dies wäre nicht der Fall; dann gibt es eine Zahl m, daß zu jeder Folge $\{i_n\}$ eine Folge $\{i'_n\}$ mit folgenden Eigenschaft existiert:

(1) $$i'_{n+m} \geqq i_n \qquad (n = 1, 2, \ldots$$

(2) $$\prod_{n=1}^{\infty} F_{i'_1, i'_2, \ldots, i'_n} \neq 0 .$$

Wir können schreiben: $F_{i_1,\ldots,i_n} = M \cdot A_{i_1,\ldots,i_n}$, wo $A_{i_1,\ldots,i_n}$ eine absol abgeschlossene Menge bedeutet. Wir setzen, wie beim Beweise von Satz $Q_k^1 = A_k$ und allgemein:

(*) $$Q_k^{n+1} = Q_k^n + \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty} A_{i_1,\ldots,i_n,k} \qquad (n, k = 1, 2, \ldots$$

Wir setzen ferner

$$\bar{Q}_k^n = Q_k^{n+m} \qquad (n, k = 1, 2, \ldots$$

Wie wir beim Beweise von Satz X sahen, sind die Mengen $\bar{Q}_k^n$ abgeschloss und genügen den Bedingungen

(a) $$\bar{Q}_k^n > \bar{Q}_{k+1}^n ,$$

(b) $$M \sum_{k=1}^{\infty} \bar{Q}_k^n = 0 .$$

Sei nun $\{i_n\}$ eine beliebige Indizesfolge, $\{i'_n\}$ eine gemäß (1) und gewählte Folge. Aus (*) und (1) ergibt sich:

$$\bar{Q}_{i_n}^n > A_{i'_1, i'_2, \ldots, i'_{n+m-1}, i_n} > A_{i'_1, i'_2, \ldots, i'_{n+m-1}, i'_{n+m}} .$$

Daraus schließen wir nach (2):

(c) $$M \prod_{n=1}^{\infty} Q_{i_n}^n \neq 0 .$$

s (a), (b), (c) folgt aber nach Satz IX die Existenz einer singulären erdeckungsfolge von M, im Widerspruch zur Annahme, M habe nicht Eigenschaft E^*. Damit ist gezeigt worden: Zu jeder Zahl m gibt es e Folge $\{j_n^m\}$ $(n=1,2,\ldots)$, so daß $\prod_{n=1}^{\infty} F_{i_1,\ldots,i_n}=0$, sobald die Unichung $i_{n+m} \geqq j_n^m$ für alle n erfüllt ist. Sei nun j_n die größte unter n Zahlen $j_n^1, j_{n-1}^2, \ldots, j_1^n$. Ich behaupte: Die Folge $\{j_n\}$ genügt der rderung des zu beweisenden Satzes. In der Tat, sei $\{i_n\}$ eine Folge art, daß $i_n \geqq j_n$ für fast alle n, etwa für $n \geqq N$ gilt. Es ist offenbar $_N \geqq j_n^N (n=1,2,\ldots)$, und folglich $\prod_{n=1}^{\infty} F_{i_1,\ldots,i_n}=0$. Damit ist Satz XIII wiesen.

§ 3.

Einige Eigenschaften der Mengen F_σ.

In diesem Paragraphen wollen wir einige Hilfsbetrachtungen anstellen, denen wir bei den folgenden Untersuchungen Gebrauch machen werden. Punkt p werde als ein *regulärer* Punkt der Menge M bezeichnet, falls e Umgebung[18]) U von p existiert, deren Durchschnitt mit M ein F_σ[19]) (dann hat auch jede in U enthaltene Umgebung von p dieselbe Eigenaft). Andernfalls werde er als ein *singulärer* Punkt von M bezeichnet. der singuläre Punkt von M ist ein Kondensationspunkt von M. Die nge M_s aller singulären Punkte von M verhält sich analog der Menge er Kondensationspunkte von M. Man sieht vor allem unmittelbar: e Menge M_r der regulären Punkte von M ist offen, die zu ihr kommentäre Menge M_s abgeschlossen[20]). In Analogie zum bekannten Satze, 3 jede nicht abzählbare separable Menge mindestens einen ihrer Konsationspunkte enthält, gilt

Satz XIV. *Eine separable Menge M, die kein F_σ ist, enthält mintens einen ihrer singulären Punkte.*

Angenommen, in der Tat, dies wäre nicht der Fall, zu jedem Punkt a M gibt es dann eine Umgebung $U(a)$, so daß $M \cdot U(a)$ ein F_σ ist. gibt unter den Mengen $M \cdot U(a)$ abzählbar viele, deren Vereinigung ist. M wäre daher ein F_σ, im Widerspruch zur Annahme.

Satz XV. *Ist M_r die Menge der regulären Punkte der separablen nge M, so ist $M \cdot M_r$ ein F_σ.*[21])

---

[18]) Wir können in dieser Definition den Begriff „*Umgebung*" durch „*abgeschlose Umgebung*" ersetzen.

[19]) Die leere Menge rechnen wir zu den F_σ hinzu.

[20]) M_s ist sogar, wie man leicht nachweist, perfekt.

[21]) In Analogie zu dem Satz, daß die Menge der Punkte von M, die keine densationspunkte von M sind, abzählbar ist.

Zu jedem Punkt a von $M \cdot M_r$ gibt es nämlich eine Umgebung $U(a$ so daß $M \cdot U(a)$ ein F_σ ist. Wegen $M \cdot U(a) = M \cdot M_r \cdot U(a)$ ist jed zur Menge $M \cdot M_r$ gehörige Punkt ein regulärer Punkt von $M \cdot M_r$. Dara folgt aber nach Satz XIV, daß M ein F_σ ist.

Satz XVI. *Ist M_s die Menge aller singulären Punkte der separab Menge M, so ist $M + M_s$ ein F_σ.*

Wir können nämlich schreiben: $M + M_s = M \cdot M_r + M_s$. Die Men $M \cdot M_r$ ist aber nach Satz XV ein F_σ, und die Menge M_s ist abgeschloss

Aus Satz XVI folgt der wichtige

Satz XVII. *Ist die separable Menge M kein F_σ, so enthält Komplement $C(M)$ mindestens einen singulären Punkt von M.*

Sei nun A eine beliebige Menge, M eine Teilmenge von A. Es darf kaum einer Erläuterung, was wir unter singulärem resp. regulär Punkte von M relativ zu A zu verstehen haben. Satz XVII entspricht

Satz XVIIa. *Ist die separable Teilmenge M von A kein F_σ in so gibt es in $A - M$ einen singulären Punkt von M relativ zu A.*

Wir werden gelegentlich von folgendem Satz Gebrauch machen:

Satz XVIII. *Ist die Vereinigung M der Mengenfolge $\{M_n\}$ k F_σ (in A), so gibt es in der Folge $\{M_n\}$ eine Menge M_i derart, daß kein F_σ in $M_i + C(M)$ ist, wo $C(M)$ das Komplement von M (in A) bedeu*

Angenommen, sämtliche M_n wären F_σ in $M_n + C(M)$. Dann w

$$M_n = B_n(M_n + C(M)) \qquad (n = 1, 2, \ldots$$

wo B_n ein F_σ (in A) bedeutet. Wegen $M_n < M$ ist $B_n C(M) = 0$, o $B_n < M$. Anderseits gilt offenbar

$$M = \Sigma M_n < \Sigma B_n,$$

und daher

$$M = \Sigma B_n.$$

M wäre also ein F_σ (in A), im Widerspruch zur Annahme.

§ 4.

Lösung des Problems im Bereiche der Mengen (A).

Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf die sog. Mengen (die hier kurz erläutert werden sollen[22]).

---

[22]) Sie wurden von M. Souslin eingeführt. Vgl. M. Souslin, Sur une dé tion des ensembles mesurables (B) sans nombres transfinis, Comptes Rendus (1917). Auch N. Lusin und W. Sierpiński, Sur quelques propriétés des en bles (A), Bull. Ac. de Cracovie, Mai 1918, S. 35. Im Euklidischen R_1 stimmen Mengen (A) mit den Projektionen der Borelschen Mengen des R_2 überein.

Wir legen einen beliebigen metrischen Raum zugrunde. Jedem endlichen System natürlicher Zahlen $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ sei eine abgeschlossene Menge $E_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ zugeordnet. Wir definieren eine Menge M durch folgende Vorschrift: Ein Punkt p soll dann und nur dann zu M gehören, wenn es eine Indizesfolge $\{j_n\}$ gibt, so daß p für jedes n in $E_{j_1, j_2, \ldots, j_n}$ enthalten ist. Die durch das System $\{E_{i_1, \ldots, i_n}\}$ in dieser Weise eindeutig festgelegte Menge bezeichnet man als eine *Menge* (A) und das System $\{E_{i_1, \ldots, i_n}\}$ als das *erzeugende System* von M. M kann auch als die Vereinigung aller Durchschnitte

$$E_{i_1} \cdot E_{i_1, i_2} \cdot E_{i_1, i_2, i_3, \ldots} \cdot$$

definiert werden. Nach Souslin sind Vereinigung und Durchschnitt abzählbar vieler Mengen (A) ebenfalls Mengen (A). Daraus folgt, da jede abgeschlossene Menge offenbar eine Menge (A) ist, daß auch *jede Borelsche Menge eine Menge* (A) *ist.* Die Umkehrung trifft nicht zu[23]). Die Gesamtheit der Mengen (A) ist umfassender als die der Borelschen Mengen.

Wir schreiten nun an die Lösung unseres Problems im Bereiche der Mengen (A). Im § 2 wurde definiert, was unter einem System (F) von M zu verstehen ist. Wir nennen nun ein solches System (F) *ausgezeichnet*, wenn für jedes Indizessystem $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ die Durchmesser der Mengen $F_{i_1, \ldots, i_n, 1}$, $F_{i_1, \ldots, i_n, 2}$, $F_{i_1, \ldots, i_n, 3}, \ldots$ gegen Null konvergieren. Dann gilt der Satz:

Satz XIX. *Ist M eine separable Menge (A) eines vollständigen Raumes und kein F_σ, so gibt es ein ausgezeichnetes System (F) von M, daß für jede Folge $\{i_n\}$*

$$\prod_{n=1}^{\infty} F_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \neq 0.$$

Sei $\{E_{i_1, \ldots, i_n}\}$ das erzeugende System von M. Wir bezeichnen mit $M_{j_1, j_2, \ldots, j_k}$ die Menge aller Punkte a, zu denen es eine Indizesfolge $\{i_n\}$ gibt, so daß $i_1 = j_1$, $i_2 = j_2$, $\ldots$, $i_k = j_k$, und daß a für alle n in $E_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ liegt. Es gilt offenbar

$$M_{j_1, j_2, \ldots, j_k} < E_{j_1, j_2, \ldots, j_k},$$

$$\begin{cases} M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n, \\ M_{j_1, j_2, \ldots, j_k} = \sum_{n=1}^{\infty} M_{j_1, j_2, \ldots, j_k, n}. \end{cases}$$

[23]) Es gilt folgender Satz: Damit eine Menge (A) eine Borelsche Menge sei, notwendig und hinreichend, daß ihr Komplement gleichfalls eine Menge (A) sei. N. Lusin und W. Sierpiński, a. a. O.

Wir wollen eine Folge von Umgebungen eines Punktes a, die si monoton abnehmend auf a zusammenziehen, „regulär" nennen. Fern setzen wir zur Abkürzung, wenn A eine Teilmenge von M bedeutet

$$A^* = A + C(M).$$

Aus (b) folgt nach Satz XVIII, daß es in der Folge $\{M_n\}$ ei Menge M_i gibt, die kein F_σ in M_i^* ist. Bei entsprechender Bezeichnu können wir annehmen, daß dies die Menge M_1 sei. Nach Satz XVI enthält $C(M)$ einen singulären Punkt a von M_1 relativ zu M_1^*. a Häufungspunkt von M_1, gehört also mit Rücksicht auf (a) zur abgeschlo senen Menge E_1. Sei $U_1, U_2, U_3, \ldots$ eine reguläre Folge von abgeschlo senen Umgebungen von a, deren Durchmesser < 1 sind. Setzen wir

$$A_{i_1} = U_{i_1} \cdot E_1 \qquad (i_1 = 1, 2, \ldots$$

Die Mengen A_{i_1} sind abgeschlossen. Die Menge $U_{i_1} \cdot M_1 = A_{i_1} \cdot M_1$ kein F_σ in M_1^* (nach der Definition des Punktes a). Daher ist $A_{i_1} \cdot$ auch in $A_{i_1} \cdot M_1^*$ kein F_σ[24]), und wegen $A_{i_1} \cdot M_1^* < (A_{i_1} \cdot M_1)^*$ ist $A_{i_1} \cdot$ kein F_σ in $(A_{i_1} \cdot M_1)^*$. Wegen $A_{i_1} M_1 = \sum_{k=1}^{\infty} A_{i_1} M_{1,k}$ gibt es nach Satz XVI einen Index $j(i_1)$, so daß die Menge $A_{i_1} \cdot M_{1, j(i_1)}$ kein F_σ in

$$A_{i_1} \cdot M_{1, j(i_1)} + (A_{i_1} \cdot M_1)^* - A_{i_1} \cdot M_1 = (A_{i_1} \cdot M_{1, j(i_1)})^*$$

ist. Die Anwendung von Satz XVIIa ergibt, daß die Menge $C(M)$ ein singulären Punkt a_{i_1} von $A_{i_1} \cdot M_{1, j(i_1)}$ relativ zu $(A_{i_1} \cdot M_{1, j(i_1)})^*$ enthält. $U_{i_1,1}, U_{i_1,2}, U_{i_1,3} \ldots$ eine reguläre Folge von abgeschlossenen Umgebung des Punktes a_{i_1} mit Durchmessern $< \frac{1}{2}$. Setzen wir

$$A_{i_1, i_2} = U_{i_1, i_2} \cdot A_{i_1} \cdot E_{1, j(i_1)} \qquad (i_1, i_2 = 1, 2, \ldots$$

Die Menge $U_{i_1, i_2} \cdot A_{i_1} \cdot M_{1, j(i_1)} = A_{i_1, i_2} \cdot M_{1, j(i_1)}$ ist kein F_σ in $(A_{i_1} \cdot M_{1, j(i_1)}$ Daraus schließen wir genau so, wie beim vorigen Schritt: $A_{i_1, i_2} \cdot M_{1, j}$ ist auch in $(A_{i_1, i_2} \cdot M_{1, j(i_1)})^*$ kein F_σ. Daher gibt es nach Satz XVI und XVIIa einen Index $j(i_1, i_2)$ und einen Punkt a_{i_1, i_2} von $C(M)$, daß a_{i_1, i_2} ein singulärer Punkt von $A_{i_1, i_2} \cdot M_{1, j(i_1), j(i_1, i_2)}$ relativ $(A_{i_1, i_2} \cdot M_{1, j(i_1), j(i_1, i_2)})^*$ ist. Sei $\{U_{i_1, i_2, n}\}$ eine reguläre Folge von abg schlossenen Umgebungen von a_{i_1, i_2}, deren Durchmesser $< \frac{1}{3}$ sind. W ordnen jeder dreigliedrigen Indizesfolge (i_1, i_2, i_3) die abgeschlossene Men

$$A_{i_1, i_2, i_3} = U_{i_1, i_2, i_3} \cdot A_{i_1, i_2} \cdot E_{1, j(i_1), j(i_1, i_2)}$$

zu. In derselben Weise fortfahrend definieren wir beim n-ten Schr für jede n-gliedrige Indizesfolge $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ eine natürliche Za $j(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ und eine abgeschlossene Menge $A_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$, so daß folgen Bedingungen erfüllt sind:

[24]) Es gilt allgemein: Ist M_1 in M abgeschlossen und ist N ein F_σ in M_1, ist N auch in M ein F_σ.

(1) $A_{i_1,\ldots,i_{n-1},i_n} > A_{i_1,\ldots,i_{n-1}i_n+1}$;

(2) $A_{i_1,\ldots,i_n} > A_{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1}}$;

(3) $d(A_{i_1,\ldots,i_n}) < \frac{1}{n}$ [25]);

(4) Die Folge $\{A_{i_1,\ldots,i_n,k}\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ zieht sich auf einen Punkt n $C(M)$ zusammen;

(5) $A_{i_1,i_2,\ldots,i_n} < E_{1,j(i_1),j(i_1,i_2),\ldots,j(i_1,\ldots,i_{n-1})}$;

(6) Setzt man $B_{i_1,i_2,\ldots,i_n} = A_{i_1,\ldots,i_n} \cdot M_{1,j(i_1),j(i_1,i_2),\ldots,j(i_1,\ldots,i_{n-1})}$, so ist $_{,\ldots,i_n}$ kein F_σ in $B^*_{i_1,\ldots,i_n}$.

Durch (6) wird für jedes n die Möglichkeit der Ausführung des chstfolgenden Schrittes verbürgt. Aus (6) folgt ferner, daß $A_{i_1,\ldots,i_n}$ sicher ht leer ausfällt.

Sei jetzt $\{i_n\}$ eine beliebige Indizesfolge. Die Folge A_{i_1}, A_{i_1,i_2}, $_{i_2,i_3}$, ... ist nach (2) und (3) eine monoton abnehmende Folge abschlossener Mengen mit gegen Null konvergierenden Durchmessern, sie daher mit Rücksicht auf die Vollständigkeit des Raumes einen nicht ren Durchschnitt. Aus (5) folgt nun:

$$\prod_{n=1}^{\infty} A_{i_1,\ldots,i_n} < M,$$

d somit:

$$M \cdot \prod_{n=1}^{\infty} A_{i_1,\ldots,i_n} \neq 0.$$

zen wir

$$F_{i_1,\ldots,i_n} = M \cdot A_{i_1,\ldots,i_n},$$

bilden die Mengen $F_{i_1,\ldots,i_n}$ infolge von (1), (2), (3), (4) ein ausgezeichnetes System (F) von M, und es gilt für jede Folge $\{i_n\}$

$$\prod_{n=1}^{\infty} F_{i_1,\ldots,i_n} \neq 0.$$

mit ist Satz XIX bewiesen.

Aus Satz XIX folgt nun bei Berufung auf Satz XI

Satz XX. *Eine Menge (A) eines vollständigen Raumes, die kein F_σ hat nicht die Eigenschaft E^*.*

Daraus folgt weiter

Satz XXI. *Damit eine halbkompakte Menge (A) eines beliebigen rischen Raumes die Eigenschaft E^* habe, ist notwendig und hinchend, daß sie ein F_σ sei.*

In der Tat, nach Satz III ist die Bedingung hinreichend. Es bleibt zeigen, daß sie notwendig ist. Sei M eine halbkompakte Menge (A),

[25]) Unter $d(A)$ verstehen wir stets den Durchmesser von A.

die kein F_σ ist. Es gibt eine in M abgeschlossene kompakte Menge M_1 die ebenfalls kein F_σ ist[26]). M_1 ist eine Menge (A) in der vollständige Menge M_1^0 [27]) und hat daher nach Satz XX nicht die Eigenschaft E^* Mit Rücksicht auf Satz IV hat auch M nicht die Eigenschaft E^*.

Nach Satz VIII folgern wir

Satz XXII. *Damit eine halbkompakte Menge (A) die Eigenschaft habe, ist notwendig und hinreichend, daß sie ein F_σ sei.*

§ 5.

Charakterisierung der F_σ und G_δ im Bereiche der Borelschen Mengen

Die Resultate des vorigen Paragraphen kann man dazu benutzen, di Borelschen Mengen zweiter Ordnung im Bereiche aller Borelschen Menge durch innere Eigenschaften zu charakterisieren.

Schreiben wir für zwei Folgen $\{i_n\}$, $\{j_n\}$ natürlicher Zahlen $\{i_n\} \geqq \{j_n\}$, wenn die Ungleichung $i_n \geqq j_n$ für fast alle n besteht[28] Dann gilt

Satz XXIII. *Ist M eine vollständige Menge, $\{F_{i_1,\ldots,i_n}\}$ ein aus gezeichnetes System (F) von M, so gibt es eine Indizesfolge $\{j_n\}$, so da für jede Folge $\{i_n\} \geqq \{j_n\}$ die Beziehung*

$$\prod_{n=1}^{\infty} F_{i_1,\ldots,i_n} = 0$$

gilt.

In der Tat, die Mengen $F_1, F_2, F_3, \ldots$ bilden eine Folge monoto abnehmender, in M abgeschlossener Mengen mit gegen Null konvergierende Durchmessern. Da $\prod_{n=1}^{\infty} F_n = 0$, sind nach einem bekannten Satze fast al Mengen der Folge $\{F_n\}$ leer. Es gibt also einen Index k, so da $F_k = F_{k+1} = F_{k+2} = \ldots = 0$. In derselben Weise schließen wir, daß zu jedem Indizessystem $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ einen Index $k(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ gibt, daß $F_{i_1,\ldots,i_n,k} = 0$, falls $k \geqq k(i_1, \ldots, i_n)$. Setzen wir $j_1 = k_1$; j_2 sei d größte unter den Zahlen $k(1), k(2), \ldots, k(j_1)$. Und allgemein: nachde

---

[26]) Sei nämlich $M = \Sigma M_n$, wo die M_n kompakt sind. Unter den in M a geschlossenen Mengen $M \cdot M_n^0$ gibt es sicher eine, die kein F_σ ist, sonst wäre auch ein F_σ.

[27]) Jede abgeschlossene und kompakte Menge ist vollständig.

[28]) Aus $\{i_n\} \geqq \{j_n\}$ und $\{j_n\} \geqq \{h_n\}$ folgt immer $\{i_n\} \geqq \{h_n\}$. $\{i_n^1\}, \{i_n^2\}, \{i_n^3\}, \ldots$ eine Folge von Folgen natürlicher Zahlen, so gibt es ei Folge $\{j_n\}$, so daß für jedes k $\{j_n\} \geqq \{i_n^k\}$ ist. Es genügt nämlich für j_n die größ unter den Zahlen $i_n^1, i_{n-1}^2, \ldots, i_1^n$ zu nehmen.

$j_2, \ldots, j_{n-1}$ bereits definiert sind, nehmen wir für j_n die größte unter Zahlen

$$k(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}) \quad \text{für} \quad i_l = 1, 2, \ldots, j_l \quad (l = 1, 2, \ldots, n-1).$$

gilt offenbar $F_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, j_n} = 0$, für beliebige Werte von $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$. aus ergibt sich nun, daß für jede Folge $\{i_n\} \geqq \{j_n\}$ fast alle unter Mengen $F_{i_1}, F_{i_1, i_2}, F_{i_1, i_2, i_3}, \ldots$ leer sind, und daher

$$\prod_{n=1}^{\infty} F_{i_1, \ldots, i_n} = 0,$$

nit Satz XXIII bewiesen ist.

Satz XXIV. *Sei M ein F_σ in einem vollständigen Raum, $\{F_{i_1, \ldots, i_n}\}$ ein ausgezeichnetes System (F) von M; dann gibt es eine Folge natürer Zahlen $\{j_n\}$, so daß für jede Folge $\{i_n\}$, die der Beziehung $\} \geqq \{j_n\}$ genügt,*

$$\prod_{n=1}^{\infty} F_{i_1, \ldots, i_n} = 0$$

In der Tat, M ist Vereinigung von abzählbar vielen vollständigen ngen $M_1, M_2, M_3, \ldots$.[29]). Die Mengen $F^k_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = M_k \cdot F_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ bilein ausgezeichnetes System (F) von M_k. Nach Satz XXIII gibt es Folge $\{j^k_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, so daß

$$\prod_{n=1}^{\infty} F^k_{i, \ldots, i_n} = M_k \prod_{n=1}^{\infty} F_{i_1, \ldots, i_n} = 0,$$

ald $\{i_n\} \geqq \{j^k_n\}$. Sei nun $\{j_n\}$ eine Folge, die für jedes k der Beung $\{j_n\} \geqq \{j^k_n\}$ genügt. Für jede Folge $\{i_n\} \geqq \{j_n\}$ gilt:

$$M_k \prod_{n=1}^{\infty} F_{i_1, \ldots, i_n} \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots$$

folglich

$$\prod_{n=1}^{\infty} F_{i_1, \ldots, i_n} = 0.$$

em wir Satz XXIV mit Satz XIX kombinieren, erhalten wir folgende i Sätze:

Satz XXVa. *Damit eine separable Menge (A) eines vollständigen ames ein F_σ sei, ist notwendig und hinreichend, daß es zu jedem ihrer gezeichneten Systeme (F) eine Indizesfolge $\{j_n\}$ gebe, so daß*

$$\prod_{n=1}^{\infty} F_{j_1, j_2, \ldots, j_n} = 0$$

[29]) Jede abgeschlossene Menge eines vollständigen Raumes ist vollständig.

Satz XXVb. *Damit eine separable Menge* (A) *eines vollständig Raumes ein* F_σ *sei, ist notwendig und hinreichend, daß es zu jedem ih ausgezeichneten Systeme* (F) *eine Indizesfolge* $\{j_n\}$ *gebe, so daß für je Folge* $\{i_n\} \geqq \{j_n\}$

$$\prod_{n=1}^{\infty} F_{i_1,\ldots,i_n} = 0$$

ist.

Die Beschränkung auf die Mengen (A) kann in Satz XXVa sich nicht entbehrt werden. *Die Eigenschaft von Satz* XXVa *kommt näml außer den* F_σ *auch allen Mengen zu, die keine perfekte Teilmenge e halten*[30]. Sei in der Tat M eine Menge ohne perfekten Teil, $\{F_{i_1,\ldots}$ ein ausgezeichnetes System (F) von M. Wir wollen zeigen: Es gibt e Folge $\{j_n\}$, für die $\prod_{n=1}^{\infty} F_{j_1,\ldots,j_n} = 0$ ist. Angenommen, es gelte für j Folge $\{i_n\}$

$$(*) \qquad \prod_{n=1}^{\infty} F_{i_1,\ldots,i_n} \neq 0.$$

Indem wir nötigenfalls das System $\{F_{i_1,\ldots,i_n}\}$ durch ein Teilsystem setzen, können wir annehmen, daß $d(F_{i_1,\ldots,i_n}) < \frac{1}{n}$ für belieb Werte von $i_1, \ldots, i_n$. Für jede Folge $\{i_n\}$ besteht der Durchschn $\prod_{n=1}^{\infty} F^0_{i_1,\ldots,i_n}$ aus genau einem Punkt, der wegen (*) in M liegen m Sei Q die Menge (A), die das System $\{F^0_{i_1,\ldots,i_n}\}$ als erzeugendes Syst besitzt. Q ist eine Teilmenge von M. Die Mengen $\overline{F}_{i_1,\ldots,i_n} = Q \cdot F_{i_1,\ldots}$ bilden ein System (F) von Q, und es gilt

$$\prod_{n=1}^{\infty} \overline{F}_{i_1,\ldots,i_n} \neq 0$$

für jede Folge $\{i_n\}$. Nach Satz XXIV ist daher Q kein F_σ und mit nicht abzählbar. Jede nicht abzählbare Menge (A) enthält aber bekan lich einen perfekten Teil[31]; also müßte Q und mithin auch M eine p fekte Teilmenge enthalten, im Widerspruch zur Annahme. Damit ist fragliche Behauptung bewiesen.

Es ist merkwürdig, daß dieselbe Struktureigenschaft einerseits sehr einfach gebauten F_σ und anderseits den sehr komplizierten nicht zählbaren Mengen ohne perfekten Teil zukommt.

---

[30]) Es gibt, wie F. Bernstein gezeigt hat, nicht abzählbare Mengen ohne fekten Teil. Vgl. Schoenflies, Entwicklung der Mengenlehre. Erste Hälfte. S. (1913).

[31]) Vgl. M. Souslin, a. a. O.

Die Frage, ob in Satz XXV b die Beschränkung auf den Bereich der ngen (A) beseitigt werden kann, bleibt offen[32]). Wenn diese Frage im ahenden Sinne beantwortet würde, so wäre damit mit Rücksicht auf z XIII bewiesen, daß in einem vollständigen Raum die Eigenschaft E^* den F_σ zukommt.

Aus den Sätzen XXV a und XXV b wollen wir nun eine innere Charakisierung der Mengen G_δ im Bereiche der zu Mengen (A) komplementären ngen[33]) eines vollständigen Raumes herleiten.

Sei M eine beliebige Menge. Jedem System $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ natürher Zahlen sei ein Punkt $p_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ von M zugeordnet. Das System $_1,\ldots,i_n\}$ bezeichnen wir als ein *Häufungssystem* von M, wenn die Behungen

$$p_{i_1,\ldots,i_n} = \lim_{k=\infty} p_{i_1,\ldots,i_n,k}$$

ten. Ein Häufungssystem $\{p_{i_1,\ldots,i_n}\}$ von M nennen wir *regulär*, wenn es jedem Indizessystem $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ eine Zahl $k(i_1, \ldots, i_n)$ gibt, so daß Folge $p_{i_1}, p_{i_1,i_2}, p_{i_1,i_2,i_3}, \ldots$ gegen einen Punkt von M konvergiert, nn die Ungleichungen

$$i_2 > k(i), \; i_3 > k(i_1, i_2), \; \ldots, \; i_n > k(i_1, \ldots, i_{n-1}), \; \ldots$$

tehen. Dann gilt

Satz XXVI. *Ist M ein G_δ in einem vollständigen Raum, so ist jedes ufungssystem von M regulär.*

Setzen wir in der Tat $M = O_1 \cdot O_2 \cdot O_3 \cdot \ldots$, wo die O_k offene Mengen euten. Sei $\{p_{i_1,\ldots,i_n}\}$ ein Häufungssystem von M. Sei $U_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ eine gebung von $p_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$, deren Durchmesser $< \frac{1}{n}$ ist und die samt ihrer grenzung in O_n liegt. Zu jedem Index i_1 gibt es einen Index $k(i_1)$, so der Punkt p_{i_1,i_2} in U_{i_1} liegt, wenn $i_2 > k(i_1)$. Zu jedem Indexpaar $i_2)$ gibt es eine Zahl $k(i_1, i_2)$, so daß p_{i_1,i_2,i_3} in $U_{i_1} \cdot U_{i_1,i_2}$ liegt, wenn Ungleichungen $i_2 > k(i_1)$, $i_3 > k(i_1, i_2)$ erfüllt sind. Beim n-ten Schritt nieren wir zu jedem Indizessystem $(i_1, \ldots, i_n)$ eine Zahl $k(i_1, \ldots, i_n)$, daß der Punkt $p_{i_1,\ldots,i_n}$ in der Menge $U_{i_1} \cdot U_{i_1,i_2} \cdot \ldots \cdot U_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$, entzen ist, wenn die Ungleichungen

$$i_2 > k(i_1), \; i_3 > k(i_1, i_2), \; \ldots, \; i_n > k(i_1, \ldots, i_{n-1})$$

---

[32]) Ich vermute, daß die Einschränkung entbehrlich ist. Dafür spricht auch die t zu beweisende Tatsache, daß die Gesamtheit aller Mengen, denen die Eigenft von Satz XXV b zukommt, ein „σ-System" bildet, d. h. die Vereinigung abbar vieler Mengen des Systems gehört wieder zum System.

[33]) Zu diesem Bereich gehören natürlich auch alle Borelschen Mengen.

bestehen. Wir wollen zeigen: Für jede Indizesfolge $\{i_n\}$, in der

$$(\alpha) \qquad i_n > k(i_1, \ldots, i_{n-1}) \qquad (n = 1, 2, \ldots$$

ist, konvergiert die Punktfolge $p_{i_1}, p_{i_1,i_2}, p_{i_1,i_2,i_3}, \cdots$ gegen einen Punk von M. Sind in der Tat die Ungleichungen (α) erfüllt, so liegt der Punk $p_{i_1,\ldots,i_n,\ldots,i_m}$ $(m > n)$ in $U_{i_2,\ldots,i_n}$, sein Abstand vom Punkte $p_{i_1,\ldots,i_n}$ i daher kleiner als $\frac{1}{n}$. Daraus folgt zunächst mit Rücksicht auf die Vollstä digkeit des Raumes, daß die Folge $p_{i_1}, p_{i_1,i_2}, p_{i_1,i_2,i_3}, \cdots$ gegen ein Punkt p konvergiert. Da fast alle Punkte dieser Folge in $U_{i_1,\ldots,i_n}$ liege liegt p in der abgeschlossenen Hülle $U^0_{i_1,\ldots,i_n}$ von $U_{i_1,\ldots,i_n}$ und mith in O_n (wegen $U^0_{i_1,\ldots,i_n} < O_n$). p liegt also in allen O_n, folglich ist ein Punkt von M. Damit ist Satz XXVI bewiesen.

Es folgt weiter

Satz XXVII a. *Damit die separable Menge M eines vollständig Raumes, die zu einer Menge (A) komplementär ist, ein G_δ sei, ist no wendig und hinreichend, daß es in jedem Häufungssystem $\{p_{i_1,\ldots,i_n}\}$ v M eine Folge $p_{i_1}, p_{i_1,i_2}, p_{i_1,i_2,i_3}, \ldots$ gebe, die gegen einen Punkt p von konvergiert.*

Aus Satz XXVI folgt unmittelbar, daß die Bedingung *notwendig* i Wir wollen zeigen, daß sie auch *hinreichend* ist. Sei in der Tat M ei Menge, deren Komplement eine Menge (A) ist, die aber kein G_δ i $C(M)$ ist kein F_σ,[34]) und daher gibt es nach Satz XXV a ein ausgezeic netes System (F) von M, so daß für jede Folge $\{i_n\}$

$$(') \qquad \prod_{n=1}^{\infty} F_{i_1,\ldots,i_n} \neq 0$$

ist. Wir können annehmen, daß für jedes System $(i_1, \ldots, i_n)$ der Durc messer von $F_{i_1,\ldots,i_n} < \frac{1}{n}$ ist. Die Folge $F_{i_1,\ldots,i_n,1}, F_{i_1,\ldots,i_n,2}, F_{i_1,\ldots,i_n,3}, \ldots$ zieht sich auf einen Punkt $p_{i_1,\ldots,i_n}$ von M zusammen. Die Punkte $p_{i_1,\ldots}$ bilden ein Häufungssystem von M, denn es gilt:

$$p_{i_1,\ldots,i_n} \varepsilon F_{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1}},$$

und

$$p_{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1}} \varepsilon F_{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1}}.$$

Daher ist

$$p_{i_1,\ldots,i_n} = \lim_{i_{n+1}=\infty} p_{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1}}.$$

Im System $\{p_{i_1,\ldots,i_n}\}$ gibt es keine Folge $p_{i_1}, p_{i_1,i_2}, p_{i_1,i_2,i_3}, \ldots$ die gegen einen Punkt von M konvergiert. Denn, angenommen, gäbe eine solche Folge. Ihr Limespunkt p liegt (wegen $p_{i_1,\ldots,i_n} \varepsilon F^0_{i_1,\ldots}$

[34]) $C(M)$ kann stets als separabel vorausgesetzt werden, indem man, wenn wendig, die abgeschlossene Hülle M^0 von M als Raum wählt.

der Menge $\prod_{n=1}^{\infty} F^0_{i_1,\ldots,i_n}$. Dies führt aber zu einem Widerspruch, denn Durchschnitt $\prod_{n=1}^{\infty} F^0_{i_1,\ldots,i_n}$ besteht aus nur einem Punkt, der wegen (') $C(M)$ enthalten ist. Damit ist der fragliche Satz bewiesen[35]).

Aus Satz XXVI folgt nun

Satz XXVII b. *Damit die separable Menge M eines vollständigen umes, die zu einer Menge (A) komplementär ist, ein G_δ sei, ist notndig und hinreichend, daß jedes Häufungssystem von M regulär sei.*

In dieser Charakterisierung der Mengen G_δ kommt weder der Abnds- noch der Umgebungsbegriff vor, sondern nur der allgemeine *Grenzriff*. Nun sind nach einem Satze von P. Alexandroff[36]) die in vollndigen Räumen liegenden Mengen G_δ selbst mit vollständigen Räumen nöomorph. Ließe sich also in Satz XXVII b die Einschränkung auf ngen (A) beseitigen[37]), so könnten wir ihn auffassen als eine *Charakterierung der vollständigen Mengen durch Limeseigenschaften*, und wir ten die Möglichkeit, den Vollständigkeitsbegriff auf die allgemeinsten nesklassen (im Sinne von Fréchet) zu übertragen[38]).

[35]) Man zeigt wie oben, daß die Einschränkung auf Mengen (A) in Satz XXVII a t entbehrt werden kann. — Aus diesem Satz läßt sich (wie in einem späteren satz näher ausgeführt werden soll) folgendes Ergebnis herleiten: *Im Bereiche aller Mengen (A) komplementären Mengen eines vollständigen Raumes sind die Mengen G_δ enigen, die keine relativ abgeschlossene insichdichte und abzählbare Teilmenge alten.*

[36]) Vgl. P. Alexandroff, Sur les ensembles de la première classe et les enbles abstraits. Comptes Rendus 178 (1924), S. 185–187. F. Hausdorff, Die ngen G_δ in vollständigen Räumen. Fundamenta Mathematicae 6 (1924), S. 146–148.

[37]) Dann ließe sich diese Einschränkung, wie man leicht sieht, auch in Satz XXV b mithin in den Sätzen XXI und XXII beseitigen.

[38]) Die Entwicklungen dieser Arbeit gestatten Anwendungen in der Theorie der len Funktionen, die den Gegenstand einer besonderen Untersuchung bilden werden.

(Eingegangen am 28. Juli 1924.)

Über einige kubische Gleichungen mit zwei Unbestimmten.

Von

Trygve Nagell in Oslo (Norwegen).

Einleitung.

Es sei $D = fg^2$, wo f und g ganze, positive, quadratfreie und teile fremde Zahlen sind, $fg > 1$. Es sei ferner $\overline{D} = f^2 g$, $\Theta = \sqrt[3]{D}$ u $\overline{\Theta} = \sqrt[3]{\overline{D}}$. Dann wird nach Dedekind[1]) der reine kubische Zahlkörper $K(\Theta)$ einen Körper erster oder zweiter Art genannt, je nachdem $f^2 - g^2$ unte bar oder teilbar durch 9 ist. Diese Definition kann man offenbar au so formulieren: $K(\Theta)$ ist von erster Art, wenn $D \equiv 0, \equiv \pm 2, \equiv \pm$ oder $\equiv \pm 4 \pmod 9$ ist; er ist von zweiter Art, wenn $D \equiv \pm 1 \pmod 9$ i

In einem Körper erster Art bildet $1, \Theta, \Theta^2$ eine Basis[1]).

In einem Körper zweiter Art bildet $\frac{1}{3}(1 + f\Theta + g\overline{\Theta})$, Θ, $\overline{\Theta}$ eine Bas Die Körper $K(\Theta)$ und $K(\overline{\Theta})$ sind natürlich identisch.

Die zu einer Zahl α von $K(\Theta)$ konjugierten Zahlen bezeichnen w wie üblich mit α' und α''. Dann sind α' und α'' imaginär-konjugie und folglich $\alpha'\alpha''$ positiv reell. Die Norm der Zahl

$$\alpha = x + y\Theta + z\overline{\Theta},$$

mit rationalen Koeffizienten x, y, z ist offenbar

$$N(\alpha) = x^3 + Dy^3 + \overline{D}z^3 - 3fgxyz.$$

Es gibt bekanntlich eine Fundamentaleinheit ξ von der Beschaffe heit, daß jede beliebige Einheit sich in der Form

$$\eta = \pm \xi^n$$

darstellen läßt, wo n eine ganze (rationale) Zahl ist. Es genügt ξ so wählen, daß $0 < \xi < 1$ ist. Im folgenden werden wir es nur mit Zahl

[1]) Siehe R. Dedekind, Über die Anzahl der Idealklassen in reinen kubisch Körpern, Journal für Mathematik 121 (1900), S. 40.

tun haben, die zu dem Ringe $R(1, \Theta, \overline{\Theta})$ gehören. In diesem Ringe es auch eine fundamentale Einheit[2]), es sei ζ, so daß jede Einheit Ringes von der Form $\pm\zeta^n$ ist, mit ganzzahligem n. Wir können ζ itiv und < 1 annehmen.

Der Zusammenhang zwischen ξ und ζ ist nun leicht aufzudecken. einem Körper erster Art ist offenbar $\zeta = \xi$. In einem Körper zweiter hat man, wie wir zeigen wollen, entweder $\zeta = \xi$ oder $\zeta = \xi^2$.

Es sei nämlich

$$\xi^m = \frac{1}{3}(x + y\Theta + z\overline{\Theta}),$$

ganzen, rationalen x, y, z, eine Einheit, und folglich

$$\begin{cases} x = \xi^m + (\xi')^m + (\xi'')^m, \\ y\Theta = \xi^m + (\xi')^m \varrho^2 + (\xi'')^m \varrho, \\ z\overline{\Theta} = \xi^m + (\xi')^m \varrho + (\xi'')^m \varrho^2, \end{cases}$$

em ϱ eine Wurzel der Gleichung $\varrho^2 + \varrho + 1 = 0$ ist. Die drei konerten Zahlen ξ, ξ' und ξ'' sind ganze Zahlen in dem Körper sechsten des $\Omega(\sqrt{-3}, \Theta)$. Nun gilt in $K(\Theta)$ für das Hauptideal (3) die Zerung

$$(3) = \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1^2,$$

$\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ verschiedene Primideale ersten Grades in $K(\Theta)$ sind[3]). Im per Ω ist folglich

$$(\sqrt{-3})^2 = \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1^2,$$

also

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^2,$$

$\mathfrak{P}$ ein Primideal ersten Grades in Ω ist. (Da Ω ein Galoisscher per ist, folgt hieraus, daß (3) gleich dem Produkt von sechs Primlen ersten Grades in Ω ist.)

Es sei nun α eine ganze Zahl in Ω, die nicht durch $\mathfrak{P}$ teilbar ist. n ist

$$\alpha^{N(\mathfrak{P})-1} \equiv \alpha^2 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{P}}.$$

n wir in (1) $m = 2$ nehmen, wird folglich

$$x \equiv y\Theta \equiv z\overline{\Theta} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}.$$

---

[2]) Siehe D. Hilbert, Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlen, S. 244. esbericht d. Deutschen Mathem.-Vereinigung 1898.

[3]) Dedekind, loc. cit.

Nun sind Θ und $\overline{\Theta}$ unteilbar durch $\mathfrak{P}$; da $K(\Theta)$ von zweiter Art i
also wird

$$x \equiv y \equiv z \equiv 0 \pmod 3,$$

weil x, y und z rational sind.

In zwei früheren Arbeiten[4]) habe ich die unbestimmte Gleichung

$$x^3 + Dy^3 = 1 \tag{2}$$

untersucht und u. a. den Satz bewiesen, daß sie höchstens eine Lösu
hat, in ganzen nicht verschwindenden Zahlen x, y.

Ich werde hier zeigen, daß derselbe Satz für die folgende allgemeine
Gleichung gilt,

$$Ax^3 + By^3 = C, \tag{3}$$

wo $C = 1$ oder $= 3$, und wo A und B beliebige ganze (rationale) Zahl
sind. (Die Gleichungen $2x^3 + y^3 = 3$ und $4x^3 + y^3 = 3$ werden jedo
hier nicht mitgenommen, da sie sich unserer Methode entziehen. Mitt
einer anderen Methode ist es mir gelungen zu beweisen, daß die erst
genau die zwei Lösungen $x = 1$, $y = 1$ und $x = 4$, $y = -5$ hat, u
daß die zweite die einzige Lösung $x = 1$, $y = -1$ hat.)

Die Aufgabe, die Gleichung (2) zu lösen, besteht offenbar darin,
sämtlichen (positiven) Einheiten von der Form

$$\eta = x + y\Theta$$

im Körper $K(\Theta)$ zu bestimmen. Jede positive Einheit von dieser For
mit ganzzahligem x und y, ist < 1. Denn wegen $x^3 + Dy^3 = 1$ ist

$$\frac{1}{\eta} = x^2 - xy\Theta + y^2\Theta^2 \geqq 1 + \Theta + \Theta^2 > 3,$$

weil xy negativ ist. Es ist also, wenn ζ die Fundamentaleinheit
Ringes $R(1, \Theta, \overline{\Theta})$ ist,

$$\eta = \zeta^m,$$

wo m eine positive ganze Zahl ist.

In der Gleichung (3) können wir offenbar ohne an Allgemeinheit
verlieren folgendes annehmen: A und B sind positiv und kubenfrei (d.
durch keinen Kubus einer Primzahl teilbar) und teilerfremd; ferner
$A > B$. Wenn $C = 3$, ist AB nicht durch 3 teilbar. Wenn $C =$
ist $B > 1$.

---

[4]) Vollständige Lösung einiger unbestimmten Gleichungen dritten Grades, u
Über die Einheiten in reinen kubischen Zahlkörpern, Videnskapsselskapets Skrif
Kristiania, Mat.-Naturw. Klasse, 1922, Nr. 14 und 1923, Nr. 11.

Wir setzen $A = ac^2$ und $B = bd^2$, wo a, b, c, d ganze, positive, adratfreie und paarweise teilerfremde Zahlen sind.

Besteht die Gleichung (3), so ist offenbar die Zahl

$$\eta = \frac{1}{C}(x\sqrt[3]{A} + y\sqrt[3]{B})^3 = 1 + \frac{3}{C}x^2y\sqrt[3]{A^2B} + \frac{3}{C}xy^2\sqrt[3]{AB^2}$$

e positive Einheit im Körper $K\left(\sqrt[3]{\frac{A}{B}}\right)$. Denn η ist ganz, und es ist

$$\eta\eta'\eta'' = \frac{1}{C^3}(Ax^3 + By^3)^3 = 1.$$

Ist umgekehrt η eine positive Einheit in diesem Körper von der Form

$$\eta = \frac{1}{C}(x\sqrt[3]{A} + y\sqrt[3]{B})^3,$$

ist $\eta\eta'\eta'' = \frac{1}{C^3}(Ax^3 + By^3)^3 = 1$ und folglich

$$Ax^3 + By^3 = C.$$

Die vollständige Auflösung der Gleichung (3) besteht also darin, die ntlichen Einheiten von der Form (4) zu bestimmen.

Wenn wir von dem Falle $x = y = 1$, $A = 2$, $B = 1$, $C = 3$ absehen, jede positive Einheit von der Form (4) < 1. Denn es ist

$$\frac{1}{\eta} = \frac{1}{C^2}(x^2\sqrt[3]{A^2} - xy\sqrt[3]{AB} + y^2\sqrt[3]{B^2})^3 > \frac{27}{C^2} \geqq 3.$$

gen $Ax^3 + By^3 = C$ haben nämlich, von dem Ausnahmefall abgesehen, Zahlen x und y entgegengesetztes Vorzeichen.

Wenn $\Theta = \sqrt[3]{ac^2b^2d}$ und $\overline{\Theta} = \sqrt[3]{a^2cbd^2}$ ist, gehört eine Einheit η von Form (4) offenbar zu dem Ringe $R(1, \Theta, \overline{\Theta})$. Ist ζ die Fundamentalheit dieses Ringes (also wie früher $0 < \zeta < 1$), so ist folglich

$$\eta = \zeta^m,$$

m eine positive, ganze Zahl ist.

§ 1.

Hilfssätze über die Zahlen $(x\sqrt[3]{A} + y\sqrt[3]{B})^n$.

In den zwei früheren Arbeiten[5]) habe ich die folgenden Sätze bewiesen:

Hilfssatz I. *Es sei D eine kubenfreie ganze rationale Zahl > 1. seien ferner x und y zwei ganze rationale Zahlen, so daß x und y D erfremd sind. Dann sind die rationalen Koeffizienten X, Y, Z in*

$$(x + y\sqrt[3]{D})^n = X + Y\sqrt[3]{D} + Z(\sqrt[3]{D})^2$$

[5]) Siehe [4]).

mit ganzzahligem $n > 1$, sämtlich von Null verschieden, wenn wir von den folgenden zwei Fällen absehen:

$$(\sqrt[3]{10} - 1)^5 = 99 - 45\sqrt[3]{10},$$

$$(\sqrt[3]{4} - 1)^4 = -15 + 12\sqrt[3]{2}.$$

Hilfssatz II. *Es seien D_1 und D_2 zwei kubenfreie ganze rationale Zahlen, die beide > 1 sind. Es seien ferner x und y zwei ganze rationale Zahlen, so daß xD_1 und yD_2 teilerfremd sind. Dann sind die rationalen Koeffizienten X, Y und Z in*

$$(x\sqrt[3]{D_1} + y\sqrt[3]{D_2})^{3n} = X + Y\sqrt[3]{D_1 D_2^2} + Z\sqrt[3]{D_1^2 D_2}$$

mit ganzzahligem $n > 0$ sämtlich von Null verschieden, mit der einzigen Ausnahme

$$(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2})^6 = -171 + 63\sqrt[3]{20}.$$

Zu diesen Resultaten fügen wir hier das folgende hinzu:

Hilfssatz III. *Es seien D_1 und D_2 zwei kubenfreie ganze rationale Zahlen, die beide > 1 sind. Es seien ferner x und y zwei ganze rationale Zahlen, so daß xD_1 und yD_2 teilerfremd sind. Dann sind die rationalen Koeffizienten X, Y und Z in*

$$(x\sqrt[3]{D_1} + y\sqrt[3]{D_2})^{3n-1} = X(\sqrt[3]{D_1})^2 + Y(\sqrt[3]{D_2})^2 + Z\sqrt[3]{D_1 D_2}$$

mit ganzzahligem $n > 0$ sämtlich von Null verschieden.

Beweis. $X = 0$ ist offenbar unmöglich, weil $D_2 > 1$; und $Y \neq 0$ weil $D_2 > 1$. Ist $Z = 0$, so wird

$$\binom{3n-1}{1} x^{3n-2} y D_1^{n-1} + \binom{3n-1}{4} x^{3n-5} y^4 D_1^{n-2} D_2 + \ldots + \binom{3n-1}{3n-2} x y^{3n-2} D_2^{n-1} = 0.$$

Diese Gleichung ist symmetrisch in bezug auf x, D_1 und y, D_2. Durch Division mit $(3n-1)xy$ ergibt sich

$$-x^{3n-3} D_1^{n-1} = \binom{3n-2}{3} \frac{x^{3n-6} y^3 D_1^{n-2} D_2}{4} + \sum_{k \geqq 2} \binom{3n-2}{3k} \frac{x^{3n-3k-3} y^{3k} D_1^{n-k-1} D_2^k}{3k+1}$$

Es sei nun D_2 durch die ungerade Primzahl q teilbar. Wegen $q^k \geqq 3^k > 3k+1$ für alle $k \geqq 2$, sind dann alle Glieder auf der rechten Seite $\equiv 0 \pmod{q}$. Dies ist aber unmöglich, da die linke Seite, $-x^{3n-3} D_1^{n-1}$, nicht durch q teilbar ist. Es bleiben somit nur die Möglichkeiten $D_2 = 2$ und $D_2 =$

ck. Wegen der Symmetrie folgt dann aber auch $D_1 = 2$ oder $D_1 = 4$. geht aber nicht, weil D_1 und D_2 teilerfremd sind. Unser Hilfssatz olglich bewiesen.

Darauf wollen wir den folgenden Satz beweisen:

Hilfssatz IV. *Es seien D_1 und D_2 zwei kubenfreie ganze rationale len, die beide > 1 sind. Es seien ferner x und y zwei ganze ratio- Zahlen, so daß xD_1 und yD_2 teilerfremd sind. Dann sind die rnalen Koeffizienten X, Y und Z in*

$$(x\sqrt[3]{D_1} + y\sqrt[3]{D_2})^{3n+1} = X\sqrt[3]{D_1} + Y\sqrt[3]{D_2} + Z(\sqrt[3]{D_1 D_2})^2$$

ganzzahligem $n > 0$, sämtlich von Null verschieden.

Beweis. $X = 0$ ist unmöglich, weil $D_2 > 1$, ebenso ist $Y \neq 0$, weil > 1. Ist $Z = 0$, so ergibt sich:

$$\binom{3n+1}{2} x^{3n+1} y^2 D_1^{n-1} + \binom{3n+1}{5} x^{3n-4} y^5 D_1^{n-2} D_2 + \ldots + \binom{3n+1}{3n-1} x^2 y^{3n-1} D_2^{n-1} = 0.$$

e Gleichung ist symmetrisch in bezug auf x, D_1 und y, D_2. Durch sion mit $\frac{3}{2}n(3n+1)x^2y^2$ ergibt sich

$$-x^{3n-3} D_1^{n-1} = \binom{3n-1}{3} \frac{2x^{3n-6} y^3 D_1^{n-2} D_2}{4 \cdot 5} + \sum_{k \geqq 2} \binom{3n-1}{3k} \frac{2x^{3n-3k-3} y^{3k} D_1^{n-k-1} D_2^k}{(3k+1)(3k+2)}.$$

Es sei y durch die Primzahl q teilbar. Wegen $q^{3k} \geqq 2^{3k} > 3k+2$ alle $k \geqq 1$ sind dann alle Glieder auf der rechten Seite $\equiv 0 \pmod q$. ist unmöglich, da q nicht in $x^{3n-3} D_1^{n-1}$ aufgeht. Folglich ist $y = \pm 1$. Es sei nun D_2 durch die Primzahlpotenz q^α teilbar. (Dann ist also 1 oder $\alpha = 2$.) Wenn $q^\alpha > 2$ ist, sind die sämtlichen Glieder der me $\equiv 0 \pmod q$; denn es ist für alle $k \geqq 2$, $q^{\alpha k} \geqq 3^k > 3k+2$. erste Glied auf der rechten Seite (für $k = 1$) ist auch $\equiv 0 \pmod q$, n q^α von 2 und 5 verschieden ist. In diesem Falle ist also die rechte e $\equiv 0 \pmod q$, was aber unmöglich ist, da q in $x^{3n-3} D_1^{n-1}$ nicht auf-. Folglich muß $q^\alpha = 2$ oder $q^\alpha = 5$ sein. Für D_2 bestehen somit nur Möglichkeiten $D_2 = 2, 5$ oder 10. Wegen der Symmetrie muß dann $D_1 = 2, 5$ oder 10 sein; und ferner muß $x = \mp 1$ (x und y haben ıbar entgegengesetztes Vorzeichen.) Da aber D_1 und D_2 teilerfremd , bleibt nur die Möglichkeit $D_1 = 5$, $D_2 = 2$ zurück. (Wir können ınehmen, daß $D_1 > D_2$ ist.) Wir haben also zu untersuchen, für welche e Gleichung

$$(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2})^{3n+1} = X\sqrt[3]{5} + Y\sqrt[3]{2}$$

stattfindet, oder wenn

$$\left(\sqrt[3]{\frac{5}{3}}-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)^{3n+1}=A\sqrt[3]{\frac{5}{3}}+B\sqrt[3]{\frac{2}{3}}. \tag{1}$$

A und B sind hier ganz (rational); denn es ist

$$\left(\sqrt[3]{\frac{5}{3}}-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)^{3}=1+\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{50}.$$

Diese Zahl ist offenbar eine positive Einheit im Körper $K(\sqrt[3]{20})$; ihre Norm ist $+1$.

Es sei zunächst n ungerade und $3n+1=2m$. Da $m\equiv 2 \pmod 3$ ist, können wir $m=3p+2$ setzen. Dann wird

$$\left(\sqrt[3]{\frac{5}{3}}-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)^{m}=(1+\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{50})^{p}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{5}{3}}-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)^{2}$$

$$=x\sqrt[3]{\frac{25}{9}}+y\sqrt[3]{\frac{4}{9}}+z\sqrt[3]{\frac{10}{9}},$$

wo x, y und z ganze (rationale) Zahlen sind, die der Gleichung

$$25x^3+4y^3+10z^3-30xyz=9 \tag{2}$$

genügen. Die Gleichung (1) gibt dann

$$\left(x\sqrt[3]{\frac{25}{9}}+y\sqrt[3]{\frac{4}{9}}+z\sqrt[3]{\frac{10}{9}}\right)^{2}=A\sqrt[3]{\frac{5}{3}}+B\sqrt[3]{\frac{2}{3}},$$

folglich

$$z^2=-2xy. \tag{3}$$

Es sei δ der größte gemeinsame Teiler von x und y; dann muß auch δ in z aufgehen. Wegen (2) ist aber der größte gemeinsame Teiler von x, y und z gleich 1, folglich $\delta=1$. Wegen (2) ist x ungerade. Daher folgt aus (3)

$$x=\pm u^2,\quad y=\mp 2u^2,\quad z=2uv,$$

wo u und v ganze teilerfremde Zahlen sind. Nun folgt aus (2) $4y^3\equiv 9 \pmod 5$, also

$$4y^3\equiv\mp 32v^6\equiv\mp 2v^6\equiv 9 \pmod 5,$$

was unmöglich ist, da ± 2 quadratischer Nichtrest von 5 ist.

Es sei endlich n gerade, $n=2m$. Wegen

$$\left(\sqrt[3]{\frac{5}{3}}-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)^{6}=-19+7\sqrt[3]{20}$$

ergibt sich dann

$$(-19+7\sqrt[3]{20})^{m}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{5}{3}}-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)=A\sqrt[3]{\frac{5}{3}}+B\sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$$

der linken Seite muß der Koeffizient von $\sqrt[3]{\frac{100}{3}}$ verschwinden, also

$$(-19)^{m-1}\cdot 7+\binom{m}{4}(-19)^{m-4}\cdot 7^4\cdot 20+\binom{m}{7}(-19)^{m-7}\cdot 7^7\cdot 20^2+\dots$$
$$=\binom{m}{2}(-19)^{m-2}\cdot 2\cdot 7^2+\binom{m}{5}(-19)^{m-5}\cdot 2\cdot 7^5\cdot 20+\dots.$$

ch Division mit $7m$ ergibt sich hieraus

$$(-19)^{m-1}+\sum_{k\geqq 1}\binom{m-1}{3k}\frac{(-19)^{m-k-1}\cdot 7^{3k}\cdot 20^k}{3k+1}$$
$$=\sum_{k\geqq 0}\binom{m-1}{3k+1}\frac{(-19)^{m-k-2}\cdot 7^{3k+1}\cdot 2\cdot 20^k}{3k+2}.$$

$7^{3k}>3k+1$ für alle $k\geqq 1$, ist die erste Summe $\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,7)$. Die te Summe ist auch $\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,7)$; denn es ist $7^{3k+1}>3k+2$ für alle 0. Dies ist aber unmöglich, weil $(-19)^{m-1}$ durch 7 nicht teilbar Der Hilfssatz IV ist damit bewiesen.

§ 2.

Die Berechnung der Fundamentaleinheit des Ringes $R(1,\Theta,\bar{\Theta})$. Numerische Beispiele.

Hat man eine Einheit η des Ringes $R(1,\Theta,\bar{\Theta})$ gefunden, so kann die Fundamentaleinheit ζ des Ringes in der folgenden Weise bestimmen. Es wird angenommen, daß $0<\eta<1$ und $0<\zeta<1$. Es $\eta=\zeta^m$ mit $m\geqq 1$, dann ist

$$|\eta'|=|\eta''|=|\zeta'|^m=|\zeta''|^m>1.$$

ist ferner $\frac{1}{\eta}=\eta'\eta''=|\eta'|^2$. Es sei nun

$$\zeta=x+y\Theta+z\bar{\Theta}$$

ganzen (rationalen) x,y,z, und folglich, wenn ϱ eine Wurzel der chung $\varrho^2+\varrho+1=0$ ist,

$$\zeta'=x+y\Theta\varrho+z\bar{\Theta}\varrho^2,$$
$$\zeta''=x+y\Theta\varrho^2+z\bar{\Theta}\varrho.$$

rauss folgt

$$x=\frac{1}{3}(\zeta+\zeta'+\zeta''),$$
$$y=\frac{1}{3\Theta}(\zeta+\zeta'\varrho^2+\zeta''\varrho),$$
$$z=\frac{1}{3\bar{\Theta}}(\zeta+\zeta'\varrho+\zeta''\varrho^2),$$

woraus wegen (1)

$$(2)\qquad \begin{cases} |x| < \frac{1}{3}(1+2|\sqrt[m]{\eta'}|), \\ |y| < \frac{1}{3\bar{\Theta}}(1+2|\sqrt[m]{\eta'}|), \\ |z| < \frac{1}{3\bar{\Theta}}(1+2|\sqrt[m]{\eta'}|). \end{cases}$$

Durch diese Ungleichungen ist ζ vollständig bestimmt. Wir können h offenbar immer $m = 2$ setzen.

Für das folgende ist es notwendig, eine Reihe von Spezialfällen untersuchen; wir wollen zunächst für die folgenden Werte

$$D = 5,\ 11,\ 52 \text{ und } 76$$

die Fundamentaleinheit des Ringes bestimmen.

1. Es sei $D = 5$. Dann ist $\eta = \frac{1}{8}(2 - \sqrt[3]{5})^3 = 1 - 4\Theta + 2\bar{\Theta}$ e positive Einheit < 1. Es ist $|\sqrt{\eta'}| < \frac{10}{8}$. Setzen wir in (2) $m = 2$, wird folglich $|x| < 3$, $|y| < 2$, $|z| < 1$. Also ist $z = 0$, $y = \pm 1$ u $x^3 + 5y^3 = 1$, was unmöglich ist. Folglich ist η die Fundamentaleinh

2. Es sei $D = 11$. Dann ist $\eta = \frac{1}{3}(\sqrt[3]{11} - 2)^3 = 1 + 4\Theta - 2\bar{\Theta}$ e positive Einheit < 1. Es ist $|\sqrt{\eta'}| < \frac{9}{2}$. Setzen wir in (2) $m = 2$, wird folglich $|x| < 4$, $|y| < 2$ und $|z| < 1$. Also ist $z = 0$, $y = \pm$ und $x^3 + 11y^3 = 1$, was unmöglich ist. Folglich ist η die Fundament einheit.

3. Es sei $D = 52$. Dann ist $\eta = \frac{1}{3}(2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{13})^3 = 1 - 4\Theta +$ eine positive Einheit < 1. Es ist $|\sqrt{\eta'}| < \frac{11}{2}$. Wird in (2) $m = 2$ gesetzt, so folgt $|x| < 4$, $|y| < 2$ und $|z| < 1$. Also ist $z = 0$, $y = \pm$ und $x^3 + 52y^3 = 1$, was unmöglich ist. Folglich ist η die Fundament einheit.

4. Es sei $D = 76$. Dann ist $\eta = \frac{1}{3}(\sqrt[3]{19} - 2\sqrt[3]{2})^3 = 1 + 4\Theta -$ eine positive Einheit < 1. Es ist $|\sqrt{\eta'}| < 6$. Wird in (2) $m = 2$ gesetzt so folgt $|x| < 5$, $|y| < 2$ und $|z| < 1$. Also ist $z = 0$, $y = \pm 1$ u $x^3 + 76y^3 = 1$, was unmöglich ist. Folglich ist η die Fundamentaleinh

Wir wollen darauf den folgenden Satz beweisen:

Es seien A und B zwei positive, ganze, kubenfreie und teilerfrem Zahlen, so daß $A - B = C$ ist, wo $C = 1$ oder $= 3$ ist. Für $C =$ wird angenommen $A \geqq 3$, und für $C = 3$ $A \geqq 5$. Es sei ferner $A =$ und $B = bd^2$, wo a, b, c, d positive, ganze, quadratfreie und paarwe teilerfremde Zahlen sind. Dann ist die Zahl

$$(3)\qquad \eta = \left(\sqrt[3]{\frac{A}{C}} - \sqrt[3]{\frac{B}{C}}\right)^3$$

Fundamentaleinheit im Ringe $R(1, \Theta, \bar{\Theta})$, *wo*

$$\Theta = \sqrt[3]{ac^2b^2d} \quad \text{und} \quad \bar{\Theta} = \sqrt[3]{a^2cbd^2}.$$

Beweis: η ist offenbar eine positive Einheit im Ringe $R(1, \Theta, \bar{\Theta})$ < 1. Wir beweisen zuerst, daß η kein Quadrat im Ringe ist. Es nämlich angenommen, daß

$$\eta = (x + y\sqrt[3]{ac^2b^2d} + z\sqrt[3]{a^2cbd^2})^2.$$

n ergibt sich

$$\eta = \frac{1}{C}(\sqrt[3]{ac^2} - \sqrt[3]{bd^2})^3 = 1 + \frac{3}{C}d\sqrt[3]{ac^2b^2d} - \frac{3}{C}c\sqrt[3]{a^2cbd^2}$$

$$(x^2 + 2yzabcd) + (adz^2 + 2xy)\sqrt[3]{ac^2b^2d} + (bcy^2 + 2xz)\sqrt[3]{a^2cbd^2}$$

folglich

$$x^2 + 2yzabcd = 1,$$

$$adz^2 + 2xy = \frac{3d}{C},$$

$$bcy^2 + 2xz = -\frac{3c}{C}.$$

Hier kann nicht $y = 0$ sein Denn dann würde folgen $x^2 = 1$ und $\eta) = N(x + z\sqrt[3]{a^2cbd^2})^2 = (x^3 + a^2cbd^2z^3)^2 = 1$, also $a^2cbd^2z^3 = \pm 2$ r $a = 1$, $c = 2$, $b = d = 1$. Diesen Fall haben wir aber ausgeschlossen. enso ergibt sich, daß $z \neq 0$ ist. Aus (4) folgt dann, daß yz negativ Aus (6) folgt, daß xz negativ ist. Folglich ist xy positiv. Aus folgt

$$az^2 + x\frac{2y}{d} = \frac{3}{C} \leqq 3.$$

(4) folgt, daß x und d teilerfremd sind; also ist $\frac{2y}{d}$ ganz. Aus (4 t weiter, daß x ungerade ist. Die Ungleichung besteht folglich nur $x = \pm 1$. Dieser Wert von x gibt aber in (4) eingeführt $yz = 0$, unmöglich ist. η ist folglich kein Quadrat. η ist auch nicht ein ous im Ringe; denn es ist

$$\sqrt[3]{\eta} = \sqrt[3]{\frac{ac^2}{C}} - \sqrt[3]{\frac{bd^2}{C}}$$

nbar eine algebraische Zahl neunten Grades.

Es sei nun ζ die Fundamentaleinheit des Ringes. Ist nicht $\eta = \zeta$, muß nach dem vorhergehenden $\eta = \zeta^m$ mit $m \geqq 5$.

Aus den Ungleichungen (2) folgt dann

$$(7) \qquad |3y\sqrt[3]{ac^2b^2d}| < 1+2\left[\sqrt[3]{\frac{A^2}{C^2}}+\sqrt[3]{\frac{A\cdot B}{C\cdot C}}+\sqrt[3]{\frac{B^2}{C^2}}\right]^{\frac{3}{10}},$$

$$(8) \qquad |3z\sqrt[3]{a^2cbd^2}| < 1+2\left[\sqrt[3]{\frac{A^2}{C^2}}+\sqrt[3]{\frac{A\cdot B}{C\cdot C}}+\sqrt[3]{\frac{B^2}{C^2}}\right]^{\frac{3}{10}}.$$

Es ist aber leicht zu zeigen, daß diese Ungleichungen unmöglich sin wenn y und z von Null verschieden sind.

Es sei zunächst $C=1$. Dann ist

$$3\sqrt[3]{ac^2b^2d} \geqq 3\sqrt[3]{(B+1)B} > 3\sqrt{B+1},$$

und es ist offenbar

$$3\sqrt[3]{a^2cbd^2} \geqq 3\sqrt[3]{B+1} > 1+2\left[\sqrt[3]{(B+1)^2}+\sqrt[3]{B(B+1)}+\sqrt[3]{B^2}\right]$$

für alle $B \geqq 3$. Für $B=2$ und $A=3$ ist

$$3\sqrt[3]{18} > 3\sqrt[3]{12} > 1+2\left[\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right]^{\frac{3}{10}}.$$

Die Ungleichungen (7) und (8) sind also unmöglich für $C=1$. Wer $C=3$, dann ist

$$3\sqrt[3]{ac^2b^2d} \geqq 3\sqrt[3]{(B+3)B} > 3\sqrt[3]{B+3},$$

und es ist offenbar

$$3\sqrt[3]{a^2cbd^2} \geqq 3\sqrt[3]{B+3} > 1+2\left[\sqrt[3]{\tfrac{1}{9}(B+3)^2}+\sqrt[3]{\tfrac{1}{9}B(B+3)}+\sqrt[3]{\tfrac{1}{9}B^2}\right]$$

für alle $B \geqq 2$. Die Ungleichungen (7) und (8) sind daher unmöglich

Es ist folglich η die Fundamentaleinheit des Ringes, w. z. b. w. Durch diesen Satz ist die Fundamentaleinheit ζ für unendlich viele Körper bestimmt. Denn es gibt unendlich viele Zahlen B, so daß

$$B(B+1) \quad \text{bzw.} \quad B(B+3)$$

kubenfrei (sogar quadratfrei) ist[6]).

Beispiele:

Im Körper $K(\sqrt[3]{12})$ ist $\zeta = (\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})^3 = 1+3\sqrt[3]{12}-3\sqrt[3]{18}$.

Im Körper $K(\sqrt[3]{6})$ ist $\zeta = (\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3})^3 = 1+6\sqrt[3]{6}+3\sqrt[3]{36}$.

Im Körper $K(\sqrt[3]{10})$ ist $\zeta = (\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4})^3 = 1+6\sqrt[3]{10}-3\sqrt[3]{100}$.

[6]) Siehe meine Arbeit: Zur Arithmetik der Polynome, Abhandlungen aus d Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 1 (1922), S. 186.

Körper $K(\sqrt[3]{20})$ ist $\zeta = \frac{1}{3}(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2})^3 = 1 + \sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{50}$.

Körper $K(\sqrt[3]{14})$ ist $\zeta = \frac{1}{3}(\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{4})^3 = 1 + 2\sqrt[3]{14} - \sqrt[3]{196}$.

Körper $K(\sqrt[3]{490})$ ist $\zeta = \frac{1}{3}(\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{7})^3 = 1 + \sqrt[3]{490} - \sqrt[3]{700}$.

Anmerkung. Ist der Körper von erster Art, so ist auch $\zeta = \xi$, die Fundamentaleinheit des Körpers ist. Ist der Körper von zweiter so ist nach der Einleitung $\zeta = \xi$ oder $\zeta = \xi^2$. Dann muß offenbar 1 sein; denn für $C = 3$ wird $A - B \equiv 3 \pmod 9$; ist der Körper zweiter Art, so ist aber $A \equiv \pm B \pmod 9$. Man zeigt nun ohne vierigkeit, daß eine Gleichung

$$(\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B})^3 = \left(\frac{x + y\Theta + z\bar{\Theta}}{3}\right)^2$$

im folgenden Falle besteht

$$(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4})^3 = \left(\frac{-7 - \sqrt[3]{10} + 2\sqrt[3]{100}}{3}\right)^2$$

diesem Falle abgesehen ist also die Zahl (3) sogar die Fundamental- eit des Körpers.

§ 3.

Über die Gleichung $x^3 + Dy^3 = 1$.

Ich gebe hier einen vereinfachten Beweis dafür, daß diese Gleichung stens eine Lösung hat.

Wir setzen wie in der Einleitung $D = fg^2$, $\bar{D} = f^2 g$, $\Theta = \sqrt[3]{D}$ und $\sqrt[3]{\bar{D}}$.

Es sei ζ die Fundamentaleinheit des Ringes $R(1, \Theta, \bar{\Theta})$, und

$$\eta = x + y\sqrt[3]{D} = x + y\Theta = \zeta^m$$

erste von den Potenzen $\zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \ldots$, die von dieser Form ist. $m = 1$ ist der Satz schon bewiesen, dem Hilfssatze I zufolge. Es sei angenommen, daß

$$X + Y\Theta = \zeta^M$$

andere Einheit von derselben Form ist; dann muß $M > m > 1$ sein. ei $M = nm + r$, wo $1 \leqq r \leqq m - 1$ ist; wegen des Hilfssatzes I ist lich $r = 0$ unmöglich. Es sei weiter

$$\varepsilon = \zeta^r = u + v\Theta + w\bar{\Theta},$$

ganzen (rationalen) Koeffizienten u, v, w. Dann folgt aus

$$\zeta^M = X + Y\Theta = (x + y\Theta)^n \cdot (u + v\Theta + w\Theta)$$

die Gleichung

$$ug\left[\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\binom{n}{5}x^{n-5}y^5D+\ldots\right]$$
$$+vg\left[\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{4}x^{n-4}y^4D+\ldots\right]$$
$$+w\left[x^n+\binom{n}{3}x^{n-3}y^3D+\ldots\right]=0.$$

Hieraus folgt

$$wx^n\equiv 0 \pmod{gy}.$$

Da wegen $x^3+fg^2y^3=1$ die Zahlen x und gy teilerfremd sind, folgt

$$w\equiv 0 \pmod{gy}. \tag{1}$$

Wir haben nun offenbar

$$\begin{cases} \eta<\varepsilon<1, \\ 1<|\varepsilon'|=|\varepsilon''|<|\eta'|=|\eta''|, \\ |\eta'|=\left|\sqrt{x^2-xy\Theta+y^2\Theta^2}\right|<\sqrt{3}(1+|y|\Theta), \end{cases} \tag{2}$$

weil $|x|=|\eta-y\Theta|<1+|y|\Theta$ ist. Weiter ist

$$\varepsilon = u+v\Theta+w\overline{\Theta},$$
$$\varepsilon' = u+v\Theta\varrho+w\overline{\Theta}\varrho^2,$$
$$\varepsilon'' = u+v\Theta\varrho^2+w\overline{\Theta}\varrho,$$

folglich

$$3w\overline{\Theta}=\varepsilon+\varepsilon'\varrho+\varepsilon''\varrho^2.$$

Da w sicher von Null verschieden ist (wegen der Voraussetzung über x folgt hieraus unter Berücksichtigung von (1)

$$|3gy\overline{\Theta}|\leqq|3z\overline{\Theta}|<1+2|\varepsilon'|$$

oder wegen (2)

$$3|y|\Theta^2<1+2|\eta'|<1+2\sqrt{3}(1+|y|\Theta).$$

Nun ist aber für $|y|\geqq 1$ und $D=\Theta^3\geqq 8$,

$$3|y|\Theta^2>1+2\sqrt{3}(1+|y|\Theta).$$

Diese Ungleichung gilt auch für $|y|\geqq 2$ und $D=\Theta^3\geqq 5$. Der einz Fall mit $|y|=1$ und $D\leqq 7$ ist $D=2^3-1=7$. Der Satz ist somit alle D bewiesen, ausgenommen die Fälle $D=2, 3, 4$ und 7. Nun s bekanntlich die Zahlen $\sqrt[3]{2}-1$, $-2+\sqrt[3]{9}$ und $2-\sqrt[3]{7}$ die Fundament einheiten in den Körpern $K(\sqrt[3]{2})$, $K(\sqrt[3]{3})$ und $K(\sqrt[3]{7})$. Die Anwendu des Hilfssatzes I zeigt folglich, daß der Satz auch in diesen Fällen richtig

§ 4.

Über die Gleichung $Ax^3 + By^3 = C$.

Wir wollen hier die Methode des vorhergehenden Paragraphen verallgemeinern und auf die Gleichung $Ax^3 + By^3 = C$ (mit $C = 1$ oder $= 3$) anwenden. Wenn wir von den Gleichungen $4x^3 + y^3 = 3$ und $2x^3 + y^3 = 3$ absehen, ergibt sich das Resultat:

Die unbestimmte Gleichung

$$Ax^3 + By^3 = C,$$

$C = 1$ *oder* $= 3$, *hat höchstens eine Lösung in ganzen, nicht verschwindenden Zahlen* x, y.

Es sei wie in der Einleitung $A = ac^2$, $B = bd^2$, wo a, b, c, d ganze, positive, quadratfreie und paarweise teilerfremde Zahlen sind, und $A > B$. Wenn $C = 3$, ist AB unteilbar durch 3. Wenn $C = 1$, ist $B > 1$. Es werner $\Theta = \sqrt[3]{ac^2b^2d}$, $\bar{\Theta} = \sqrt[3]{a^2cbd^2}$.

Um den Satz zu beweisen haben wir zu zeigen, daß es im Ringe $(\Theta, \bar{\Theta})$ höchstens eine positive Einheit gibt von der Form

$$\frac{1}{C}(x\sqrt[3]{A} + y\sqrt[3]{B})^3.$$

Sei nun ζ die Fundamentaleinheit des Ringes, $0 < \zeta < 1$, und

$$\eta = \frac{1}{C}(x\sqrt[3]{ac^2} + y\sqrt[3]{bd^2})^3 = \zeta^m$$

die erste von den Potenzen $\zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \ldots$, die diese Form hat. Es ist

$$|\eta'|^{\frac{1}{3}} = \left|\sqrt{\left(x\sqrt[3]{\frac{ac^2}{C}}\right)^2 - xy\sqrt[3]{\frac{ac^2 \cdot bd^2}{C \cdot C}} + \left(y\sqrt[3]{\frac{bd^2}{C}}\right)^2}\right|.$$

Dann

$$0 < x\sqrt[3]{\frac{ac^2}{C}} + y\sqrt[3]{\frac{bd^2}{C}} < 1$$

und hieraus

$$\begin{cases} |\eta'|^{\frac{1}{3}} < \sqrt{3}\left(1 + |x| \cdot \sqrt[3]{\frac{ac^2}{C}}\right) \\ \text{und} \\ |\eta'|^{\frac{1}{3}} < \sqrt{3}\left(1 + |y| \cdot \sqrt[3]{\frac{bd^2}{C}}\right). \end{cases}$$

Sei weiter angenommen, daß

$$\eta_1 = \frac{1}{C}(x_1\sqrt[3]{ac^2} + y_1\sqrt[3]{bd^2})^3 = \zeta^M$$

eine zweite Einheit von derselben Form ist. Dann ist $M > m$; es se
$M = nm + r$, wo $0 \leqq r \leqq m-1$ ist. Wir haben

$$\eta_1 = \zeta^r \cdot \eta^n$$

oder

$$(2) \qquad \left(x\sqrt[3]{\frac{ac^2}{C}} + y\sqrt[3]{\frac{bd^2}{C}}\right)^n \cdot \zeta^{\frac{r}{3}} = x_1\sqrt[3]{\frac{ac^2}{C}} + y_1\sqrt[3]{\frac{bd^2}{C}}.$$

Auf Grund des Hilfssatzes IV ist hier $r = 0$ unmöglich. (Wegen de
Gleichung $ac^2x^3 + bd^2y^3 = C$ sind ja die Zahlen acx und bdy teile
fremd.) *Unser Satz ist folglich schon bewiesen für den Fall* $m =$
d. h. für den Fall, daß η *die Fundamentaleinheit des Ringes ist.*

Wenn $r > 0$ ist, müssen wir drei Fälle unterscheiden.

Erster Fall: $n \equiv 0 \pmod 3$.

In diesem Falle folgt aus der Gleichung (2)

$$\zeta^{\frac{r}{3}} = \left(x_1\sqrt[3]{\frac{ac^2}{C}} + y_1\sqrt[3]{\frac{bd^2}{C}}\right)\cdot\left(x\sqrt[3]{\frac{ac^2}{C}} + y\sqrt[3]{\frac{bd^2}{C}}\right)^{-n}$$

$$= \left(x_1\sqrt[3]{\frac{ac^2}{C}} + y_1\sqrt[3]{\frac{bd^2}{C}}\right)\cdot(u + v\sqrt[3]{a^2cbd^2} + w\sqrt[3]{ac^2b^2d}),$$

mit ganzen (rationalen) u, v, w; denn die Zahl

$$\left(x\sqrt[3]{\frac{ac^2}{C}} + y\sqrt[3]{\frac{bd^2}{C}}\right)^{-3} = \left[x^2\left(\sqrt[3]{\frac{ac^2}{C}}\right)^2 - xy\sqrt[3]{\frac{ac^2\cdot bd^2}{C\cdot C}} + y^2\left(\sqrt[3]{\frac{bd^2}{C}}\right)^2\right]$$

ist offenbar eine Einheit im Ringe $R(1, \Theta, \bar{\Theta})$. Es ist also

$$\varepsilon = \zeta^{\frac{r}{3}} = X\sqrt[3]{\frac{ac^2}{C}} + Y\sqrt[3]{\frac{bd^2}{C}} + Z\sqrt[3]{\frac{a^2cb^2d}{C}},$$

mit ganzen (rationalen) X, Y, Z. Wegen der Voraussetzung über η
hier offenbar $Z \neq 0$; denn sonst wäre ζ^r eine Einheit von derselben Fo
wie $\eta = \zeta^m$; dies ist aber unmöglich, weil $r < m$ ist. Wird dieser W
von $\zeta^{\frac{r}{3}}$ in (2) eingeführt, und vergleichen wir den Koeffizienten v
$\sqrt[3]{a^2cb^2d}$, so ergibt sich die Gleichung:

$$X\left[\binom{n}{2}x^{n-2}y^2(ac^2)^{\frac{n}{3}-1}\cdot cd + \binom{n}{5}x^{n-5}y^5(ac^2)^{\frac{n}{3}-2}(bd^2)cd\right.$$

$$\left. + \ldots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1}(bd^2)^{\frac{n}{3}-1}cd\right]$$

$$+ Y\left[\binom{n}{1}x^{n-1}y(ac^2)^{\frac{n}{3}-1}\cdot cd + \binom{n}{4}x^{n-4}y^4(ac^2)^{\frac{n}{3}-2}(bd^2)cd\right.$$

$$\left. + \ldots + \binom{n}{n-2}x^2y^{n-2}(bd^2)^{\frac{n}{3}-1}cd\right]$$

$$+ Z\left[x^n(ac^2)^{\frac{n}{3}} + \binom{n}{3}x^{n-3}y^3(ac^2)^{\frac{n}{3}-1}(bd^2) + \ldots + y^n(bd^2)^{\frac{n}{3}}\right] =$$

aus folgt offenbar

$$Zx^n(ac^2)^{\frac{n}{3}} \equiv 0 \pmod{yd}$$

$$Zy^n(bd^2)^{\frac{n}{3}} \equiv 0 \pmod{xc}.$$

Zahlen acx und bdy sind aber (wegen $ac^2x^3 + bd^2y^3 = C$) relative
nzahlen; folglich ist

$$Z \equiv 0 \pmod{xycd}.$$

Es sei nun

$$\varepsilon' = X\varrho \sqrt[3]{\frac{ac^2}{C}} + Y\sqrt[3]{\frac{bd^2}{C}} + Z\varrho^2\sqrt[3]{\frac{a^2cb^2d}{C}},$$

$$\varepsilon'' = X\varrho^2\sqrt[3]{\frac{ac^2}{C}} + Y\sqrt[3]{\frac{bd^2}{C}} + Z\varrho\sqrt[3]{\frac{a^2cb^2d}{C}}.$$

n ist $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' = 1$ und ferner

$$\begin{cases} 0 < \eta^{\frac{1}{3}} = \zeta^{\frac{m}{3}} < \varepsilon = \zeta^{\frac{r}{3}} < 1, \\ 1 < |\varepsilon'| = |\varepsilon''| < |\eta'|^{\frac{1}{3}} = |\eta''|^{\frac{1}{3}}. \end{cases}$$

den Gleichungen für ε, ε' und ε'' folgt

$$3Z\sqrt[3]{\frac{a^2cb^2d}{C}} = \varepsilon + \varepsilon'\varrho + \varepsilon''\varrho^2,$$

aus wegen (4)

$$\left|3Z\sqrt[3]{\frac{a^2cb^2d}{C}}\right| < 1 + 2|\varepsilon'| < 1 + 2|\eta'|^{\frac{1}{3}}.$$

en der Ungleichung (1) und der Kongruenz (3) folgt endlich

$$\left|3xy\sqrt[3]{\frac{a^3c^4b^2d^4}{C}}\right| < 1 + 2\sqrt{3}\left(1 + |y|\sqrt[3]{\frac{bd^2}{C}}\right).$$

e Ungleichung ist aber unmöglich; denn für $C = 1$ ist $ac^2 \geqq 3$,
$\geqq 2$; und wir haben für $u \geqq 1$ und $v \geqq 2$

$$3u\sqrt[3]{9v^2} > 1 + 2\sqrt{3}(1 + u\sqrt[3]{v}).$$

Für $C = 3$ ist $ac^2 \geqq 5$, $bd^2 \geqq 1$ (wir sehen von den Fällen $ac^2 = 2$
$ac^2 = 4$, $bd^2 = 1$ ab); und wir haben für $u \geqq 1$ und $v \geqq 1$

$$3u\sqrt[3]{\frac{25}{3}v^2} > 1 + 2\sqrt{3}\left(1 + u\sqrt[3]{\frac{v}{3}}\right).$$

Ungleichung (5) ist folglich unmöglich.

Zweiter Fall: $n \equiv 1 \pmod 3$.

Hier folgt aus der Gleichung (2)

$$\varepsilon = \zeta^{\frac{r}{3}} = X + Y\sqrt[3]{ac^2b^2d} + Z\sqrt[3]{a^2cbd^2},$$

mit ganzen (rationalen) X, Y, Z. Wird dieser Wert in (2) eingeführ und vergleichen wir den Koeffizienten von $\sqrt[3]{a^2cb^2d}$, so ergibt sich d Gleichung

$$(6)\qquad X\left[\binom{n}{2}x^{n-2}y^2(ac^2)^{\frac{n-4}{3}}\cdot cd + \ldots + \binom{n}{n-2}x^2y^{n-2}(bd^2)^{\frac{n-4}{3}}\cdot c\right.$$
$$+ Y\left[x^n(ac^2)^{\frac{n-1}{3}}\cdot c + \ldots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1}\cdot(bd^2)^{\frac{n-1}{3}}\cdot c\right]$$
$$\left. + Z\left[\binom{n}{1}x^{n-1}y(ac^2)^{\frac{n-1}{3}}\cdot d + \ldots + y^n(bd^2)^{\frac{n-1}{3}}\right]\right] = 0.$$

Hieraus folgt offenbar

$$(7)\qquad Z \equiv 0 \pmod{cx}.$$

Es sei nun

$$\varepsilon' = X + Y\varrho\sqrt[3]{ac^2b^2d} + Z\varrho^2\sqrt[3]{a^2cbd^2},$$
$$\varepsilon'' = X + Y\varrho^2\sqrt[3]{ac^2b^2d} + Z\varrho\sqrt[3]{a^2cbd^2}.$$

Dann ist $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' = 1$ und ferner

$$(8)\qquad 0 < \eta^{\frac{1}{3}} < \varepsilon < 1.$$
$$1 < |\varepsilon'| = |\varepsilon''| < |\eta'|^{\frac{1}{3}} = |\eta''|^{\frac{1}{3}}.$$

Aus den Gleichungen für ε, ε' und ε'' folgt

$$3Z\sqrt[3]{a^2cbd^2} = \varepsilon + \varepsilon'\varrho + \varepsilon''\varrho^2,$$

woraus wegen (8)

$$|3Z\sqrt[3]{a^2cbd^2}| < 1 + 2|\varepsilon'| < 1 + 2|\eta'|^{\frac{1}{3}}.$$

Ist $Z \neq 0$, so folgt hieraus wegen (1) und (7)

$$(9)\qquad |3x\sqrt[3]{a^2c^4bd^2}| < 1 + 2\sqrt{3}\left(1 + |x|\sqrt[3]{\frac{ac^2}{C}}\right).$$

Diese Ungleichung ist aber unmöglich, wenn wir von dem Falle $ac^2 = bd^2 = 2$, $C = 1$ absehen. Denn für $C = 1$ ist dann $ac^2 \geqq 4$, $bd^2 \geqq$ und wir haben für $u \geqq 1$ und $v \geqq 4$

$$3u\sqrt[3]{2v^2} > 1 + 2\sqrt{3}(1 + u\sqrt[3]{v}).$$

Für $C=3$ ist $ac^2 \geqq 5$, $bd^2 \geqq 1$ (die Fälle $ac^2=2$ oder $ac^2=4$, $=1$ haben wir ausgeschlossen); und wir haben für $u \geqq 1$, $v \geqq 5$

$$3u\sqrt[3]{v^2} > 1 + 2\sqrt{3}\left(1 + u\sqrt[3]{\frac{v}{3}}\right).$$

Der Fall $ac^2=3$, $bd^2=2$, $C=1$, der noch unentschieden bleibt, d im folgenden behandelt.

Wenn $Z=0$ ist, folgt aus (6) offenbar

$$Y \equiv 0 \pmod{dy^2}.$$

den Gleichungen für ε, ε' und ε'' folgt

$$3Y\sqrt[3]{ac^2b^2d} = \varepsilon + \varepsilon'\varrho^2 + \varepsilon''\varrho,$$

aus wegen (8)

$$|3Y\sqrt[3]{ac^2b^2d}| < 1 + 2|\varepsilon'| < 1 + 2|\eta'|^{\frac{1}{3}}.$$

Y sicher von Null verschieden ist, folgt hieraus wegen (1) und (10)

$$3y^2bd^2 < |3y^2\sqrt[3]{ac^2b^2d^4}| < 1 + 2\sqrt{3}\left(1 + |y|\sqrt[3]{\frac{bd^2}{C}}\right).$$

Diese Ungleichung ist unmöglich, wenn wir von dem Falle $ac^2=3$, $=2$, $C=1$ absehen. Denn für $C=1$ ist dann $bd^2 \geqq 4$, und wir en für $u \geqq 2$ und $v \geqq 1$:

$$3u^2v > 1 + 2\sqrt{3}(1 + u\sqrt[3]{v}).$$

Diese Ungleichung besteht auch für $u \geqq 1$, $v \geqq 4$. Die Ungleichung (11) n folglich nur für $|y|=1$, $bd^2 \leqq 3$ bestehen; also muß entweder $=4$, $bd^2=3$ oder $ac^2=3$, $bd^2=2$. Im ersten Fall ist aber

$$3\sqrt[3]{3\cdot 4} > 1 + 2\sqrt{3}(1 + \sqrt[3]{2}),$$

somit die Ungleichung (11) unmöglich.

Für $C=3$ muß $ac^2 \geqq 5$, $bd^2 \geqq 1$; und wir haben für $u \geqq 1$ und $\geqq 1$

$$3u^2\sqrt[3]{5v^2} > 1 + 2\sqrt{3}\left(1 + u\sqrt[3]{\frac{v}{3}}\right).$$

Dritter Fall: $n \equiv 2 \pmod 3$.

Hier folgt aus der Gleichung (2)

$$\varepsilon = \zeta^{\frac{r}{3}} = X\sqrt[3]{\frac{a^2c}{C^2}} + Y\sqrt[3]{\frac{b^2d}{C^2}} + Z\sqrt[3]{\frac{ac^2bd^2}{C^2}}$$

ganzen (rationalen) X, Y, Z. Wird dieser Wert in (1) eingeführt l vergleichen wir den Koeffizienten von $\sqrt[3]{a^2cbd^2}$, so ergibt sich die eichung

$$X\left[\binom{n}{2}x^{n-2}y^2(ac^2)^{\frac{n-2}{3}}\cdot d+\ldots+y^n(bd^2)^{\frac{n-2}{3}}\cdot d\right]$$
$$+Y\left[x^n(ac^2)^{\frac{n-2}{3}}\cdot c+\ldots+\binom{n}{n-2}x^2y^{n-2}(bd^2)^{\frac{n-2}{3}}\cdot d\right]$$
$$+Z\left[\binom{n}{1}x^{n-1}y(ac^2)^{\frac{n-2}{3}}\cdot cd+\ldots+\binom{n}{n-1}xy^{n-1}(bd^2)^{\frac{n-2}{3}}\cdot cd\right]=0.$$

Hieraus folgt offenbar

$$X\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ cx). \tag{12}$$

X ist nicht gleich Null; denn sonst wäre

$$Y^3b^2d+Z^3ac^2bd^2=C^2,$$

also $b=d=1$, und folglich $C=3$. Folglich würde $ac^2\equiv\pm 1\ (\mathrm{mod}\ 9$ weil Y und Z durch 3 unteilbar sein müssen. Nun ist aber $ac^2x^3+y^3=$ also $\pm ac^2\pm 1\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 9)$, was unmöglich ist mit $ac^2\equiv\pm 1\ (\mathrm{mod}\ 9$

Es sei nun

$$\varepsilon'=X\varrho^2\sqrt[3]{\frac{a^2c}{C^2}}+Y\sqrt[3]{\frac{b^2d}{C^2}}+Z\varrho\sqrt[3]{\frac{ac^2bd^2}{C^2}},$$
$$\varepsilon''=X\varrho\sqrt[3]{\frac{a^2c}{C^2}}+Y\sqrt[3]{\frac{b^2d}{C^2}}+Z\varrho^2\sqrt[3]{\frac{ac^2bd^2}{C^2}}.$$

Dann ist $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''=1$ und ferner

$$\begin{cases} 0<\eta^{\frac{1}{3}}<\varepsilon<1, \\ 1<|\varepsilon'|<|\varepsilon''|<|\eta'|^{\frac{1}{3}}=|\eta''|^{\frac{1}{3}}. \end{cases} \tag{13}$$

Aus den Gleichungen für ε, ε' und ε'' folgt

$$3X\sqrt[3]{\frac{a^2c}{C^2}}=\varepsilon+\varepsilon'\varrho+\varepsilon''\varrho^2,$$

woraus wegen (13)

$$\left|3X\sqrt[3]{\frac{a^2c}{C^2}}\right|<1+2|\varepsilon'|<1+2|\eta'|^{\frac{1}{3}}.$$

Da $X\neq 0$ ist, so folgt hieraus wegen (1) und (12)

$$\left|3x\sqrt[3]{\frac{a^2c^4}{C^2}}\right|<1+2\sqrt{3}\left(1+|x|\sqrt[3]{\frac{ac^2}{C}}\right). \tag{14}$$

Nun besteht für $u\geqq 1$, $v\geqq 2$ die Ungleichung

$$3uv^2>1+2\sqrt{3}(1+uv). \tag{15}$$

Die Ungleichung (14) besteht folglich nur für $\frac{ac^2}{C}<8$.

Wenn $C = 1$, muß $ac^2 \leqq 7$; wenn $C = 3$, muß $ac^2 \leqq 23$.

Die Ungleichung (15) gilt auch für $u \geqq 5$, $v \geqq \sqrt[3]{\frac{5}{3}}$. Wenn $|x| \geqq 5$,
eht daher die Ungleichung (14) nur für $\frac{ac^2}{C} < \frac{5}{3}$; für $C = 1$ ist aber
$\geqq 3$, und für $C = 3$ ist $ac^2 \geqq 5$. Die Ungleichung (14) besteht
ich niemals für $|x| \geqq 5$.

Nun zeigt eine kurze Rechnung, daß die sämtlichen Lösungen der
chung $Ax^3 + By^3 = 1$, die den folgenden Bedingungen genügen:
$A > B \geqq 2$ und $|x| \leqq 4$, durch die folgenden Gleichungen gegeben
:

$$-6 = 1, \quad 6 - 5 = 1, \quad 5 - 4 = 1, \quad 4 - 3 = 1, \quad 3 - 2 = 1.$$

Lösungen der Gleichung $Ax^3 + By^3 = 3$, die den folgenden Be-
ungen unterliegen: $23 \geqq A > B \geqq 1$, $A \geqq 5$ und $|x| \leqq 4$, sind (wie
leichte Rechnung zeigt, gegeben durch die Gleichungen:

$$20 = 3, \quad 22 - 19 = 3, \quad 20 - 17 = 3, \quad 19 - 2 \cdot 2^3 = 3, \quad -13 + 2 \cdot 2^3 = 3,$$
$$14 = 3, \quad 14 - 11 = 3, \quad 13 - 10 = 3, \quad 11 - 2^3 = 3, \quad 10 - 7 = 3,$$
$$-5 + 2^3 = 3, \quad 7 - 4 = 3, \quad 5 - 2 = 3.$$

Die Ungleichung (14) kann folglich nur für die Gleichungen

$$Ax^3 + By^3 = 1$$

$A = 7, B = 6$; $A = 6, B = 5$; $A = 5, B = 4$; $A = 4, B = 3$; $A = 3$;
2, und für die Gleichungen

$$Ax^3 + By^3 = 3$$

$A = 23, B = 20$; $A = 22, B = 19$; $A = 20, B = 17$; $A = 19, B = 2$;
13, $B = 2$; $A = 17$, $B = 14$; $A = 14$, $B = 11$; $A = 13$, $B = 10$;
11, $B = 1$; $A = 10, B = 7$; $A = 5, B = 1$; $A = 7, B = 4$; $A = 5$,
2 bestehen.

Für alle anderen Gleichungen $Ax^3 + By^3 = C$ ist daher bewiesen,
sie höchstens eine Lösung besitzen.

Nun folgt aber aus den Resultaten in § 2, daß die sämtlichen Zahlen
$-\sqrt[3]{6})^3$, $(\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{5})^3$ usf., sowohl wie die sämtlichen Zahlen
$\overline{23} - \sqrt[3]{20})^3$, $\frac{1}{3}(\sqrt[3]{22} - \sqrt[3]{19})^3$, $\frac{1}{3}(\sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{17})^3$ usf. die Fundamental-
iten des Ringes $R(1, \Theta, \overline{\Theta})$ im entsprechenden Körper $K(\Theta)$ sind.
Anfang dieses Paragraphen haben wir aber bewiesen, daß, wenn ζ die
$\frac{1}{C}(x\sqrt[3]{A} + y\sqrt[3]{B})^3$ hat, es keine weitere (positive) Einheit von dieser
gibt. Unser Satz ist damit vollständig bewiesen.

§ 5.

Können die Gleichungen $x^3+Dy^3=1$ und $x^3+\bar{D}y^3=1$ gleichzeitig lösbar sein?

Die Antwort auf diese Frage ist der Satz:

Höchstens eine von den Gleichungen

$$x^3+Dy^3=1 \quad \textit{und} \quad x^3+\bar{D}y^3=1$$

kann lösbar sein in ganzen nicht verschwindenden Zahlen x, y.

Um dies zu beweisen, haben wir zu zeigen, daß es höchstens ei (positive, irrationale) Einheit

$$\eta = x+y\Theta+z\bar{\Theta}$$

gibt, mit $yz=0$. Es sei, wie früher, ζ die Fundamentaleinheit des Ring $R(1,\Theta,\bar{\Theta})$, $0<\zeta<1$, und

$$\eta = x+y\Theta = \zeta^m,$$
$$\eta_1 = x_1+z_1\bar{\Theta} = \zeta^M.$$

Wir können offenbar annehmen, daß $M>m$ ist, also $\eta>\eta_1$, und ferne daß η die erste Potenz in der Reihe $\zeta, \zeta^2, \zeta^3, \ldots$ ist, für welche $yz=$ Es sei $M=nm+r$, wo $1\leqq r\leqq m-1$ ist; wegen des Hilfssatzes I i nämlich $r=0$ unmöglich. Es sei weiter

$$\varepsilon = \zeta^r = u+v\Theta+w\bar{\Theta}. \tag{1}$$

Wegen der Voraussetzung über η ist hier $vw\neq 0$. Wir erhalten d Gleichung

$$(x+y\Theta)^n\cdot(u+v\Theta+w\bar{\Theta}) = x_1+z_1\bar{\Theta}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} v\left[x^n+\binom{n}{3}x^{n-3}y^3D+\binom{n}{6}x^{n-6}y^6D^2+\ldots\right] \\ +\ u\left[\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{4}x^{n-4}y^4D+\ldots\right] \\ +wf\left[\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\binom{n}{5}x^{n-5}y^5D+\ldots\right]=0. \end{aligned} \tag{2}$$

Folglich muß vx^n durch y teilbar sein, oder

$$v\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,y). \tag{3}$$

Ist $n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,3)$, so folgt aus (2)

$$v\left[x^n+\binom{n}{3}x^{n-3}y^3D+\ldots+y^nD^{\frac{n}{3}}\right]\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,x),$$

also wegen (3)

$$v\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,xy).$$

(1) folgt nun wie früher

$$3v\Theta = \varepsilon + \varepsilon'\varrho^2 + \varepsilon''\varrho,$$

$$|3v\Theta| < 1 + 2|\varepsilon'| < 1 + 2|\eta'| < 1 + 2\sqrt{3}(1 + |y|\Theta),$$

$$|3xy\Theta| < 1 + 2\sqrt{3}(1 + |y|\Theta).$$

e Ungleichung ist offenbar immer unmöglich. Denn für $|x| = 2$ ist $= -\sqrt[3]{7}$ oder $y\Theta = \sqrt[3]{9}$; und für $|x| \geqq 3$ und $|y\Theta| \geqq 1$ ist

$$|3xy\Theta| > 1 + 2\sqrt{3}(1 + |y|\Theta).$$

Ist $n \equiv 2 \pmod 3$, so folgt aus (2)

$$wf\left[\binom{n}{2} x^{n-2}y^2 + \binom{n}{5}x^{n-5}y^5 D + \ldots + y^n D^{\frac{n-2}{3}}\right] \equiv 0 \pmod x,$$

$$w \equiv 0 \pmod x.$$

folgt aus (1)

$$3w\bar{\Theta} = \varepsilon + \varepsilon'\varrho + \varepsilon''\varrho^2,$$

$$|3w\bar{\Theta}| < 1 + 2|\varepsilon'| < 1 + 2|\eta'| < 1 + 2\sqrt{3}(1 + |x|),$$

$$|3x\bar{\Theta}| < 1 + 2\sqrt{3}(1 + |x|).$$

e Ungleichung ist offenbar immer unmöglich. Denn für $|x| = 2$ ist $\sqrt{3}$ oder $= \sqrt[3]{49}$; und für $|x| \geqq 3$ ist

$$|3x\sqrt[3]{2}| > 1 + 2\sqrt{3}(1 + |x|).$$

ei endlich $n \equiv 1 \pmod 3$. Dann folgt aus (2)

$$u\left[\binom{n}{1} x^{n-1}y + \binom{n}{4} x^{n-4}y^4 D + \ldots + y^n D^{\frac{n-1}{3}}\right] \equiv 0 \pmod x,$$

$$u \equiv 0 \pmod x.$$

folgt aus (1)

$$3u = \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'',$$

$$|3u| < 1 + 2\sqrt{3}(1 + |x|).$$

t ein Teiler von u. Wegen dieser Ungleichung folgt nun $|x| = |u|$. n für $|u| \geqq |2x|$ ist (4) unmöglich. Nun folgt aus den Gleichungen

$$u^3 + fg^2u^3 + f^2gw^3 - 3fguvw = 1$$

$$x^3 + fg^2y^3 = 1;$$

$$u^3 \equiv x^3 \equiv 1 \pmod{fg}.$$

können offenbar von dem Fall $fg = 2$ absehen; dann folgt hieraus, der Fall $x = -u$ zu verwerfen ist. *Es ist folglich* $x = u$

Aus (1) folgt weiter

$$3v\Theta = \varepsilon + \varepsilon'\varrho^2 + \varepsilon''\varrho,$$

$$|3v\Theta| < 1 + 2\sqrt{3}(1 + |y|\Theta). \tag{5}$$

y ist ein Teiler von v. Wegen dieser Ungleichung folgt nun $|y| = |$
Denn für $|v| \geqq |2y|$ ist (5) unmöglich.

Ist $y = v$, so haben wir also

$$x^3 + fg^2y^3 + f^2gw^3 - 3fgxyw = 1.$$

Hieraus ergibt sich wegen $x^3 + fg^2y^3 = 1$

$$f^2gw^3 = 3fgxyw$$

oder

$$fw^2 = 3xy,$$

was unmöglich ist, weil xy negativ ist. *Folglich ist* $y = -v$. Aus (1) fo

$$|3w\bar{\Theta}| < 1 + 2\sqrt{3}(1 + |y|\Theta). \tag{6}$$

Wir haben weiter

$$0 < x + y\Theta < x - y\Theta + w\bar{\Theta} < 1. \tag{7}$$

Hieraus folgt: Ist y positiv, so ist x negativ und folglich w positiv. y negativ, so ist x positiv und folglich w negativ.

Es sei zunächst w positiv; dann folgt aus (7)

$$w\bar{\Theta} > 2y\Theta.$$

Wegen (6) muß dann

$$|6y\Theta| < 1 + 2\sqrt{3}(1 + |y|\Theta),$$

was unmöglich ist.

Es sei darauf w negativ; dann folgt aus (7)

$$-w\bar{\Theta} > -1 - 2y\Theta,$$

$$|w\bar{\Theta}| > -1 + |2y\Theta|.$$

Wegen (6) muß dann

$$6|y\Theta| - 3 < 1 + 2\sqrt{3}(1 + |y\Theta|),$$

oder

$$|y\Theta| < \tfrac{1}{6}(9 + 5\sqrt{3}) < \sqrt[3]{26}.$$

Also muß $|Dy^3| \leqq 25$ und $|x^3| \leqq 26$, oder $|x| \leqq 2$. Wenn $x = 2$, $Dy^3 = 7$; wenn $x = -2$, ist $Dy^3 = 9$; wenn $x = -1$, ist $Dy^3 =$
In den Körpern $K(\sqrt[3]{2})$, $K(\sqrt[3]{7})$ und $K(\sqrt[3]{3})$ sind die Zahlen $\sqrt[3]{2} -$ $2 - \sqrt[3]{7}$ und $\sqrt[3]{9} - 2$ die Fundamentaleinheiten. Wegen des Hilfssatz ist daher unser Satz auch in diesen Fällen richtig.

Man kann diese Methode verallgemeinern und den folgenden Satz eweisen:

Unter allen Gleichungen

$$Ax^3 + By^3 = C, \tag{8}$$

nit $C = 1$ oder $= 3$, die zu demselben kubischen Körper gehören, gibt s höchstens eine einzige, die in ganzen nicht verschwindenden Zahlen x, y ösbar ist.

(Ich sage, daß die Gleichung $Ax^3 + By^3 = C$ zum Körper $K\left(\sqrt[3]{\frac{A}{B}}\right)$ ehört. Nur für die zu den Körpern $K(\sqrt[3]{2})$ und $K(\sqrt[3]{20})$ gehörigen Gleichungen gilt der Satz nicht.)

Der Beweis dieses Satzes sowohl wie eine vollständige Lösung der Gleichung (8) wird in einer anderen Arbeit im Journal de Mathématiques eröffentlicht.

§ 6.

Weitere Anwendungen der Hilfssätze in § 1.

Die vier Hilfssätze in § 1 können zu dem folgenden Resultat zuammengefaßt werden:

Es seien x, y und D rationale nicht verschwindende Zahlen. Es sei erner $\sqrt[3]{D}$ irrational und

$$(x + y\sqrt[3]{D})^n = X + Y\sqrt[3]{D} + Z(\sqrt[3]{D})^2, \tag{1}$$

nit rationalen Koeffizienten X, Y, Z und ganzzahligem $n > 1$. Dann ind die Zahlen X, Y, Z von Null verschieden, wenn wir von den folgenden Fällen absehen:

1. $n = 4, \quad D = -4\left(\frac{x}{y}\right)^3$

   mit $(x + y\sqrt[3]{D})^4 = x^4(15 - 12\sqrt[3]{2})$,

2. $n = 5, \quad D = -10\left(\frac{x}{y}\right)^3$

   mit $(x + y\sqrt[3]{D})^5 = x^5(-99 + 45\sqrt[3]{10})$,

3. $n = 6, \quad D = -\frac{5}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^3$

   mit $(x + y\sqrt[3]{D})^6 = \frac{1}{4}x^6(171 - 63\sqrt[3]{20})$.

Beweis. Es genügt offenbar, anzunehmen, daß x, y und D ganze Zahlen sind. Denn sind N_1 und N_2 zwei ganze (positive) Zahlen, $N = N_1 N_2$, so daß Nx, $N_1 y$ und $N_2^3 D$ ganz sind, können wir die Gleichung (1) mit

N^n multiplizieren. Gilt der Satz für Nx, $N_1 y$ und $N_2^3 D$, so gilt er au für x, y und D. Wir können weiter annehmen, daß x und y teilerfre sind, ferner, daß D positiv und kubenfrei ist.

Sind x und D teilerfremd, so ist der Satz identisch mit dem Hi satz I. Wir setzen $D = fg^2$, wo fg quadratfrei und > 1 ist. Es dann δ der größte gemeinsame Teiler von x und f, und ferner $\delta_1 \delta_2^2$ größte gemeinsame Teiler von x und g^2, wo δ_1 und δ_2 quadratfrei u teilerfremd sind. Dann ist $x = \delta \delta_1 \delta_2^2 z$, wo z zu $\frac{fg^2}{\delta \delta_1 \delta_2^2}$ prim ist. haben weiter

$$x + y\sqrt[3]{D} = \sqrt[3]{\delta \delta_1^3 \delta_2^2} \cdot \left(z \sqrt[3]{\delta^2 \delta_1 \delta_2^4} + y \sqrt[3]{\frac{f}{\delta} \cdot \left(\frac{g}{\delta_1 \delta_2} \right)^2} \right).$$

Die Zahl $\frac{g}{\delta_1 \delta_2}$ ist offenbar ganz. Die Zahlen $z\delta^2 \delta_1 \delta_2^4$ und $y \cdot \frac{f}{\delta} \left(\frac{g}{\delta_1 \delta} \right.$ sind teilerfremd. Statt (1) erhalten wir folglich eine Gleichung von Form

$$(u\sqrt[3]{D_1} + v\sqrt[3]{D_2})^n = X_1 \sqrt[3]{A} + Y_1 \sqrt[3]{B} + Z_1 \sqrt[3]{C},$$

mit ganzen rationalen Zahlen u, v, D_1 und D_2, so daß uD_1 und v teilerfremd sind, und mit rationalen Zahlen X_1, Y_1, Z_1, A, B und Unser Satz folgt dann sofort aus den Hilfssätzen im § 1.

Die Tatsache, daß in der Gleichung (1) der Koeffizient Z nur zwei Ausnahmefällen verschwindet, kann man offenbar auch so aussprech

Es seien a, c und D rationale, von Null verschiedene Zahlen $\sqrt[3]{D}$ irrational. Dann ist die Zahl $\eta = c + a\sqrt[3]{D}$ niemals Wurzel ei Gleichung von der Form

$$x^n + Ax + C = 0 \tag{2}$$

mit rationalen Koeffizienten A und C und mit ganzzahligem $n > 1$, w wir von den folgenden zwei Fällen absehen: Die Zahl $\eta = c(\sqrt[3]{10} - 1)$ Wurzel der Gleichung

$$x^5 + 45cx^4 - 54c^5 = 0.$$

Die Zahl $\eta = c\left(\sqrt[3]{\frac{5}{2}} - 1\right)$ ist Wurzel der Gleichung

$$x^6 + \frac{63}{2} cx^5 - \frac{45}{4} c^6 = 0.$$

Dieser Satz kann weiter auch so ausgesprochen werden:

Es seien a, c und D rationale, von Null verschiedene Zahlen, $\sqrt[3]{D}$ irrational. Dann sind die Koeffizienten K_n (für $n > 1$) in der tenzreihe

$$\frac{x^2}{(1+cx)^3 + Da^3 x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} K_n x^n$$

lle von Null verschieden, wenn wir von den folgenden zwei Fällen ab-
chen: 1. $D = -10\left(\frac{c}{a}\right)^3$; *es ist dann* $K_5 = 0$. 2. $D = -\frac{5}{2}\left(\frac{c}{a}\right)^3$; *es ist* *ann* $K_6 = 0$.

Beweis. Die Koeffizienten K_n genügen offenbar der Rekursionsformel

3) $$K_{n+3} + 3cK_{n+2} + 3c^2K_{n+1} + (Da^3 + c^3)K_n = 0.$$

Es sei η die reelle Wurzel der Gleichung

$$x^3 + 3cx^2 + 3c^2x + (Da^3 + c^3) = 0,$$

$= -c - a\sqrt[3]{D}$. Dann sind die rationalen Zahlen A_n, B_n, C_n in

$$\eta^n = A_n\eta^2 + B_n\eta + C_n$$

nit ganzzahligem $n \geqq 0$ eindeutig bestimmt. Aus

$$\eta^n(\eta^3 + 3c\eta^2 + 3c^2\eta + Da^3 + c^3) =$$

$$= (A_{n+3} + 3cA_{n+2} + 3c^2A_{n+1} + Da^3A_n + c^3A_n)\eta^2 + F\eta + G = 0$$

olgt, daß auch die A_n der Rekursionsformel (3) genügen.

Nun ist

$$K_0 = A_0 = 0, \quad K_1 = A_1 = 0, \quad K_2 = A_2 = 1$$

nd folglich für alle n

$$K_n = A_n.$$

Also verschwindet K_n dann und nur dann, wenn η Wurzel einer Gleichung von der Form (2) ist.

(Eingegangen am 10. Dezember 1924.)

Über ein Hauptproblem der Hydrodynamik.

Von

N. M. Günther in Leningrad.

Die vorliegende Abhandlung bildet einen Auszug aus einer größe Arbeit, die in den Schriften der russischen Akademie der Wissenschaf erscheinen wird. Es handelt sich um den Existenzbeweis der Lösun hydrodynamischer Gleichungen in dem Falle einer homogenen, unzusamm drückbaren, reibungslosen Flüssigkeit, die den gesamten Raum erfüllt u im Unendlichen ruht. Zur Zeit $t = 0$ ist das Geschwindigkeitsfeld, nicht notwendig wirbelfrei ist, bekannt; partielle Ableitungen der G schwindigkeitskomponenten können sprungweise Unstetigkeiten erleid Die auf die Flüssigkeit wirkenden Kräfte sind konservativ.

Das erste Kapitel bringt vorbereitende Betrachtungen, der Anha den Beweis einiger potentialtheoretischer Hilfssätze. Eine vorläufige M teilung der Ergebnisse enthält die Note „Sur un problème d'hyd dynamique", C. R. **177** (1923), S. 865–867*).

I. Vorbereitende Betrachtungen.

1. Es möge der Raum Q der Punkte (q_1, q_2, q_3) durch gewi Flächen, die wir Grenzen nennen, in k Gebiete, die auch mehrfach sammenhängend sein können, eingeteilt sein. Von den Grenzen werd wir folgende Voraussetzungen machen:

I. Außerhalb einer Kugel vom Radius R^* und dem Mittelpunkt Koordinatenursprung befinden sich keine Punkte, die den Grenzen gehören.

---

*) Auf die Beziehungen, die zwischen der vorliegenden Abhandlung und mei vor kurzem veröffentlichten Arbeit (Math. Zeitschr. **23** (1925), S. 89–154) bestel habe ich bereits dort hingewiesen (vgl. S. 92 sowie Fußnote 7).

II. In jedem Moment t erfüllt jede Grenze die Bedingungen von
iapunoff: α) in jedem Punkte M_0 einer Grenze gibt es eine bestimmte
angentialebene, β) wenn M_1 und M_2 zwei Punkte einer und derselben
renze sind, deren Entfernung r ist, und wenn ϑ den Winkel zwischen
en Normalen an die Grenze in den Punkten M_1, M_2 bezeichnet, so gilt

1) $$\vartheta < E r^{1-\lambda}, \qquad 0 < \lambda < 1,$$

o E und λ von der Wahl von M_1 und M_2 unabhängig sind. Um jeden
unkt M_0 einer Grenze läßt sich gewiß eine Kugel vom Radius d, wo d
on der Wahl von M_0 unabhängig ist, beschreiben, so daß jede Gerade,
ie zu der Normalen in M_0 parallel ist, alle Grenzen innerhalb der Kugel
ur in einem Punkte trifft Eigenschaft γ)[1]).

III. Betrachten wir die Normale an die Grenze im Punkte M_0 im
ugenblick t als fest. Es wird vorausgesetzt, daß ihr Schnittpunkt mit
er Grenze, die ja mit der Zeit variiert, im Augenblick t eine Geschwindig-
eit in der Richtung dieser Normale hat.

Es läßt sich beweisen[2]), daß, wenn die Grenzen der Bedingung (II)
enügen, sich eine positive Zahl ω mit der folgenden Eigenschaft angeben
äßt: Schließt eine Gerade einen Winkel kleiner als ω mit der Normale
m Mittelpunkt der Kugel vom Radius d, so schneidet sie die Grenze
nnerhalb der Kugel nur in einem Punkte.

Aus β) folgt, daß der Winkel zwischen den Normalen in den Punkten
M_1, M_2, innerhalb der wiederholt genannten Kugel nicht größer als
$E(2d)^{1-\lambda}$ ist; wir werden d so klein annehmen, daß dieser Winkel $\frac{\pi}{3}$
icht übertrifft. Wenn man d vermindert, strebt ω gegen $\frac{\pi}{2}$.

Bei der Wahl der Richtung der Innennormale wollen wir wie üblich
ie folgende Regel befolgen. Ist in einem Punkte einer Grenze des Ge-
ietes die Innennormale festgelegt, so ist sie durch Stetigkeit in allen
nderen Punkten derselben Grenze bestimmt. Für alle diejenigen Grenzen,
ie das Gebiet umranden, das den unendlich fernen Punkt enthält, ist die
ichtung der Innennormale dadurch gegeben, daß sie in dieses Gebiet
inein führen soll.

2. Es seien drei Funktionen der Zeit t und der Koordinaten q_1, q_2, q_3
es Punktes $M(q_1, q_2, q_3)$,

2) $$u_i = u_i(q_1, q_2, q_3, t) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

egeben, die folgende Eigenschaften haben:

[1]) Vgl. E. Goursat, Bull. de le Soc. math. de France 38 (1910), S. 139–144. iapunoff führt die vorstehende Eigenschaft als eine besondere Voraussetzung ein.

[2]) Vgl. loc. cit. [1]).

(I) Sie sind für alle q_1, q_2, q_3 in dem ganzen Raume Q und alle in einem Intervalle (o, T) stetig.

Es möge ϱ den Abstand des Punktes M vom Punkte (o, o, o) u A eine gewisse positive, monoton wachsende Funktion von t bezeichne Wir setzen

$$\text{(II)} \qquad |u_i| < A, \quad \varrho\,|u_i| < A$$

voraus.

(III) Wir setzen weiter voraus, daß die Funktionen (2), wenn d Punkt (q_1, q_2, q_3) zur Zeit t nicht auf einer der Grenzen liegt, partiel Ableitungen

$$\text{(3)} \qquad \frac{du_i}{dt}, \ \frac{\partial u_i}{\partial q_j} \qquad (j = 1, 2,$$

haben, die im ganzen Gebiete, das den Punkt (q_1, q_2, q_3) enthält, stetig si und in dem ganzen Raume (Q) den Ungleichheiten genügen:

$$\text{(IV)} \quad \left|\frac{du_i}{dt}\right| < A^{(1)}, \quad \left|\frac{\partial u_i}{\partial q_j}\right| < A, \quad \varrho^2\left|\frac{du_i}{dt}\right| < A^{(1)}, \quad \varrho^2\left|\frac{\partial u_i}{\partial q_j}\right| <$$
$$(j = 1, 2, 3),$$

wo $A^{(1)}$ eine andere positive Funktion der Zeit bezeichnet[3]).

Wenn die Punkte M, M_1 in einem und demselben der k Gebie liegen, in die Q durch die Grenzen zerlegt wird, und wenn r ihr Absta ist, so gilt

$$\text{(V)} \qquad \left[\frac{du_i}{dt}\right] < A^{(1)} r^{1-\lambda}, \qquad \left[\frac{\partial u_i}{\partial q_j}\right] < A r^{1-\lambda},$$
$$\varrho^2\left[\frac{du_i}{dt}\right] < A^{(1)} r^{1-\lambda}, \qquad \varrho^2\left[\frac{\partial u_i}{\partial q_j}\right] < A r^{1-\lambda},$$

wo das Zeichen $[f]$ den absoluten Betrag der Differenz zwischen d Werten der Funktion f in den Punkten M und M_1 bezeichnet.

Es läßt sich nun zeigen[4]), daß unter diesen Voraussetzungen die Fun tionen (3) ganz bestimmte Grenzwerte haben, wenn der Punkt M si einem Punkte M_0 auf der Grenze nähert. Da diese Grenzwerte auf v schiedenen Seiten der Grenze verschieden sein können, so bezeichnen v sie mit

$$\text{(4)} \qquad \left(\frac{\partial u_i}{\partial q_j}\right)_a, \ \left(\frac{du_i}{dt}\right)_a \qquad (a = 1,$$

---

[3]) Wie in der Hydrodynamik üblich ist, bezeichnen wir hier, wo t, q_1, q_2 Lagrangesche Variablen bedeuten, die partielle Differentiation in bezug auf t dem Symbol $\frac{d}{dt}$.

[4]) Vgl. Ch. Müntz, Journ. f. Math. **139** (1910), S. 5—32, insb. S. 6; N. Günth „Über die Operationen mit Funktionen ohne Ableitungen" § 2, 3. Изв. рус. Акад. (1924) (russisch).

s läßt sich ferner beweisen, daß

$$\text{(VI)} \quad \left|\frac{\partial u_i}{\partial q_j} - \left(\frac{\partial u_i}{\partial q_j}\right)_a\right| < A r_0^{1-\lambda}, \qquad \left|\frac{du_i}{dt} - \left(\frac{du_i}{dt}\right)_a\right| < A^{(1)} r_0^{1-\lambda}$$

lt, unter r_0 den Abstand zwischen den Punkten M, M_0 verstanden.

Des weiteren kann man zeigen[5]), daß für jedes Paar von Punkten M und M_1 des Raumes Q, deren Abstand r ist,

$$[u] \leqq \sqrt{3} A r$$

lt. Wenn der Punkt $M_0(q_1, q_2, q_3)$ sich auf einer Grenze in der Weise ewegt, daß q_i stetige Funktionen eines Parameters s mit stetigen Abitungen erscheinen, so sind auch die Werte (2) stetige Funktionen von s it stetigen Ableitungen[6]).

Wir werden im folgenden Funktionen, welche alle vorstehenden Bedingungen erfüllen, regulär von der Art $(A; \lambda)$ nennen.

3. Setzen wir

$$B = \int_0^t A\, dt$$

nd führen wir die Funktionen

$$5) \qquad x_i = q_i + \int_0^t u_i(q_1, q_2, q_3, \tau)\, d\tau$$

die Betrachtung ein. Die Funktionen (5) sind in dem ganzen Raume Q etig und haben in jedem Punkte M, der nicht auf einer Grenze liegt, bleitungen, die den Ungleichheiten

$$6) \qquad \left|\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right| < B \quad (j \neq i), \qquad \left|\frac{\partial x_i}{\partial q_i} - 1\right| < B$$

enügen.

Wenn $\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)_a$ der Grenzwert von $\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$ für $M \to M_0$ ist, so ist

$$\left|\frac{\partial x_i}{\partial q_j} - \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)_a\right| < B r_0^{1-\lambda}$$

nd überdies

$$\left[\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right] < B r^{1-\lambda}.$$

Wenden wir auf die Beziehungen (5), aufgefaßt als Gleichungen zur estimmung von q_1, q_2, q_3 bei festem t, die Methode der sukzessiven Annäherungen an, so finden wir leicht, daß das System (5) für alle x_1, x_2, x_3, lange

$$7) \qquad B < \frac{1}{3}$$

[5]) Vgl. N. Günther, Das Hauptproblem der Hydrodynamik, Известие физ. Лаб. усской Ак. Наук. (1924) (russisch), Kap. I, § 4.

[6]) Loc. cit. [5]), § 5; vgl. weiter Hadamard, Théorie des ondes, Paris 1903, S. 84.

ist, eine und nur eine Lösung in bezug auf q_1, q_2, q_3 hat, und daß d Lösungsfunktionen q_i, wenn der Punkt (q_1, q_2, q_3) nicht auf einer Gren liegt, stetige Ableitungen nach x_1, x_2, x_3 haben.

Wird

$$J = \left| \frac{\partial x_1}{\partial q_1}, \frac{\partial x_2}{\partial q_2}, \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \right| \tag{8}$$

gesetzt, so findet man

$$1 - 3B < J < \frac{1}{1-3B}, \qquad \frac{1}{J}\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}. \tag{8'}$$

In (8′) fassen wir u_i als Funktionen von x_1, x_2, x_3 und t auf. diesem Zusammenhang werden die partiellen Ableitungen nach t mit $\frac{\partial}{\partial}$ bezeichnet.

Aus dem vorhin gesagten kann man noch weiter schließen, daß d System der Gleichungen

$$p_i + \int_0^t u_i(p_1, p_2, p_3, \tau)\, d\tau = q_i + \int_0^t u_i(q_1, q_2, q_3, \tau)\, d\tau \quad (i = 1, 2, 3 \tag{9}$$

solange (7) erfüllt ist, nur eine Lösung

$$p_1 = q_1, \qquad p_2 = q_2, \qquad p_3 = q_3$$

hat. Die letzte Schlußfolgerung kann man auch auf das System

$$\theta\{p_i - q_i + \int_0^t (u_i(p_1, p_2, p_3, \tau) - u_i(q_1, q_2, q_3, \tau))\, d\tau\} \tag{9'}$$

$$+ \vartheta\{p_i - q_i + \int_0^t (v_i(p_1, p_2, p_3, \tau) - v_i(q_1, q_2, q_3, \tau))\, d\tau\} = 0,$$

in welchem v_i andere reguläre Funktionen von der Art (A, λ) u θ, ϑ positive Funktionen, die der Bedingung

$$\theta + \vartheta = 1$$

genügen, bezeichnen, übertragen.

4. Der Raum der Punkte (x, y, z) möge der Kürze halber Ξ heiß Jedem Punkte des Raumes Q entspricht, solange (7) erfüllt ist, ein Pun in Ξ, und umgekehrt. Wenn r der Abstand zwischen zwei Punkten Q und ϱ der Abstand zwischen den zugehörigen Punkten in Ξ ist, hat man:

$$r(1 - 3B) \leqq \varrho \leqq r(1 + 3B), \qquad \frac{\varrho}{1+3B} \leqq r \leqq \frac{\varrho}{1-3B}. \tag{10}$$

Den Grenzen im Raume Q entsprechen im Raume Ξ gewisse Fläch die wir Grenzen Ξ nennen werden.

Man kann durch eine leichte Rechnung feststellen, daß die Grenzen on Ξ den Bedingungen des § 1 genügen, wenn wir, dieser und späterer echnungen wegen,

$$B < \frac{1}{9}$$

nnehmen.

Für die Kugel der Bedingung (γ), die der Kugel vom Radius d im aume Q entspricht, kann man im Raume Ξ eine Kugel vom Radius

$$d_0 = d(1 - 3B)$$

ehmen.

II. Problemstellung.

5. Es sei das System der Gleichungen

11) $$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3} = \frac{\partial \Pi}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

egeben, und es möge auf irgendeine Weise ein System ihrer Lösungen $_1, u_2, u_3, \Pi$ gefunden worden sein, wobei u_i reguläre Funktionen von der rt (A, λ), die einem System von Grenzen im Raume Ξ entsprechen, ezeichnen, während Π eine stetige Funktion ist. Von den Grenzen setzen ir voraus, daß sie den Bedingungen des **1** genügen und den Raum Ξ k zusammenhängende Gebiete

12) $$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$$

eilen; dabei bezeichnen wir mit ω_k dasjenige Gebiet, das den unendlich ernen Punkt enthält.

Wir werden zunächst beweisen, daß die Funktionen $\frac{du_i}{dt}$ in dem ganzen aume Ξ stetig sind und in jedem Punkte M, der nicht auf einer Grenze egt, stetige Ableitungen, die in dem ganzen Raume Ξ beschränkt sind' aben.

Gleichzeitig werden wir zeigen, daß

13) $$\Pi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{K d\omega}{r}, \qquad d\omega = d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3$$

t, wo die Integration über den Gesamtraum erstreckt ist und

$$r^2 = (\zeta_1 - x_1)^2 + (\zeta_2 - x_2)^2 + (\zeta_3 - x_3)^2,$$

14) $$K = 2\left\{\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right\}$$

edeuten. Wir werden uns hierbei auf den folgenden Satz stützen[7]):

[7]) Vgl. N. Günther, Sur quelques applications des fonctions de W. Stekloff, omptes Rendus de l'Académie des Sciences de Russie. Mars 1924. О действиях над ункциями, не имеющими производных, Известия Русской Академии Наук, 1924.

Sind die Funktionen $\frac{du_i}{dt}$ *in einem Gebiete* (ω_i) *stetig und erfüll sie für jedes Paar von Punkten* M, M_1, *deren Abstand* r *ist, die Bedingu*

$$\left[\frac{du_i}{dt}\right] < A_1 r^{1-\lambda},$$

so ist

$$\frac{du_1}{dt}dx_1 + \frac{du_2}{dt}dx_2 + \frac{du_3}{dt}dx_3 \tag{15}$$

ein exaktes Differential einer Funktion Π *dann und nur dann, wenn d drei Funktionen*

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\int\limits_{(\omega_i)} \frac{du_3}{dt}\cdot\frac{d\omega}{r} - \frac{\partial}{\partial x_3}\int\limits_{(\omega_i)} \frac{du_2}{dt}\cdot\frac{d\omega}{r}, \quad \ldots$$

in (ω_i) *harmonisch sind.*

Ist diese Bedingung erfüllt, so ist

$$\Pi = -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int\limits_{(\omega_i)} \frac{du_1}{dt}\cdot\frac{d\omega}{r} + \frac{\partial}{\partial x_2}\int\limits_{(\omega_i)} \frac{du_2}{dt}\cdot\frac{d\omega}{r} + \frac{\partial}{\partial x_3}\int\limits_{(\omega_i)} \frac{du_3}{dt}\cdot\frac{d\omega}{r}\right\} + \tag{16}$$

wo θ_i in (ω_i) harmonisch ist und dem System der drei Gleichungen

$$\frac{\partial\theta_i}{\partial x_1} = -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}\int\limits_{(\sigma_i)}\left(\frac{du_2}{dt}\cos(Nx_1) - \frac{du_1}{dt}\cos(Nx_2)\right)\frac{d\sigma}{r}\right. \tag{17}$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial x_3}\int\limits_{(\sigma_i)}\left(\frac{du_1}{dt}\cos(Nx_3) - \frac{du_3}{dt}\cos(Nx_1)\right)\frac{d\sigma}{r}\right\}, \ \ldots,$$

woselbst (σ_i) die Gesamtheit der Grenzen von (ω_i) und N die nach auß gerichtete Normale zu (σ_i) bezeichnen, genügt.

6. Es läßt sich leicht beweisen, daß die Funktion

$$\Pi = \Pi_0 + \int\limits_{(L)}\left(\frac{du_1}{dt}dx_1 + \frac{du_2}{dt}dx_2 + \frac{du_3}{dt}dx_3\right),$$

wo Π_0 den Wert von Π im Punkt $O(0, 0, 0)$ und L irgendeinen Int grationsweg zwischen O und M bedeuten, einen bestimmten Grenzwert C hat, wenn der Punkt M ins Unendliche rückt.

Bemerken wir des weiteren, daß aus (17) für sehr entfernte Punk die Ungleichheiten $\varrho_0\left|\frac{\partial\theta_k}{\partial x_j}\right| < B$ folgen und daß in (16) für $i = k$ d Summe der Integrale sich dem Grenzwert Null nähert, wenn der Punkt ins Unendliche rückt. Jedes der Integrale ist nämlich absolut genomm kleiner als

$$A_1\int\limits_{R_0}^{R}\int\limits_{0}^{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{1}{\varrho^2}\cdot\frac{\varrho^2\sin\theta\,d\varrho\,d\theta\,d\varphi}{r^2} = \frac{2\pi A_1}{\varrho_0}\left\{\int\limits_{R_0}^{\varrho_0}\int\limits_{\varrho_0-\varrho}^{\varrho_0+\varrho}\frac{d\varrho\,dr}{\varrho r} + \int\limits_{\varrho_0}^{R}\int\limits_{\varrho-\varrho_0}^{\varrho+\varrho_0}\frac{d\varrho\,dr}{\varrho r}\right\} < \frac{B}{\varrho_0}$$

o A_1 eine Konstante und ϱ_0 der Abstand der Punkte O und M ist, enn man unendlich kleine Größen von der Ordnung $\frac{1}{\varrho_0^3}$ vernachlässigt.

7. Wenn $[f]$ den Sprung bezeichnet, den eine Funktion f erleidet, enn der Punkt M eine Grenze überschreitet, so gilt nach Herrn adamard[8]) auf jeder Grenze

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right] = \lambda_i \cos(Nx_j), \qquad \left[\frac{\partial u_i}{\partial t}\right] = -\lambda_i W_n,$$

o W_n die in **1**, III eingeführte Geschwindigkeit bedeutet.

Der Kontinuitätsgleichung (11) zufolge haben wir:

18) $$\lambda_1 \cos(Nx_1) + \lambda_2 \cos(Nx_2) + \lambda_3 \cos(Nx_3) = 0.$$

Weiter finden wir

$$\left[\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}\right] = \left[\frac{du_i}{dt}\right] = \lambda_i (u_1 \cos(Nx_1) + u_2 \cos(Nx_2) + u_3 \cos(Nx_3) - W_n) = \lambda_i T,$$

as wegen (18) zu der Gleichung führt:

19) $$\left[\frac{d\Pi}{dn}\right] = T(\lambda_1 \cos(Nx_1) + \lambda_2 \cos(Nx_2) + \lambda_3 \cos(Nx_3)) = 0,$$

o $\frac{d\Pi}{dn}$ wie gewöhnlich die Ableitung in der Richtung der Normale bedeutet.

8. Setzen wir jetzt im Gebiete (ω_i):

$$\Pi = -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int \frac{du_1}{dt}\cdot\frac{d\omega}{r} + \frac{\partial}{\partial x_2}\int \frac{du_2}{dt}\cdot\frac{d\omega}{r} + \frac{\partial}{\partial x_3}\int \frac{du_3}{dt}\cdot\frac{d\omega}{r}\right\} + \vartheta_i + C(t),$$

o die Integration über den ganzen Raum Ξ erstreckt ist und wo

$$\vartheta_i = \theta_i + \frac{1}{4\pi}\sum_{j\neq i}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{(\omega_j)} \frac{du_1}{dt}\cdot\frac{d\omega}{r} + \frac{\partial}{\partial x_2}\int_{(\omega_j)} \frac{du_2}{dt}\cdot\frac{d\omega}{r} + \frac{\partial}{\partial x_3}\int_{(\omega_j)} \frac{du_3}{dt}\cdot\frac{d\omega}{r}\right\} - C(t)$$

t.

Die Funktion ϑ_i ist wie θ_i harmonisch, und für $i = k$ haben wir, wie us **6** folgt,

20) $$R^2\left|\frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_j}\right| < B, \qquad \lim \vartheta_k = 0 \text{ für } M \to \infty.$$

Wenn ϑ die Funktion bedeutet, die im Gebiete (ω_i) gleich ϑ_i ist, so ist in dem ganzen Raume Ξ stetig, und wir erhalten

$$\left[\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}\right] = \left[\frac{du_1}{dt}\right]\cos(Nx_i)\cos(Nx_1) + \left[\frac{du_2}{dt}\right]\cos(Nx_i)\cos(Nx_2) + \left[\frac{du_3}{dt}\right]\cos(Nx_i)\cos(Nx_3) + \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}\right]$$

$$= \cos(Nx_i)\, T(\lambda_1 \cos(Nx_1) + \lambda_2 \cos(Nx_2) + \lambda_3 \cos(Nx_3)) + \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}\right] = \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}\right].$$

---

[8]) Vgl. J. Hadamard, Leçons sur la propagation des ondes, Ch. II.

Hieraus folgt dann

$$\left[\frac{d\vartheta}{dn}\right] = 0\,.$$

Da wir, wegen (20) für alle i, wenn N die nach außen gerichtete Norma bezeichnet,

$$\vartheta_i = \frac{1}{4\pi}\int_{(\sigma_i)}\left(\frac{1}{r}\frac{d\vartheta_i}{dn} - \vartheta_i\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right)d\sigma \qquad 0 = \frac{1}{4\pi}\int_{(\sigma_i)}\left(\frac{1}{r}\frac{d\vartheta_i}{dn} - \vartheta_i\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right)d\sigma$$

in (ω_i) außerhalb von (ω_i)

schreiben können, so finden wir

$$\vartheta = \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{i=k}\int_{(\sigma_i)}\left(\frac{1}{r}\frac{d\vartheta_i}{dn} - \vartheta_i\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right)d\sigma = 0\,.$$

Also ist

$$(21)\quad \Pi = -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int\frac{du_1}{dt}\cdot\frac{d\omega}{r} + \frac{\partial}{\partial x_2}\int\frac{du_2}{dt}\cdot\frac{d\omega}{r} + \frac{\partial}{\partial x_3}\int\frac{du_3}{dt}\cdot\frac{d\omega}{r}\right\} + C(t$$

und hieraus folgt[9]), daß $\frac{du_i}{dt}$ in dem ganzen Raume Ξ sich stetig verhalte und auf jeder Grenze

$$(22)\quad T = u_1\cos(Nx_1) + u_2\cos(Nx_2) + u_3\cos(Nx_3) - W_n = 0$$

ist.

9. Um zu beweisen, daß die Funktionen $\frac{du_i}{dt}$ in jedem Punkte, d nicht auf einer Grenze liegt, partielle Ableitungen nach x_1, x_2, x_3 habe beschreiben wir um einen solchen Punkt M eine Kugel von einem kleinen Radius, 2ϱ, daß keiner der Punkte im Innern der Kugel währen eines Zeitintervalls $(t-\tau,\ t+\tau)$ in eine der Grenzen hineinfällt. W beschreiben ferner um M eine konzentrische Kugel vom Radius ϱ u setzen

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2\,,$$

wo in Π_1 alle Integrationen sich auf die zuletzt genannte Kugel erstrecke Die Funktion Π_2 ist dann im Innern der Kugel harmonisch und hat d gesuchten Ableitungen.

Die Existenz der Ableitungen von Π_1 ist eine Folge der Identit

$$(23)\quad L = \sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{(\omega)}\frac{du_i}{dt}\cdot\frac{d\omega}{r} + \int_{(\omega)}\frac{K\,d\omega}{r} + \int_{(\sigma)}\left(\sum_{i=1}^{i=3}\frac{du_i}{dt}\cos(Nx_i)\right)\frac{d\sigma}{r} = 0\,,$$

in welcher K die Funktion (14) bedeutet, und (ω) die kleinere Kug (σ) ihre Oberfläche bezeichnet.

---

[9]) Man vergleiche den Anhang.

Es ist zu bemerken, daß die Richtigkeit der Identität (23) evident , wenn die Funktionen u_i stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung ben; denn in diesem Falle können wir wegen der Kontinuitätsgleichung (11) mittelbar die Identität

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\cdot\frac{du_1}{dt}+\frac{\partial}{\partial x_2}\cdot\frac{du_2}{dt}+\frac{\partial}{\partial x_3}\cdot\frac{du_3}{dt}=-K$$

rifizieren.

Um auch den Fall, wenn $\frac{du_i}{dt}$ keine Ableitungen haben, in Betracht ziehen, setzen wir[10])

$$U_i=\frac{1}{h_1h_2h_3}\int_{x_1}^{x_1+h_1}\int_{x_2}^{x_2+h_2}\int_{x_3}^{x_3+h_3}u_i(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,t)\,d\zeta_1\,d\zeta_2\,d\zeta_3,$$

bei wir h_1, h_2, h_3 so klein wählen, daß der Punkt $(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+h_3)$ h allemal im Innern der Kugel vom Radius 2ϱ befindet, sobald (x_1, x_2, x_3) Innern der Kugel vom Radius ϱ liegt.

Die Funktionen U_1 haben stetige Ableitungen zweiter Ordnung nach , x_2, x_3; es existieren auch noch die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ und verhalten h stetig. Da z. B.

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\int_{x_3}^{x_3+h_3}\int_{x_2}^{x_2+h_2}(u_1(x_1+h_1,\zeta_2,\zeta_3,t)-u_1(x_1,\zeta_2,\zeta_3,t))\,d\zeta_2\,d\zeta_3$$

$$=\frac{1}{h_1h_2h_3}\int_{x_1}^{x_1+h_1}\int_{x_2}^{x_2+h_2}\int_{x_3}^{x_3+h_3}u_{x_1}'(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,t)\,d\zeta_1\,d\zeta_2\,d\zeta_3$$

, so haben wir

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+\frac{\partial U_2}{\partial x_2}+\frac{\partial U_3}{\partial x_3}=0.$$

ndlich kann man für jedes positive ε h_1, h_2, h_3 so klein wählen, daß

4) $$|u_i-U_i|<\varepsilon,\quad \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right|<\varepsilon,\quad \left|\frac{du_i}{dt}-\frac{dU_i}{dt}\right|<\varepsilon$$

rd, da z. B.

$$-U_i|=\left|\frac{1}{h_1h_2h_3}\int_{x_1}^{x_1+h_1}\int_{x_2}^{x_2+h_2}\int_{x_3}^{x_3+h_3}(u_i(x_1,x_2,x_3,t)-u_i(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,t))\,d\zeta_1\,d\zeta_2\,d\zeta_3\right|,$$

$$\frac{u}{x_1}-\frac{\partial U}{\partial x_1}\Big|=\left|\frac{1}{h_2h_3}\int_{x_2}^{x_2+h_2}\int_{x_3}^{x_3+h_3}(u_{x_1}'(x_1,x_2,x_3,t)-u_{x_1}'(x_1+\theta h_1,\zeta_2,\zeta_3,t))\,d\zeta_2\,d\zeta_3\right|$$

[10]) Vgl. N. Günther, loc. cit. [4]) § 13.

gilt. Für die Funktionen U_i ist die zu (23) analoge Identität zutreffen weil U_i stetige Ableitungen zweiter Ordnung haben. Bezeichnen wir al mit $\bar{K}$ die zu K analoge Bildung, so können wir

$$|L| = \Big| \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{(\omega)} \Big(\frac{du_i}{dt} - \frac{dU_i}{dt} \Big) \frac{d\omega}{r} + \int_{(\omega)} (K - \bar{K}) \frac{d\omega}{r}$$

$$+ \int_{(\sigma)} \Big(\sum_{i=1}^{i=3} \Big(\frac{du_i}{dt} - \frac{dU_i}{dt} \Big) \cos Nx_i \Big) \frac{d\sigma}{r} \Big| < G\varepsilon,$$

woselbst G von ε unabhängig ist, schreiben. Die letzte Ungleichheit zeig daß $L = 0$ ist, was zu beweisen war.

Unter anderem haben wir jetzt die Identität

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \Big(\frac{du_1}{dt} \Big) + \frac{\partial}{\partial x_2} \Big(\frac{du_2}{dt} \Big) + \frac{\partial}{\partial x_3} \Big(\frac{du_3}{dt} \Big) = \Delta \Pi = - K$$

gewonnen.

10. Um zu beweisen, daß die Ableitungen $\frac{du_i}{dt}$ in dem ganzen Raume beschränkt sind, bemerken wir zuerst, daß, wenn der Abstand des Punktes von der Grenze größer als $\frac{d_0}{4}$ ist, diese Ableitungen gewiß absolut g nommen kleiner als eine Zahl von der Form $B + \frac{C}{\left(\frac{d_0}{4}\right)^3}$ sind. Wenn w nämlich (ω) durch eine Kugel vom Radius $\frac{d_0}{4}$ ersetzen, so finden w

$$\Pi_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{(\omega)} K \frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi} \int_{(\sigma)} \Big(\sum_{i=1}^{i=3} \frac{du_i}{dt} \cos (Nx_i) \Big) \frac{d\sigma}{r},$$

und das erste Integral ist kleiner als eine bestimmte Zahl B, die n von K abhängt.

Nehmen wir jetzt einen Punkt M_0 auf einer Grenze an und ko struieren wir einen geraden Kreiszylinder, dessen Achse die Normale der Grenze in M_0 ist und die Basis ein Kreis vom Radius $\frac{d_0}{2}$ darstel Wenn wir Π in die Summe $\Pi_1 + \Pi_2$ zerlegen, wo bei Π_1 die Integration über das der Kugel und dem Zylinder gemeinsame Gebiet erstreckt sin das wir jetzt mit (ω) bezeichnen, so sind alle Ableitungen von Π_2 den Punkten, deren Abstand von M_0 kleiner als $\frac{d_0}{4}$ ist, absolut genomm kleiner als eine Zahl von der Form $\frac{C}{\left(\frac{d_0}{4}\right)^3}$.

Ziehen wir jetzt das Büschel von Geraden parallel zu der Achse d Zylinders und tragen wir auf diesen Geraden, von der Grenze ausgehen

ch beiden Seiten hin eine Strecke von der Länge η ab. Der geometrische
t der Endpunkte sind Flächen, die mit der Grenze kongruent sind; wir
zeichnen sie mit (σ_1) und (σ_2). Bezeichnen wir noch das Gebiet zwischen
$_1$) und (σ_2) mit (ω'), die übrigen Teile des Innern von (ω) mit (ω_1)
d (ω_2), die Oberfläche von (ω), soweit sie in (ω') nicht enthalten ist,
t (σ'). Dann finden wir:

$$\Pi_1 = -\frac{1}{4\pi}\left\{\sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{(\omega')}\frac{du_i}{dt}\cdot\frac{d\omega}{r}\right\}+\frac{1}{4\pi}\int_{(\omega_1)}K\frac{d\omega}{r}+\frac{1}{4\pi}\int_{(\omega_2)}K\frac{d\omega}{r}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{(\sigma_1)}\left(\sum_{i=1}^{i=3}\frac{du_i}{dt}\cos(Nx_i)\right)\frac{d\sigma}{r}-\frac{1}{4\pi}\int_{(\sigma_2)}\left(\sum_{i=1}^{i=3}\frac{du_i}{dt}\cos(Nx_i)\right)\frac{d\sigma}{r}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{(\sigma')}\left(\sum_{i=1}^{i=3}\frac{du_i}{dt}\cos(Nx_i)\right)\frac{d}{r}.$$

η willkürlich gewählt ist und $\frac{du_i}{dt}$ sich stetig verhalten, so gilt

$$\Pi_1=\frac{1}{4\pi}\int_{(\omega)}K\frac{d\omega}{r}+\frac{1}{4\pi}\int_{(\sigma)}\left(\sum_{i=1}^{i=3}\frac{du_i}{dt}\cos(Nx_i)\right)\frac{d\sigma}{r}.$$

folgt, daß die Ableitungen von Π_1 in den Punkten, deren Abstand
n M_0 kleiner als $\frac{d_0}{4}$ ist, absolut genommen kleiner als eine Zahl von
r Form $B+\frac{C}{\left(\frac{d_0}{4}\right)^3}$ sind.

Nachdem wir die Beschränktheit der Ableitungen von $\frac{du_i}{dt}$ bewiesen
ben, wird es möglich sein, die Greensche Formel auf jedes der Ge-
ete (12) anzuwenden und für Π den Ausdruck (13) zu gewinnen.

11. Es läßt sich beweisen, daß das System der Gleichungen

$$\frac{dx_i}{dt}=u_i(x_1, x_2, x_3, t) \qquad (i=1, 2, 3),$$

nn auf den Grenzen die Bedingung (22) erfüllt ist, Lösung

$$x_i=\varphi_i(q_1, q_2, q_3, t) \qquad (i=1, 2, 3),$$

t. Hier bezeichnet q_i den Wert von x_i für $t=0$. Die Funktionen φ_i
ben stetige Ableitungen nach q_1, q_2, q_3 in jedem Punkte (q_1, q_2, q_3)
r für $t=0$ nicht auf einer Grenze liegt. Beachtet man, daß

$$K=2\left\{\left|\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \frac{\partial x_3}{\partial x_3}\right|+\left|\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial x_2}{\partial x_2}, \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right|+\left|\frac{\partial x_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right|\right\}$$

ist, und wählt für die unabhängigen (Lagrangeschen) Variablen q_1, q_2, q so bekommt man wegen (11) das weitere System von Beziehungen

$$(25)\qquad \begin{aligned} u_i &= u_i^{(0)} + \frac{1}{4\pi}\int_0^t \Big(\int \frac{\bar{L}(\zeta_i - x_i)}{r^3} dp_1\, dp_2\, dp_3\Big) dt, \\ x_i &= q_i + \int_0^t u_i(q_1, q_2, q_3, t)\, dt, \end{aligned}$$

in welchem die inneren Integrationen sich über den ganzen Raum Q d Punkte (p_1, p_2, p_3) erstrecken und

$$r^2 = (\zeta_1 - x_1)^2 + (\zeta_2 - x_2)^2 + (\zeta_3 - x_3)^2,$$

$$(26)\qquad L = 2\left\{\left|\frac{\partial u_1}{\partial q_1}, \frac{\partial u_2}{\partial q_2}, \frac{\partial x_3}{\partial q_3}\right| + \left|\frac{\partial u_1}{\partial q_1}, \frac{\partial x_2}{\partial q_2}, \frac{\partial u_3}{\partial q_3}\right| + \left|\frac{\partial x_1}{\partial q_1}, \frac{\partial u_2}{\partial q_2}, \frac{\partial u_3}{\partial q_3}\right|\right\}$$

bezeichnen; $\bar{L}, \zeta_i$ entstehen aus L, x_i, wenn man die Buchstaben $q_1, q_2,$ durch die Buchstaben p_1, p_2, p_3 ersetzt; $u_i^{(0)}$ sind die Werte von u_i z Zeit $t = 0$.

III. Der Existenzbeweis.

12. Es seien drei Funktionen

$$(27)\qquad u_i^{(0)}(q_1, q_2, q_3) \qquad (i = 1, 2, 3$$

die von t unabhängig und regulär von der Art (A_0, λ) (A_0 konstant) sin gegeben.

Von den Funktionen (27) ausgehend, werden wir gewisse Fun tionen $u_i^{(1)}$, die regulär von der Art (A_1, λ) sind, unter A_1 eine positi Funktion von t verstanden, bilden; von den Funktionen $u_i^{(1)}$ werden w zu Funktionen $u_i^{(2)}$ übergehen usw.

Wir werden den Prozeß der Bildung der obigen Funktionenfolge e klären, indem wir alsbald zeigen, wie man allgemein von den Funktion $u_i^{(n)}$ von der Art (A_n, λ) zu den Funktionen $u_i^{(n+1)}$ von der Art $(A_{n+1},$ gelangt und wie die Funktion A_{n+1} von der Funktion A_n abhängt.

Es mögen also die Funktionen

$$(28)\qquad u_i^{(n)} \qquad (i = 1, 2,$$

regulär und von der Art (A_n, λ) sein.

Nach dem Bildungsgesetz der Funktionen $u_i^{(n+1)}$ wird es einleuchte daß in jedem Punkte, der nicht auf einer Grenze liegt, die Funktion $\frac{\partial u_i^{(n+1)}}{\partial q_j}$ Ableitungen nach t haben, die den Ungleichheiten

$$(29)\qquad \left|\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial u_i^{(n+1)}}{\partial q_j}\right| < A_{n+1}^{(1)}, \qquad \varrho^2\left|\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial u_i^{(n+1)}}{\partial q_j}\right| < A_{n+1}^{(1)},$$

nügen, wo ϱ den Abstand des betrachteten Punktes von dem Punkte 0, 0) bezeichnet, sobald das analoge für die Funktionen $u_i^{(n)}$ gilt.

Also können wir annehmen, da die Funktionen (27) von t unabhängig d, daß alle Funktionen $u_i^{(n)}$ die vorstehende Eigenschaft haben.

Setzen wir

$$B_n = \int_0^t A_n\, dt, \qquad B_n < \frac{1}{9}$$

d bilden wir, wie in dem 3 auseinandergesetzt wurde, die Funktionen

$$x_i^{(n)} = q_i + \int_0^t u_i^{(n)}(q_1, q_2, q_3, \tau)\, d\tau.$$

zen wir ferner

$$= 2\left|\frac{\partial u_1^{(n)}}{\partial q_1}, \frac{\partial u_2^{(n)}}{\partial q_2}, \frac{\partial x_3^{(n)}}{\partial q_3}\right| + 2\left|\frac{\partial u_1^{(n)}}{\partial q_1}, \frac{\partial x_2^{(n)}}{\partial q_2}, \frac{\partial u_3^{(n)}}{\partial q_3}\right| + 2\left|\frac{\partial x_1^{(n)}}{\partial q_1}, \frac{\partial u_2^{(n)}}{\partial q_2}, \frac{\partial u_3^{(n)}}{\partial q_3}\right|.$$

Es ist leicht zu sehen, daß die Funktion L_n den folgenden Bedingungen nügt:

I. In jedem Punkte M, der nicht auf einer Grenze liegt, hat L_n eine tige Ableitung nach t. In dem ganzen Raume Q ist ferner

$$|L_n| < N, \quad \left|\frac{dL_n}{dt}\right| < N^{(1)}, \quad \varrho^4 |L_n| < N, \quad \varrho^4 \left|\frac{dL_n}{dt}\right| < N^{(1)}, \quad N = c A_n^2,$$

c von n unabhängig ist.

II. Wenn r den Abstand zwischen den auf derselben Seite der Grenzen legenen Punkten M und M_1 bezeichnet, so hat man

$$[L_n] < N r^{1-\lambda}, \qquad \varrho^4 [L_n] < N r^{1-\lambda}, \qquad \left[\frac{dL_n}{dt}\right] < N^{(1)} r^{1-\lambda},$$

$$\varrho^4 \left[\frac{dL_n}{dt}\right] < N^{(1)} r^{1-\lambda}.$$

III. Wenn der Punkt M sich dem Punkte M_0 auf der Grenze nähert, ne die Grenze selbst zu überschreiten, so hat L_n einen bestimmten Grenzrt $(L_n)_a$, der übrigens für die beiden Seiten der Grenze verschieden sfallen kann; wenn r_0 der Abstand zwischen den Punkten M und M_0, so gilt

$$|L_n - (L_n)_a| < N r_0^{1-\lambda}, \qquad \left|\frac{dL_n}{dt} - \left(\frac{dL_n}{dt}\right)_a\right| < N r_0^{1-\lambda}.$$

hren wir jetzt in L_n die Buchstaben p_i an Stelle der Buchstaben q_i ein, d es mögen $\zeta_i^{(n)}$ aus $x_i^{(n)}$ auf dieselbe Weise entstanden sein. Setzen r weiter

$$r_n^2 = (\zeta_1^{(n)} - x_1^{(n)})^2 + (\zeta_2^{(n)} - x_2^{(n)})^2 + (\zeta_3^{(n)} - x_3^{(n)})^2$$

und

$$U_i^{(n)} = \int \frac{L_n(\zeta_i^{(n)} - x_i^{(n)})}{r_n^3} d\omega, \tag{32}$$

wo die Integration über den ganzen Raum Q erstreckt ist.

Da nach dem in **3** von den Gleichungen (9) ausgeführten r dann u
nur dann verschwindet, wenn

$$p_i = q_i \qquad (i = 1, 2,$$

ist, so sieht man leicht, auf die Eigenschaften (I) der Funktion L_n g
stützt, daß die Integrale (32) einen Sinn haben.

Aus

$$\zeta_i^{(n)} - x_i^{(n)} = p_i - q_i + \int_0^t \{u_i^{(n)}(p) - u_i^{(n)}(q)\} dt \qquad (i = 1, 2,$$

kann man nämlich mit

$$r^2 = (p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2$$

schließen, daß die Ungleichheiten

$$r_n(1 - 3B_n) < r < r_n(1 + 3B_n), \qquad \frac{r^2}{r_n^2} < (1 + 3B_n)^2 < a_1^2 \tag{33}$$

statthaben. Also haben die Integrale (32) wohl einen Sinn, wenn das Integr

$$a_1^2 \int |L_n| \frac{d\omega}{r^2} \tag{34}$$

einen Sinn hat. Das zuletzt hingeschriebene Integral ist aber konverge
und absolut genommen kleiner als die Zahlen[11])

$$a'N, \qquad \frac{a'N}{\varrho^3}.$$

Es läßt sich ferner beweisen[11]), daß $U_i^{(n)}$ die Bedingungen I, II, III, I
V, VI erfüllen. Es ist dabei in den Bedingungen II, IV und V ϱ durch ϱ
und ϱ^2 durch ϱ^3 zu ersetzen.

Nach Einführung der Funktionen (32) setzen wir

$$u_i^{(n+1)} = u_0 + \frac{1}{4\pi} \int_0^t U_i^{(n)} dt \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{35}$$

Benutzt man jetzt die Eigenschaften der Funktionen (32), so findet ma
leicht, daß die Funktionen (35) regulär von der Art (A_{n+1}, λ) mit

$$A_{n+1} = A_0 + k \int_0^t A_n^3 dt \qquad \left(k = \frac{ac}{4\pi}\right. \tag{36}$$

sind.

[11]) Man sehe den Anhang.

13. Der Prozeß der sukzessiven Berechnung der Funktionen A_n ist n Prozesse für die Berechnung derjenigen Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dt} = ky^2,$$

für $t = 0$ gleich A_0 ist, durch sukzessive Annäherungen ganz analog. Man schließt hieraus, daß

$$A_n < \frac{A_0}{1 - A_0 kt} = A, \quad B_n < \frac{1}{k} \log \frac{1}{1 - A_0 kt} = B$$

, und daß die Ungleichheit (30) für B_n für jedes n erfüllt ist, wenn

$$t < \frac{1 - e^{-\frac{k}{\vartheta}}}{A_0 k} = b_0$$

Wenn t diese Ungleichheit erfüllt, so ist

$$A < A_0 e^{\frac{k}{\vartheta}} = a_0.$$

14. Aus dem vorstehend gesagten folgt, daß die Funktionen (28) ost ihren Ableitungen erster Ordnung beschränkt sind. Wir werden jetzt gen, daß für $n \to \infty$ die vorgenannten Funktionen wie auch ihre Ab- ungen bestimmte Grenzwerte haben.

Um den Beweis zu führen, bilden wir die Reihen

$$u_i^{(0)} + (u_i^{(1)} - u_i^{(0)}) + (u_i^{(2)} - u_i^{(1)}) + \ldots + (u_i^{(n)} - u_i^{(n-1)}) + \ldots,$$

$$\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial q_j} + \left(\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial q_j} - \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial q_j}\right) + \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial q_j} - \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial q_j}\right) + \ldots + \left(\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial q_j} - \frac{\partial u_i^{(n-1)}}{\partial q_j}\right) + \ldots$$

d zeigen: 1. daß die Reihen (37), (37′) in jedem Punkte M, der nicht einer Grenze liegt, absolut konvergent sind; 2. daß die Reihen (37) dem ganzen Raume Q konvergent sind; 3. daß die Reihen (37′) in em Gebiete, das keinen Punkt mit den Grenzen gemein hat, gleich- ßig konvergent sind; 4. daß die Reihe (37′) konvergent bleibt, wenn n an die Stelle der Funktionen $\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial q_j}$ die Funktionen $\left(\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial q_j}\right)_a$ setzt.

Setzen wir

$$|u_i^{(n)} - u_i^{(n-1)}| < G_n, \quad \varrho\,|u_i^{(n)} - u_i^{(n-1)}| < G_n,$$

$$\left|\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial q_j} - \frac{\partial u_i^{(n-1)}}{\partial q_j}\right| < G_n, \quad \varrho^2 \left|\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial q_j} - \frac{\partial u_i^{(n-1)}}{\partial q_j}\right| < G_n.$$

Aus dem über A_n gesagten schließen wir, daß G_n endlich und nicht ßer als $2a_0$ sind.

Wegen

$$(38') \quad \left|\frac{\partial x_i^{(n)}}{\partial q_j} - \frac{\partial x_i^{(n-1)}}{\partial q_j}\right| = \left|\int_0^t \left(\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial q_j} - \frac{\partial u_i^{(n-1)}}{\partial q_j}\right) dt\right| < \int_0^t G_n\, dt < G_n\, t < b_0$$

ist, wie man sich leicht überzeugt,

$$|L_n - L_{n-1}| < cG_n, \qquad \varrho^4 |L_n - L_{n-1}| < cG_n,$$

wo c von n unabhängig ist.

15. Untersuchen wir jetzt die Differenzen $u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}$; der Bequemlichkeit halber werden wir den Zeiger (i) nicht mehr schreiben.

Es ist

$$(39) \quad u^{(n+1)} - u^{(n)} = \int (L_n - L_{n-1}) \frac{\zeta^{(n)} - x^{(n)}}{r_n^3}\, d\omega + \int L_{n-1} \left\{\frac{\zeta^{(n)} - x^{(n)}}{r_n^3} - \frac{\zeta^{(n-1)} - x^{(n-1)}}{r_{n-1}^3}\right\} d\omega.$$

Wenn wir an die Eigenschaften der Integrale (24) zurückdenken, finden wir sogleich, daß das erste Integral in (39) absolut genommen kleiner ist, als

$$acG_n \quad \text{und} \quad \frac{acG_n}{\varrho^2},$$

wo a von n unabhängig ist.

Nun aber das zweite Integral in (39). Es gilt

$$\frac{\zeta_i^{(n)} - x_i^{(n)}}{r_n^3} - \frac{\zeta_i^{(n-1)} - x_i^{(n-1)}}{r_{n-1}^3} = \sum_{j=1}^{j=3} \{(\zeta_j^{(n)} - x_j^{(n)}) - (\zeta_j^{(n-1)} - x_j^{(n-1)})\} \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial x_j \partial x_i}\Big|_{(1)}$$

wo das Zeichen (1) bedeutet, daß die Ableitung von

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

in dem Punkte zu nehmen ist, dessen Koordinaten gleich

$$\zeta_i^{(n-1)} - x_i^{(n-1)} + \theta[(\zeta_i^{(n)} - x_i^{(n)}) - (\zeta_i^{(n-1)} - x_i^{(n-1)})]$$

$$= \vartheta(\zeta_i^{(n-1)} - x_i^{(n-1)}) + \theta(\zeta_i^{(n)} - x_i^{(n)}$$

$$= \vartheta\left\{p_i - q_i + \int_0^t (u_i^{(n-1)}(p) - u_i^{(n-1)}(q))\, dt\right\}$$

$$+ \theta\left\{p_i - q_i + \int_0^t (u_i^{(n)}(p) - u_i^{(n)}(q))\, d\right.$$

$$(\vartheta + \theta = 1,\ \vartheta > 0,\ \theta > 0;\ i = 1, 2, 3)$$

nd. Da

$$\left|\vartheta\int_0^t (u_i^{(n-1)}(p)-u_i^{(n-1)}(q))\,dt+\theta\int_0^t (u_i^{(n)}(p)-u_i^{(n)}(q))\,dt\right|$$
$$<\sqrt{3}\,\vartheta B r+\sqrt{3}\,\theta B r=\sqrt{3}\,B r$$

t, so haben wir wieder

$$\frac{r'_{n-1}}{r}<1+3B_n<a_1.$$

Weiter ist

$$(\zeta^{(n)}-x^{(n)})-(\zeta^{(n-1)}-x^{(n-1)})$$
$$=\int_0^t\{(u^{(n)}(p)-u^{(n-1)}(p))-(u^{(n)}(q)-u^{(n-1)}(q))\}\,dt.$$

Hieraus schließen wir, indem wir die Eigenschaften der Funktionen $u^{(n)}(p)-u^{(n-1)}(p)$ benutzen und uns an das in 2 Gesagte und an die Ungleichheiten (38) erinnern, daß für jedes Paar der Punkte (p_1, p_2, p_3), (q_1, q_2, q_3):

$$|(u^{(n)}(p)-u^{(n-1)}(p))-(u^{(n)}(q)-u^{(n-1)}(q))|<\sqrt{3}\,G_n r$$

und also

$$|(\zeta_i^{(n)}-x_i^{(n)})-(\zeta_i^{(n-1)}-x_i^{(n-1)})|<\sqrt{3}\,r\int_0^t G_n\,dt<\sqrt{3}\,r\,b_0\,G_n \tag{0}$$
$$(i=1,2,3)$$

lt. Daraus folgt weiter, daß

$$\left|\frac{\zeta_i^{(n)}-x_i^{(n)}}{r_n^3}-\frac{\zeta_i^{(n-1)}-x_i^{(n-1)}}{r_{n-1}^3}\right|<3\sqrt{3}\,b_0\,G_n\frac{4r}{(r_1')^3}<a'\frac{G_n}{r^2}$$

und daß das zweite Integral in (39) absolut genommen kleiner als

$$a'\,G_n\int|L_{n-1}|\,\frac{d\omega}{r^2},$$

so kleiner als die beiden Zahlen

$$a_1'\,G_n,\qquad \frac{a_1'\,G_n}{\varrho^2}$$

. Das vorhin gesagte führt zu dem Schluß, daß

$$|u_i^{(n+1)}-u_i^{(n)}|<b\int_0^t G_n\,dt,\qquad \varrho^2\,|u_i^{(n+1)}-u_i^{(n)}|<b\int_0^t G_n\,dt \tag{1}$$

t einem von n unabhängigen b ist.

16. Indem wir jetzt zu dem Studium der Differenz

$$\frac{\partial u_i^{(n+1)}}{\partial q_j}-\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial q_j} \tag{2}$$

übergehen, bemerken wir, daß sie dem Integralausdruck

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^t \left[\left\{\frac{\partial U_i^{(n)}}{\partial x_1^{(n)}}\cdot\frac{\partial x_1^{(n)}}{\partial q_j}+\frac{\partial U_i^{(n)}}{\partial x_2^{(n)}}\cdot\frac{\partial x_2^{(n)}}{\partial q_j}+\frac{\partial U_i^{(n)}}{\partial x_3^{(n)}}\cdot\frac{\partial x_3^{(n)}}{\partial q_j}\right\}\right.$$

$$\left.-\left\{\frac{\partial U_i^{(n-1)}}{\partial x_1^{(n-1)}}\cdot\frac{\partial x_1^{(n-1)}}{\partial q_j}+\frac{\partial U_i^{(n-1)}}{\partial x_2^{(n-1)}}\cdot\frac{\partial x_2^{(n-1)}}{\partial q_j}+\frac{\partial U_i^{(n-1)}}{\partial x_3^{(n-1)}}\cdot\frac{\partial x_3^{(n-1)}}{\partial q_j}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^t\left\{\sum_{h=1}^{h=3}\frac{\partial U_i^{(n)}}{\partial x_h^{(n)}}\left(\frac{\partial x_h^{(n)}}{\partial q_j}-\frac{\partial x_h^{(n-1)}}{\partial q_j}\right)\right\}dt$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^t\left\{\sum_{h=1}^{h=3}\left(\frac{\partial U_i^{(n)}}{\partial x_h^{(n)}}-\frac{\partial U_i^{(n-1)}}{\partial x_h^{(n-1)}}\right)\frac{\partial x_h^{(n-1)}}{\partial q_j}\right\}$$

gleich ist.

Infolge der Ungleichheiten (38′) ist der erste Summand gewiß absol genommen nicht größer als eine Zahl von der Form:

$$a\int_0^t G_n\,dt,$$

wo a von n unabhängig ist.

Um die Differenzen (42) abzuschätzen, genügt es darum, die Differenz

$$\frac{\partial U_i^{(n)}}{\partial x_h^{(n)}}-\frac{\partial U_i^{(n-1)}}{\partial x_h^{(n-1)}} \qquad (i=1,2,3;\ h=1,2,3) \tag{42′}$$

zu betrachten.

17. Da die Rechnungen für alle h und i analog verlaufen, so woll wir uns mit der Voraussetzung $h=i$ begnügen.

Es sei $M_0(q_1, q_2, q_3)$ ein Punkt, der nicht auf einer der Grenzen lie und dessen Entfernung von diesen den Wert 2δ hat. Wir beschreiben u M_0 eine Kugel vom Radius δ_0 mit

$$\delta_0 \leqq \delta, \text{ wenn } \delta < G_n, \text{ und } \delta_0 = G_n, \text{ wenn } \delta \geqq G_n.$$

Um die Ableitungen (42) zu bestimmen, führen wir bei der Diskussi von $\frac{\partial U^{(n)}}{\partial x_i^{(n)}}$ als Integrationsvariable $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ ein, wo

$$\zeta_i = p_i + \int_0^t u_i^{(n)}(p)\,dt. \tag{43}$$

Die eben konstruierte Kugel wird dabei in eine gewisse Fläche (D_n) übe gehen. Ist

$$J_n = \left|\frac{\partial x_1^{(n)}}{\partial q_1}, \frac{\partial x_2^{(n)}}{\partial q_2}, \frac{\partial x_3^{(n)}}{\partial q_3}\right|,$$

d $L_n^{(0)}, J_n^{(0)}$ die Werte von L_n, J_n im Punkte M_0 und ist

$$r_0^2 = (\zeta_1 - x_1)^2 + (\zeta_2 - x_2)^2 + (\zeta_3 - x_3)^2, \qquad d\omega_0 = d\zeta_1\, d\zeta_2\, d\zeta_3,$$

kann man

1) $$\frac{\partial U^{(n)}}{\partial x_n} = \frac{L_n^{(0)}}{J_n^{(0)}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \int\limits_{(D_n)} \frac{d\omega_0}{r_0}\Bigg|_{x_j = x_j^{(n)}} + \int\limits_{(D_n)} \left(\frac{L_n}{J_n} - \frac{L_n^0}{J_n^0}\right) \left\{\frac{(3\zeta_i - x_i)^2}{r_n^5} - \frac{1}{r_n^3}\right\} d\omega_0$$

$$+ \int\limits_{(\Xi - D_n)} \frac{L_n}{J_n} \left\{\frac{3(\zeta_i - x_i)^2}{r_n^5} - \frac{1}{r_n^3}\right\} d\omega_0,$$

die letzte Integration auf den ganzen Raum Ξ außerhalb des Ge-tes (D_n) erstreckt ist, setzen[12]).

Führt man in analoger Weise neue Integrationsvariablen den Formeln

3′) $$\zeta_i = p_i + \int\limits_0^t u_i^{(n-1)}(p)\, dt, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

näß, so erhält man:

4′) $$\frac{\partial U^{(n-1)}}{\partial x_i^{(n-1)}} = \frac{L_{n-1}^{(0)}}{J_{n-1}^{(0)}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \int\limits_{(D_{n-1})} \frac{d\omega_0}{r_0}\Bigg|_{x_j = x_j^{(n-1)}}$$

$$+ \int\limits_{(D_{n-1})} \left(\frac{L_{n-1}}{J_{n-1}} - \frac{L_{n-1}^{(0)}}{J_{n-1}^{(0)}}\right) \left\{\frac{3(\zeta_i - x_i^{(n-1)})^2}{r_{n-1}^5} - \frac{1}{r_{n-1}^3}\right\} d\omega_0$$

$$+ \int\limits_{(\Xi - D_{n-1})} \frac{L_{n-1}}{J_{n-1}} \left\{\frac{3(\zeta_i - x_i^{(n-1)})^2}{r_{n-1}^5} - \frac{1}{r_{n-1}^3}\right\} d\omega_0.$$

Um die Differenzen (42) abzuschätzen, müssen wir die Integral-drücke in (44), (44′) einzeln miteinander vergleichen.

18. Die Differenz zwischen den ersten Summanden rechts ist gleich

) $$\left(\frac{L_n^{(0)}}{J_n^{(0)}} - \frac{L_{n-1}^{(0)}}{J_{n-1}^{(0)}}\right) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \int\limits_{(D_n)} \frac{d\omega_0}{r_0}\Bigg|_{x_j = x_j^{(n)}}$$

$$+ \frac{L_{n-1}^{(0)}}{J_{n-1}^{(0)}} \left\{\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \int\limits_{(D_n)} \frac{d\omega_0}{r}\Bigg|_{x_j = x_j^{(n)}} - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \int\limits_{(D_{n-1})} \frac{d\omega_1}{r}\Bigg|_{x_j = x_j^{(n-1)}}\right\}.$$

Die Differenz

$$\frac{L_n^{(0)}}{J_n^{(0)}} - \frac{L_{n-1}^{(0)}}{J_{n-1}^{(0)}}$$

[12]) Man vergleiche den Anhang.

ist, wie man sich leicht überzeugt, absolut genommen kleiner als

$$a' G_n, \qquad \frac{a' G_n}{\varrho^4}, \tag{46}$$

wo a' von n unabhängig ist.

Der erste Integralausdruck in (45) ist gleich

$$\int_{(D_n)} \cos(Nx)\,\frac{\zeta_i - x_i^{(n)}}{r_n^3}\,d\sigma,$$

wo $d\sigma$ ein Flächenelement von (D_n) und N die nach außen gerichtete Normale bezeichnet. Kehren wir jetzt zu den früheren Variablen zurück, so bekommen wir

$$\int\left(\cos(Np_1)\frac{\partial q_1}{\partial x_i^{(n)}} + \cos(Np_2)\frac{\partial q_2}{\partial x_i^{(n)}} + \cos(Np_3)\frac{\partial q_3}{\partial x_i^{(n)}}\right) J\,\frac{(\zeta_i^{(n)} - x_i^{(n)})}{r_n^3}\,d\sigma_0$$

wo $d\sigma_0$ ein Flächenelement der Kugel und N ihre Außennormale bezeichnen. Da, den Ungleichheiten (33) gemäß,

$$\left|\frac{\zeta_i^{(n)} - x_i^{(n)}}{r_n^3}\right| < \frac{1}{r_n^2} < \frac{a_1^2}{r^3} = \frac{a_1^2}{\delta_0^2},$$

ist, so ist es klar, daß der betrachtete Integralausdruck absolut genommen kleiner als

$$\frac{a'}{\delta_0^2}\int d\sigma_0 = 4\pi a'$$

(a' von n unabhängig) ist.

Um den zweiten Summanden in (45) abzuschätzen, führen wir in den zweiten Integral für ζ_i, x_i die Variablen $\zeta_i - x_i^{(n)}(q) + x_i^{(n-1)}(q)$, $x_i - x_i^{(n)}(q) + x_i^{(n-1)}(q)$ ein. Für die Flächen (D_n), (D_{n-1}) gelten alsdann die Gleichungen

$$\zeta_i^{(1)} = p_i + \int_0^t \{u_i^{(n)}(p) - u_i^{(n)}(q) + u_i^{(n-1)}(q)\}\,dt, \tag{47}$$

$$\zeta_i^{(2)} = p_i + \int_0^t u_i^{(n-1)}(p)\,dt \qquad (i = 1, 2,$$

mit

$$p_1 = q_1 + \delta_0 \sin\theta\cos\varphi, \quad p_2 = q_2 + \delta_0 \sin\theta\sin\varphi, \quad p_3 = q_3 + \delta_0\cos\theta$$
$$(0 \leqq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leqq \theta \leqq \pi).$$

Die Differenz der beiden Integrale hat den Wert

$$\int_{(D_n \cdot D_{n-1})} \left\{\frac{3(\zeta_i - x_i^{(n-1)})^2}{\varrho^5} - \frac{1}{\varrho^3}\right\} d\zeta_1\,d\zeta_2\,d\zeta_3$$

$$(\varrho^2 = (\zeta_1 - x_1^{(n-1)})^2 + (\zeta_2 - x_2^{(n-1)})^2 + (\zeta_3 - x_3^{(n-1)})^2),$$

die Integration über die von den Flächen $(D_n), (D_{n-1})$ begrenzten reiche erstreckt ist und woselbst einige Teile sinngemäß mit dem ichen (+), die anderen mit dem Zeichen (−) zu nehmen sind.

Wenn wir jetzt die Variablen p_i gemäß (43′) einführen, verwandelt h (D_{n-1}) in die Kugel (δ_0) vom Radius δ_0 und (D_n) in eine Fläche (D_n'), ren Gleichungen in Koordinaten (p_i') durch die Formeln

$$p_i + \int_0^t u_i^{(n-1)}(p)\,dt = p_i' + \int_0^t \{u_i^{(n)}(p') - u_i^{(n)}(q) + u_i^{(n-1)}(q)\}\,dt,$$

nen man auch die Gestalt

$$7') \qquad p_i + \int_0^t u^{(n)}(p)\,dt + (\zeta_i^{(2)} - \zeta_i^{(1)}) = p_i' + \int_0^t u_i^{(n)}(p')\,dt$$

ben kann, gegeben sind.

Aus den zuletzt hingeschriebenen Gleichungen folgt, wie es aus den gleichheiten (40) hervorgeht, wegen der Beschränktheit der Ableitungen n p_i' (3), daß

$$p_i' = p_i + \delta_0 G_n R_i, \qquad |R_i| < R \qquad (i = 1, 2, 3)$$

t. Sucht man jetzt den Schnittpunkt

$$(q_1 + \delta_1 \sin\theta_0 \cos\varphi_0, \quad q_2 + \delta_1 \sin\theta_0 \sin\varphi_0, \quad q_3 + \delta_1 \cos\theta_0)$$

r Fläche (D_n') mit der Geraden

$$= q_1 + \delta \sin\theta_0 \cos\varphi_0, \quad p_2' = q_2 + \delta \sin\theta_0 \sin\varphi_0, \quad p_3' = q_3 + \delta \cos\theta_0,$$

findet man leicht, daß

$$|\delta_1 - \delta_0| < a\,\delta_0 G_n$$

. Es folgt hieraus, daß der Bereich zwischen den Flächen (D_n') und (δ_0) h zwischen zwei konzentrischen Kugeln, deren Abstand kleiner als $\delta_0 G_n$ ist, befindet.

Da der Abstand des Punktes $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)})$ von der Fläche (D_n) vie des Punktes $(x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}, x_3^{(n-1)})$ von der Fläche (D_{n-1}) nirgends) kleiner als $\delta_0(1 - 3B)$ ist, welche Zahl $\frac{2}{3}\delta_0$ übertrifft und die Deternante J $\frac{3}{2}$ (4) nicht übertrifft, so ist die Funktion unter dem Integrationschen absolut genommen kleiner als $\frac{6}{\left(\frac{2}{3}\delta_0\right)^3}$ und der absolute Betrag s Integrals selbst kleiner als eine Zahl von der Form $a\,G_n$, wo a von n abhängig ist.

Aus dem Gesagten folgt, daß die Differenz zwischen den ersten iedern in (44), (44′) absolut genommen kleiner als eine Zahl von der rm (46) ist.

19. Um die Differenzen zwischen den übrigen Termen der Forme (44), (44′) abzuschätzen, kehren wir zu den Integrationsvariablen p_1, p_2, p_3 zurück.

Die Differenz zwischen den zweiten Termen ist

$$(48)\qquad \int_{(\delta_n)} \left[\left(L_n - \frac{L_n^{(0)}}{J_n^{(0)}} J_n\right) - \left(L_{n-1} - \frac{L_{n-1}^{(0)}}{J_{n-1}^{(0)}} J_{n-1}\right)\right] \{n\}\, d\omega$$

$$+ \int_{(\delta_0)} \left(L_{n-1} - \frac{L_{n-1}^{(0)}}{J_{n-1}^{(0)}} J_{n-1}\right) \left[\{n\} - \{n-1\}\right] d\omega \text{ mit } \{n\} = \frac{3(\zeta_i^{(n)} - x_i^{(n)})^2}{r_n^5} - \frac{1}{r}$$

Wenn wir den ersten Faktor unter dem ersten Integralzeichen mit bezeichnen und ihn zuerst so wie er geschrieben ist, dann nach geeigneter Gruppierung der Glieder abschätzen, so finden wir leicht:

$$(49)\quad |T| < h r^{1-\lambda}, \quad |T| < g G_n \quad \text{sowie} \quad |T| < \frac{h r^{1-\lambda}}{\varrho_0^4}, \quad |T| < \frac{g G_n}{\varrho_0^4},$$

wo ϱ_0 den Abstand des Punktes (q_1, q_2, q_3) von dem Punkte $(0, 0, 0)$ bezeichnet.

Aus den Ungleichheiten (49) schließen wir, daß

$$|T^n| < g^{n-1} h G_n^{n-1} r^{1-\lambda} \quad \text{und} \quad |T^n| < \frac{g^{n-1} h G_n^{n-1} r^{1-\lambda}}{\varrho_0^{4(n-1)}}$$

mithin

$$|T| < c G_n^{\frac{n-1}{n}} r^{\frac{1-\lambda}{n}}, \qquad |T| < \frac{c G_n^{\frac{n-1}{n}} r^{\frac{1-\lambda}{n}}}{\varrho_0^3},$$

wo c von n unabhängig ist, gilt.

Berücksichtigen wir jetzt die Ungleichheiten (33), so finden wir, da $\delta_0 \leqq G_n$ ist, daß das erste Integral in (48) absolut genommen kleiner als die Zahlen:

$$a' G_n^{\frac{n-1}{n}} \int_0^{\delta_0} \frac{r^{\frac{1-\lambda}{n}} r^2 dr}{r^3} < a n G_n^{\frac{n-1}{n}} \delta_0^{\frac{1-\lambda}{n}} < a n G_n^{1-\frac{\lambda}{n}} \quad \text{und} \quad \frac{a n G_n^{1-\frac{\lambda}{n}}}{\varrho_0^3}.$$

ist. Wenn wir nunmehr zu dem zweiten Integralausdruck in (48) übergehen, so finden wir, daß der Ausdruck in der Paranthese [ ] in der Form

$$\sum_{j=1}^{j=3} \{(\zeta_j^{(n)} - x_j^{(n)}) - (\zeta_j^{n-1)} - x_j^{(n-1)})\} \frac{\partial^3 \frac{1}{r'}}{\partial x_j \partial x_i^2}\Big|_{(1)}$$

geschrieben werden kann. Sein absoluter Betrag ist wegen der Formel in 15 kleiner als $a' \frac{G_n}{r^3}$.

Da, wie man schon bei der Herstellung der ersten Ungleichheit (49) merkt hat,

$$\left| L_{n-1} - \frac{L_{n-1}^{(0)}}{J_{n-1}^{(0)}} J_{n-1} \right| < h' r^{1-\lambda} \quad \text{und} \quad < \frac{h' r^{1-\lambda}}{\varrho_0^4}$$

, so ist das letzte Integral absolut genommen kleiner als

$$a_1 G_n \delta_0^{1-\lambda} < a' G_n, \qquad \frac{a' G_n}{\varrho_0^4}.$$

ir schließen hieraus, da der Quotient

$$0) \qquad \frac{a' G_n}{a n G^{1-\frac{\lambda}{n}}} = \frac{a'}{a} \cdot \frac{G_n^{\frac{\lambda}{n}}}{n}$$

schränkt ist, daß die Differenz zwischen den zweiten Termen von der Form

$$1) \qquad a n G_n^{1-\frac{\lambda}{n}}, \qquad \frac{a n G_n^{1-\frac{\lambda}{n}}}{\varrho_0^3}$$

von n unabhängig) ist.

20. Die Differenz zwischen den dritten Summanden in den Formeln 1) und (44′) ist:

$$\int_{(Q-\delta_0)} (L_n - L_{n-1}) \{n\} d\omega + \int_{(Q-\delta_0)} L_{n-1} [\{n\} - \{n-1\}] d\omega,$$

1*)

$$\{n\} = \frac{3 (\xi_i^{(n)} - x_i^{(n)})^2}{r_n^5} - \frac{1}{r_n^3}.$$

Wenn wir das erste Integral zuerst über eine Kugel vom Radius Δ t $\Delta > 1$ erstrecken, finden wir leicht, daß es den Wert

$$a G_n (\log \Delta - \log \delta_0) = - a' G_n \log \delta_0 \quad \text{bzw.} \quad - \frac{a' G_n \log \delta_0}{\varrho_0^4}$$

t. Für $\delta_0 < 1$ ist nun das Maximum von $- \delta_0^{\frac{\lambda}{n}} \log \delta_0$ gleich $\frac{e n}{\lambda}$.

Solange $\delta < G_n$ ist, ist der absolute Betrag des betrachteten Integrals ich

$$2) \qquad a' G_n |\log \delta_0|.$$

Ist $\delta > G_n$, so ist $\delta_0 = G_n$, und für den absoluten Betrag des frag- nen Integrals haben wir die Schranke

$$2') \qquad a' G_n |\log G_n| = a' G_n^{1-\frac{\lambda}{n}} G_n^{\frac{\lambda}{n}} |\log G_n| < a' n G_n^{1-\frac{\lambda}{n}}.$$

Derjenige Teil des Integrals, der über das Gebiet außerhalb de Kugel vom Radius Δ erstreckt ist, ist aber gewiß absolut genommen nicht größer als die Zahlen:

$$c\,G_n \quad \text{und} \quad \frac{c\,G_n}{\varrho_0^3}.$$

Wenn wir endlich zu dem letzten Integral in (51*) übergehen un das in **19** Gesagte berücksichtigen, so finden wir, daß die []-Paranthese absolut genommen kleiner als $\frac{a\,G_n}{r^3}$ sind und darum sein absoluter Betra kleiner als

$$a\,G_n \int_{(Q-\delta_0)} \frac{|L_{n-1}|\,d\omega}{r^3}$$

ist.

Wenn wir das zuletzt hingeschriebene Integral über die Kugel vo Radius Δ erstrecken und den Rest abschätzen, finden wir, daß es de selben Ungleichheiten wie das vorhin betrachtete Integral genügt.

21. Infolge der Beschränktheit der G_n kann die Ungleichheit

$$(50') \qquad a\,n\,G^{1-\frac{\lambda}{n}} < a'\,G_n\,|\log\delta_0|, \quad \text{d. h.} \quad n < b\,(2\,a_0)^{\frac{\lambda}{n}}\,|\log\delta_0|$$

für hinreichend große n gewiß nicht gelten.

Diese Bemerkung und die Beschränktheit von (50) benutzend, schließe wir, daß

$$(53) \qquad \begin{cases} \text{wenn } \delta < G_n\text{:} & G_{n+1} = a \int_0^t G_n\,|\log\delta_0|\,dt\,, \\ \text{wenn } \delta > G_n\text{:} & G_{n+1} = a\,n \int_0^t G_n^{1-\frac{\lambda}{n}}\,dt \end{cases}$$

und für alle n von einem Werte n_0 an

$$(53') \qquad G_{n+1} = a\,n \int_0^t G_n^{1-\frac{\lambda}{n}}\,dt$$

gesetzt werden kann.

22. Betrachten wir einen Punkt $M_0(q_1, q_2, q_3)$, dessen Abstand vo der Grenze gleich δ ist, und es möge m eine Zahl bezeichnen, die de Ungleichheit (50′) genügt; die Zahl m hängt von δ ab.

Bezeichnen wir weiter mit G_1 irgendeine Zahl größer als der absolut Betrag der Integrale

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^t U_i^{(0)}\,dt \qquad (i = 1, 2, 3$$

berechnen wir die Funktionen

$$G_2, G_3, \ldots, G_m$$

den Formeln (53). Setzen wir endlich $G_m = \Gamma$.

Um die übrigen G_n zu berechnen, muß man die Formel (53′) be-
zen. Ist

$$G_{m+n} = C(n)(at)^{\varphi(n)}, \quad C(0) = \Gamma, \quad \varphi(0) = 0,$$

gilt einerseits

$$G_{m+n+1} = C(n+1)(at)^{\varphi(n+1)},$$

erseits

$$G_{m+n+1} = \frac{m+n}{1+\varphi(n)\left(1-\frac{\lambda}{m+n}\right)} (C(n))^{1-\frac{\lambda}{m+n}} (at)^{1+\varphi(n)\left(1-\frac{\lambda}{m+n}\right)}.$$

raus folgt:

$$+1) = 1+\varphi(n)\left(1-\frac{\lambda}{m+n}\right), \quad C(n+1) = \frac{m+n}{1+\varphi(n)\left(1-\frac{\lambda}{m+n}\right)} (C(n))^{1-\frac{\lambda}{m+n}}.$$

Suchen wir zuerst $\varphi(n)$ zu bestimmen. Setzt man

$$\varphi(n) = \frac{n+m}{1+\lambda} + z(n), \qquad z(0) = -\frac{m}{1+\lambda},$$

findet man

$$z(n+1) = z(n)\cdot\left(1-\frac{\lambda}{m+n}\right),$$

$$(n) = -\frac{m}{1+\lambda}\left(1-\frac{\lambda}{m}\right)\left(1-\frac{\lambda}{m+1}\right)\ldots\left(1-\frac{\lambda}{m+n-1}\right) = -\frac{m}{1+\lambda}\psi(n)$$

darum

$$) = \frac{n+m}{1+\lambda} - \frac{m}{1+\lambda}\psi(n), \quad \lim \psi(n) = 0, \quad \lim \frac{1}{n}\varphi(n) = \frac{1}{1+\lambda} \text{ für } n \to \infty$$

jetzt $C(n)$ aus der Gleichung

$$C(n+1) = \frac{(m+n)(1+\lambda)}{m+n+1-m\psi(n+1)} (C(n))^{1-\frac{\lambda}{m+n}}$$

ermitteln, setzen wir

$$C(n) = \alpha(n)(1+\lambda)^{\frac{n+m}{1+\lambda}} \Gamma^{\psi(n)}.$$

finden

$$\alpha(n+1) = \frac{m+n}{m+n+1-m\psi(n+1)} \alpha(n)^{1-\frac{\lambda}{m+n}}.$$

für alle $n \geqq n_0$

$$\frac{m+n}{m+n+1-m\psi(n+1)} < 1$$

ist, so folgt mit $\alpha(n_0) = k$:

$$\alpha(n) < k^{\frac{\psi(n)}{\psi(n_0)}}, \qquad \alpha(n)^{\frac{1}{n}} < k^{\frac{1}{n}\frac{\psi(n)}{\psi(n_0)}}.$$

Hieraus folgt weiter, daß für jedes positive ε, sofern $n \geqq N$ gewählt wi

$$\alpha(n)^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$$

ausfällt. Da für alle $n \geqq n_1$ und jedes positive η:

$$\frac{m+n}{m+n+1-m\psi'(n+1)} > 1 - \eta$$

ist, so gilt mit $\alpha(n_1) = k_1$ und

$$\alpha(n_1+k) > (1-\eta)^{\theta(k)} k_1^{\frac{\psi'(n_1+k)}{\psi(n_1)}}, \quad \theta(1) = 1:$$

$$\alpha(n_1+k+1) > (1-\eta)^{1+\theta(k)\left(1-\frac{\lambda}{n_1+k}\right)} k_1^{\frac{\psi(n_1+k)}{\psi(n_1)}\left(1-\frac{\lambda}{n_1+k}\right)}$$

und

$$\theta(k+1) = 1 + \theta(k)\left(1 - \frac{\lambda}{n_1+k}\right),$$

$$\theta(k) = \frac{n_1+k}{1+\lambda} - \frac{n_1-\lambda}{1+\lambda}\cdot\frac{\psi(n_1+k)}{\psi(n_1)}.$$

Alles in allem ist

$$\alpha(n)^{\frac{1}{n}} > (1-\eta)^{\frac{1}{1+\lambda} - \frac{n_1-\lambda}{1+\lambda}\cdot\frac{\psi(n)}{\psi(n_1)}\cdot\frac{1}{n}} k_1^{\frac{\psi(n)}{\psi(n_1)}\cdot\frac{1}{n}} \tag{54}$$

und für $n \geqq N_2$, bei geeigneter Wahl von η

$$\alpha(n)^{\frac{1}{n}} > 1 - \varepsilon,$$

da der Grenzwert der rechten Seite von (54) den Wert $(1-\eta)^{\frac{1}{1+\lambda}}$ ha

Aus dem Gesagten folgt:

$$\lim \alpha(n)^{\frac{1}{n}} = 1, \quad \lim C(n) = (1+\lambda)^{\frac{1}{1+\lambda}} \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

mithin

$$\lim G_{m+n}^{\frac{1}{m+n}} = [(1+\lambda)\alpha t]^{\frac{1}{1+\lambda}}.$$

Dieser Grenzwert ist von δ unabhängig.

23. Aus dem vorstehenden folgt, daß für jeden Punkt, der nicht a der Grenze liegt, die Glieder der Reihen (37), (37′), sowie ihre Produk mit ϱ bzw. mit ϱ^2 absolut genommen kleiner auffallen als die Glied der Reihe

$$G_1 + G_2 + \ldots + G_n + \ldots,$$

konvergiert, solange

$$0 \leqq t < \frac{1}{(1+\lambda)a}$$

Hieraus folgt bereits, daß das Theorem in **14**, betreffend die Reihen), (37′), soweit es sich um Punkte handelt, die nicht auf der Grenze en, bewiesen ist. Man kann aus dem bewiesenen noch schließen, daß Summen der Reihen (37′) in allen Punkten, die nicht auf der Grenze en, Ableitungen der Reihen (37) sind.

Aus dem Bewiesenen folgt schließlich, daß

$$\left|\frac{d u_i^{(n+1)}}{dt} - \frac{d u_i^{(n)}}{dt}\right| < G_n, \qquad \left|\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial u_i^{(n+1)}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial q_i}\right| < G_n$$

Das vorhin gesagte gilt also auch für die Reihen, gebildet durch dweise Differentiation nach t.

In dem folgenden werden wir uns auf die Diskussion der Reihen), (37′) beschränken. Was die Reihen, die aus den Ableitungen nach t tehen, betrifft, so ist ihr Verhalten ganz analog.

Die Summen der Reihen (37) wollen wir mit u_i $(i = 1, 2, 3)$ bezeichnen

24. Wenn der Punkt M einem Punkte M_0 auf der Grenze hinreichend e liegt, so gilt

$$) \quad \left|u_i^{(n)} - (u_i^{(n)})\right| < \sqrt{3}\, a_0 r < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \left|\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial q_j} - \left(\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial q_j}\right)_a\right| < a_0 r_0^{1-\lambda} < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$(\varepsilon > 0)$$

ie für alle m und n:

$$\left|(u_i^{(n)} - u_i^{(m)}) - ((u_i^{(n)}) - (u_i^{(m)}))\right| < \frac{2\varepsilon}{3},$$

$$\left|\left(\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial q_i} - \frac{\partial u_i^{(m)}}{\partial q_i}\right) - \left(\left(\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial q_i}\right)_a - \left(\frac{\partial u_i^{(m)}}{\partial q_i}\right)_a\right)\right| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

raus und aus der Konvergenz der Reihen (37), (37′) im Punkte M t für alle $n \geqq N$, $m \geqq N$:

$$\left|(u_i^{(n)}) - (u_i^{(m)})\right| < \varepsilon, \qquad \left|\left(\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial q_j}\right)_a - \left(\frac{\partial u_i^{(m)}}{\partial q_j}\right)_a\right| < \varepsilon.$$

) sind die Reihen, die man aus (37), (37′) erhält, wenn man ihre der durch $(u_i^{(n)})$ und $\left(\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial q_j}\right)_a$ ersetzt, konvergent. Wenn wir die Summen er Reihen mit (u_i) und $\left(\frac{\partial u_i}{\partial q_j}\right)_a$ bezeichnen und in (55) zur Grenze $\to \infty$ übergehen, so bekommen wir:

$$\left|u_i - (u_i)\right| < \sqrt{3}\, a_0 r_0, \qquad \left|\frac{\partial u_i}{\partial q_j} - \left(\frac{\partial u_i}{\partial q_j}\right)_a\right| < a_0 r_0^{1-\lambda}.$$

Hieraus folgt, daß, wenn der Punkt M gegen den Punkt M_0 stre
u_i und $\frac{\partial u_i}{\partial q_j}$ gegen (u_i) und $\left(\frac{\partial u_i}{\partial q_j}\right)_\alpha$ streben; u_i ist in dem ganzen Raume Q stet

Geht man von den Ungleichheiten aus, die aussagen, daß $u_i^{(n)}$ regul
Funktionen von der Art (A, λ) sind, so sieht man leicht, daß die Fu
tionen u_i regulär von der Art (a_0, λ) sind.

25. Die Funktionen u_i $(i = 1, 2, 3)$ befriedigen das System der Gl
chungen (25), in welchem $u_i^{(0)}$ die Funktionen bezeichnen, die in **12** e
geführt worden sind. Um dies zu zeigen, setzen wir

$$V_i = u_i^{(0)} + \frac{1}{4\pi} \int_0^t \left(\int \frac{L(\zeta_l - x_l)}{r^3} \, d\omega \right) dt .$$

Wir wählen sodann eine Zahl $\varepsilon > 0$ und bestimmen ein N, so daß für $n \geqq$

$$G_n + G_{n+1} + \ldots < \varepsilon$$

wird. Wir erhalten so:

$$|u_i - u_i^{(n-1)}| < \varepsilon, \quad \varrho |u_i - u_i^{(n-1)}| < \varepsilon,$$

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial q_j} - \frac{\partial u_i^{(n-1)}}{\partial q_j} \right| < \varepsilon, \quad \varrho^2 \left| \frac{\partial u_i}{\partial q_j} - \frac{\partial u_i^{(n-1)}}{\partial q_j} \right| < \varepsilon$$

$$\text{für } n \geqq N.$$

Wenn wir die letzten Ungleichheiten mit den Ungleichheiten (38) in
vergleichen und uns an die Überlegungen in **15** erinnern, so finden w
daß die Ungleichheiten

$$|V_i - u_i^{(n)}| < b \int_0^t \varepsilon \, dt = b \varepsilon t,$$

die den Ungleichheiten (41) ähnlich sind und

$$V_i = \lim u_i^{(n)} = u_i \quad \text{für } n \to \infty$$

zur Folge haben, gelten.

Die soeben gefundene Lösung des Systems (25) ist in einem gewiss
Sinne die einzig mögliche. Dies besagt, daß, wenn die Funktion
W_i $(i = 1, 2, 3)$ regulär von der Art (A, λ) sind, wenn sie für $t = 0$
Werte $u_i^{(0)}$ $(i = 1, 2, 3)$ annehmen und den Gleichungen (25) genüg
daß dann

$$W_i = u_i \ (i = 1, 2, 3) \quad \text{für } 0 \leqq t \leqq t_0$$

gilt. Um sich davon zu überzeugen, genügt es, wie in **14**

$$|W_i - u_i^{(n-1)}| < G_n, \quad \varrho |W_i - u_i^{(n-1)}| < G_n,$$

$$\left| \frac{\partial W_i}{\partial q_j} - \frac{\partial u_i^{(n-1)}}{\partial q_j} \right| < G_n, \quad \varrho^2 \left| \frac{\partial W_i}{\partial q_j} - \frac{\partial u_i^{(n-1)}}{\partial q_j} \right| < G_n$$

setzen und zu beachten, daß

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^t\left(\int\frac{A(\xi_i-X_i)}{r^3}\,d\omega\right)dt-\frac{1}{4\pi}\int_0^t\left(\int\frac{L_{n-1}(\zeta_i^{(n-1)}-x_i^{(n-1)})}{r_{n-1}^3}\,d\omega\right)dt$$

$$=W_i-u_i^{(n)}$$

wo A, ξ_i, X_i sich auf die Funktionen W_i beziehen und L, ζ_i, x_i entsprechen.

Eine Wiederholung der Überlegungen in **15**—**22** wird uns zu dem Schlusse führen, daß G_{n+1} und G_n die dort erwähnten wechselseitigen Beziehungen erfüllen und daß G_n für $n\to\infty$ gegen Null konvergiert, wenn für ein gewisses a_1

$$0<t<\frac{1}{(1+\lambda)a_1}.$$

Hieraus folgt

$$W_i=\lim u_i^{(n)}=u_i \quad \text{für} \quad n\to\infty.$$

26. Aus den Gleichungen (25) folgt

$$\frac{du_i}{dt}=\frac{1}{4\pi}\int\frac{L(\zeta_i-x_i)}{r^3}\,d\omega, \qquad \frac{dx_i}{dt}=u_i.$$

Man kann, auf die Überlegungen in **3** gestützt, q_1, q_2, q_3 durch die letzten Gleichungen (25) als Funktionen von x_1, x_2, x_3 definieren. Wenn wir die x_1, x_2, x_3 als unabhängige Variable, die $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ als Integrationsvariable einführen, finden wir, wenn K wieder die Funktion (14) bezeichnet, das System der Gleichungen

$$\frac{du_i}{dt}=\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_i}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial u_i}{\partial x_2}+u_3\frac{\partial u_i}{\partial x_3}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_i}\int\frac{K\,d\zeta_1\,d\zeta_2\,d\zeta_3}{r}$$

$$(i=1,2,3).$$

Die Funktionen $\frac{du_i}{dt}$ haben Ableitungen nach q_1, q_2, q_3 in jedem Punkte, der nicht auf einer Grenze im Raume Q liegt. Hieraus folgt, daß, wenn der Punkt (x_1, x_2, x_3) nicht auf einer Grenze von Ξ liegt, diese Funktionen Ableitungen nach x_1, x_2, x_3 haben und

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{du_i}{dt}\right)=\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{du_i}{dt}\cdot\frac{\partial q_1}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial q_2}\frac{du_i}{dt}\cdot\frac{\partial q_2}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial q_3}\frac{du_i}{dt}\cdot\frac{\partial q_3}{\partial x_j}$$

ist. Unter Benutzung der Bezeichnungen in **3** können wir

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_j}=\frac{1}{J}\min\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right),$$

wo rechts die Minoren der Determinante J stehen, schreiben. Hiera
folgt, daß $\frac{\partial q_i}{\partial x_j}$ und damit auch

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial q_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial q_2}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial q_3}\cdot\frac{\partial q_3}{\partial x_j}$$

stetige Ableitung nach t haben. So ist beispielsweise

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_i}{\partial q_1}\right)\cdot\frac{\partial q_1}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_i}{\partial q_2}\right)\cdot\frac{\partial q_2}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_i}{\partial q_3}\right)\cdot\frac{\partial q_3}{\partial x_i}$$

$$+ \frac{\partial u_i}{\partial q_1}\cdot\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial q_1}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial q_2}\cdot\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial q_2}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial q_3}\cdot\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial q_3}{\partial x_i},$$

und wegen (58):

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{du_i}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) - \left\{\frac{\partial u_i}{\partial q_1}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_1}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial u_i}{\partial q_2}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_2}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial u_i}{\partial q_3}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_3}{\partial x_i}\right)\right\}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{J}\left\{\frac{\partial u_i}{\partial q_1}\cdot\frac{d}{dt}\left(\min\frac{\partial x_i}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial u_i}{\partial q_2}\cdot\frac{d}{dt}\left(\min\frac{\partial x_i}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial u_i}{\partial q_3}\cdot\frac{d}{dt}\left(\min\frac{\partial x_i}{\partial q_3}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{J^2}\cdot\frac{dJ}{dt}\left\{\frac{\partial u_i}{\partial q_1}\left(\min\frac{\partial x_i}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial u_i}{\partial q_2}\left(\min\frac{\partial x_i}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial u_i}{\partial q_3}\left(\min\frac{\partial x_i}{\partial q_3}\right)\right\}\right.$$

Wenn wir die hier angedeuteten Rechnungen vollziehen, so erhalt
wir z. B.

$$\frac{d}{dt}\left(\min\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\right) = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial x_2}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial x_3}{\partial q_3} - \frac{\partial x_2}{\partial q_3}\cdot\frac{\partial x_3}{\partial q_2}\right\} = \left(\frac{\partial u_2}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial x_3}{\partial q_3} - \frac{\partial u_2}{\partial q_3}\cdot\frac{\partial x_3}{\partial q_2}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial x_2}{\partial q_3}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial q_1} - \frac{\partial x_2}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial q_3}\right) = \left(\min\frac{\partial u_1}{\partial q_1}\right)_{(1)} + \left(\min\frac{\partial u_1}{\partial q_1}\right)_{(2)},$$

wo durch die Zeichen (1), (2), (3) die Minoren der drei Determinant
der Summe L angedeutet werden sollen.

Nachdem die Ableitungen der übrigen Minoren durch zyklische Ve
tauschung gewonnen sind, erhalten wir als Endergebnis die Formel

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{du_1}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) - \left\{\left|\frac{\partial u_1}{\partial q_1}, \frac{\partial u_2}{\partial q_2}, \frac{\partial x_3}{\partial q_3}\right| + \left|\frac{\partial u_1}{\partial q_1}, \frac{\partial x_2}{\partial q_2}, \frac{\partial u_3}{\partial q_3}\right|\right\}\cdot\frac{1}{J}$$

$$+\frac{1}{J^2}\cdot\frac{dJ}{dt}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\right)\left(\min\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_2}\right)\left(\min\frac{\partial x_1}{\partial q_2}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_3}\right)\left(\min\frac{\partial x_1}{\partial q_3}\right)\right.$$

sowie zwei andere, hierzu ähnliche Formeln.

Durch Addition erhält man für

(59) $$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{du_1}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{du_2}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{du_3}{dt}\right)$$

Wert (3)

*) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)-\frac{1}{J}\cdot L+\frac{1}{J^2}\left(\frac{dJ}{dt}\right)^2=\frac{d\theta}{dt}-K-\theta^2$$

$$\theta=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}.$$

lerseits ist aber der Ausdruck (59) gleich

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\int\frac{K\,d\zeta_1\,d\zeta_2\,d\zeta_3}{r}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\int\frac{K\,d\zeta_1\,d\zeta_2\,d\zeta_3}{r}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\int\frac{K\,d\zeta_1\,d\zeta_2\,d\zeta_3}{r}\right\}=-K.$$

ist

) $$\frac{d\theta}{dt}+\theta^2=0.$$

Machen wir jetzt die Voraussetzung, daß die Funktionen $u_i^{(0)}$ $(i=1,2,3)$ er den Bedingungen in 12 noch die weitere Bedingung

) $$\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial q_1}+\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial q_2}+\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial q_3}=0$$

llen. Dann folgt aus (60) sofort $\theta=0$.

Wenn also die Funktionen $u_i^{(0)}$ $(i=1,2,3)$ der Bedingung, regulär der Art (A_0, λ) zu sein, sowie der Bedingung (61) genügen, so bilden Funktionen u_i $(i=1,2,3)$ nebst der Funktion

) $$\Pi=\frac{1}{4\pi}\int\frac{K\,d\zeta_1\,d\zeta_2\,d\zeta_3}{r}$$

Lösung des Systems von Gleichungen

$$\frac{du_i}{dt}=\frac{\partial\Pi}{\partial x_i}\quad(i=1,2,3),\qquad\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=0,$$

. die Lösung des folgenden Problems der Hydrodynamik. Es ist die egung einer Flüssigkeit konstanter Dichtigkeit, die den ganzen Raum llt und von Kräften, die ein Potential haben, affiziert ist. zu be-mmen, wenn der Geschwindigkeitszustand im Anfangsmoment gegeben Ist ϱ die konstante Dichtigkeit und P das Potential der Kräfte, so l der Druck p durch die Formel

$$p=P-\varrho\,\Pi+C(t)$$

eben. Setzen wir

$$\omega_1=\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3},\qquad\omega_2=\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1},\qquad\omega_3=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2},$$

$$\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2=\Omega^2,$$

rhalten wir aus (14) leicht

$$K=-\left\{\sum_{j=1}^{j=3}\sum_{i=1}^{i=3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2-\Omega^2\right\}.$$

Anhang.

I. Hilfssätze über die zweiten Ableitungen des Volumpotentials.

1. Denken wir uns um einen Punkt der Grenze des Raumes Ξ Mittelpunkt eine Kugel vom Radius d_0. Wir bezeichnen mit (D) d Gebiet, das von der Grenze und der Oberfläche der Kugel auf einer stimmten Seite der Grenze begrenzt ist, und betrachten das Integral

$$P = \int \frac{d\omega}{r}, \tag{1}$$

$$d\omega = d\zeta_1\, d\zeta_2\, d\zeta_3, \qquad r = \sqrt{(\zeta_1 - x_1)^2 + (\zeta_2 - x_2)^2 + (\zeta_3 - x_3)^2},$$

wo die Integration über das Gebiet (D) erstreckt ist.

Man beweist leicht, indem man die Eigenschaften der Flächen v Liapounoff, auf die in **1** hingewiesen wurde, benutzt, daß

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_i} d\omega = -\int \frac{\cos(N x_i)}{r} d\sigma \tag{2}$$

ist, wo die Integration über den Rand von (D) erstreckt ist und wo die äußere Normale bedeutet.

Wenn der Punkt $M(x_1, x_2, x_3)$ nicht auf dem Rande von (D) lie so ist weiter

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} = -\int \frac{\cos(N x_i)\cos(r x_i)}{r^2} d\sigma, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_i\, \partial x_j} = -\int \frac{\cos(N x_i)\cos(r x_j)}{r^2} d\sigma = -\int \frac{\cos(N x_j)\cos(r x_i)}{r^2} d\sigma.$$

Es ist dabei nicht zulässig, unter den Integralzeichen die Koordinat von M durch Koordinaten eines Punktes M_0 auf dem Rande zu ersetz in der Annahme, hierdurch die Werte $\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}, \ldots$ im Punkte M_0 zu erhalt

Führen wir jetzt die auf folgende Weise definierten Größen

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\right), \qquad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_i\, \partial x_j}\right) \tag{4}$$

ein, die wir als Ableitungen von P in M_0 bezeichnen wollen, und die v den Zahlen

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\right)_1, \qquad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_i\, \partial x_j}\right)_1, \tag{5}$$

den Grenzwerten von (3) für $M \to M_0$, im allgemeinen verschieden si

Setzen wir den Anfangspunkt des Koordinatensystems in M_0 hinein wählen wir die Normale in M_0 zur Achse X_3^0; setzen wir ferner

$$\cos(X_i^0, X_j^{(0)}) = a_{i,j}.$$

finden

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} P}{\partial x_1^{\alpha} \partial x_2^{\beta} \partial x_3^{\gamma}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1^{(0)}} a_{11} + \frac{\partial}{\partial x_2^{(0)}} a_{12} + \frac{\partial}{\partial x_3^{(0)}} a_{13}\right)^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x_1^{(0)}} a_{21} + \frac{\partial}{\partial x_2^{(0)}} a_{22} + \frac{\partial}{\partial x_3^{(0)}} a_{23}\right)^{\beta}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1^{(0)}} a_{31} + \frac{\partial}{\partial x_2^{(0)}} a_{32} + \frac{\partial}{\partial x_3^{(0)}} a_{33}\right)^{\gamma} P.$$

Betrachten wir jetzt die Werte

$$\left(\frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial (x_i^{(0)})^2}\right) = -\int \frac{\cos(N x_i^{(0)}) \cos(r_0 x_i^{(0)})}{r_0^2} d\sigma,$$

$$\left(\frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial x_i^0 \partial x_j^0}\right) = -\int \frac{\cos(N x_i^{(0)}) \cos(r_0 x_j^{(0)})}{r_0^2} d\sigma, \qquad (i<j)$$

Es ist nicht schwer sich zu überzeugen, daß die Integrale (7) konvergent sind; es genügt zu bemerken, daß den Eigenschaften der Flächen Liapounoff zufolge

$$|\cos(N x_i^{(0)})| < H r_0^{1-\lambda} \qquad (i = 1, 2)$$

und daß, unter

$$\zeta_3 = \varphi(\zeta_1, \zeta_2)$$

Gleichung der Fläche im Inneren von (D), unter ϱ die Projektion r_0 auf die Ebene $X_1^0 X_2^0$ verstanden,

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_i}\right| < 2 H r_0^{1-\lambda} \qquad (i = 1, 2),$$

$$|\zeta_3| = |\varphi(\zeta_1, \zeta_2) - \varphi(0, 0)| < 2\sqrt{2} H r_0^{1-\lambda} \varrho,$$

darum, wie sich leicht zeigen läßt,

$$|\cos(r_0, N^0)| < \frac{2\sqrt{2} H \varrho}{r_0}$$

Es ist ferner leicht sich zu überzeugen, daß die Identität

$$\left(\frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial x_1^{(0)} \partial x_2^{(0)}}\right) = -\int \frac{\cos(N x_1^{(0)}) \cos(r_0 x_2^{(0)})}{r_0^2} d\sigma = -\int \frac{\cos(N x_2^{(0)}) \cos(r_0 x_1^{(0)})}{r_0^2} d\sigma$$

hat.

Beschreiben wir jetzt um den Punkt M_0 als Mittelpunkt in der gentialebene einen Kreis, konstruieren wir über diesem Kreise einen nder, dessen Erzeugende zu der Normale $N^{(0)}$ parallel sind, und ent-

fernen wir schließlich aus der Grenze dasjenige Flächenstück, das du den Zylinder ausgeschnitten wird, heraus. Wir bekommen, indem wir Integration über den Rest der Fläche erstrecken,

$$\int \frac{\cos(N x_i^{(0)}) \cos(r_0 N^{(0)})}{r_0^2} d\sigma = \int \frac{\cos(N N^{(0)}) \cos(r_0 x_i^{(0)})}{r_0^2} d\sigma + (-1)^i \int \frac{\cos(s x_j)}{r_0}$$

$$(i = 1, 2;\ j \neq i,\ j \leqq 2).$$

Das Theorem von Stokes ist nämlich auf die Flächen von Liapoun anwendbar [13]).

Setzen wir jetzt in (6) für

$$\frac{\partial^2 P}{\partial (x_i^{(0)})^2}, \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^{(0)} \partial x_j^{(0)}}$$

die Größen (7) ein, so erhalten wir die Werte (4) im Punkte M_0:

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\right)^{(0)}, \qquad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j}\right)^{(0)}. \tag{9}$$

Um die Werte (4) im Punkte M_1 auf der Grenze

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\right)^{(1)}, \qquad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j}\right)^{(1)} \tag{9'}$$

mit Hilfe der Zahlen

$$\left(\frac{\partial^2 P}{(\partial x_i')^2}\right), \qquad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_i' \partial x_j'}\right) \tag{7'}$$

auszurechnen, kann man, anstatt die Formeln (6) direkt auf (7') zuwenden, zuerst zu den Koordinatenachsen in M_0 übergehen und

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^{(0)2}}\right)^{(1)}, \qquad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^{(0)} \partial x_j^{(0)}}\right)^{(1)} \tag{9''}$$

bestimmen und dann erst die Formeln (6) anwenden. Will man d Stetigkeitscharakter der Größen (4) studieren, so kann man sich mit d Vergleich der Ausdrücke (7) und (9″) begnügen. Der Einfachheit halb werden wir dabei das Zeichen $^{(0)}$ nicht mehr schreiben.

Wir werden beweisen, indem wir mit δ den Abstand der Punkte und M_0 bezeichnen, daß die Differenz der zusammengehörigen Ausdrüc (7) und (9″) absolut genommen kleiner als $a\delta^{1-\lambda}$ ist. Die Koordinat von M_1 in bezug auf die Achsen in M_0 wollen wir mit $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, bezeichnen.

2. Beschreiben wir um $N^{(0)}$ einen Zylinder, dessen Basis ein Kr vom Radius 2δ mit dem Mittelpunkt in M_0 ist. Wenn wir mit (σ_0) d

[13]) Vgl. N. M. Günther, loc. cit. [4]) § 7.

chenstück bezeichnen, das aus der Grenze durch den Zylinder aus-chnitten wird, so sind die Integrale (7), (7′), erstreckt über (σ_0), gewiß olut genommen kleiner als eine Zahl von der Form $a\delta^{1-\lambda}$.

Es genügt, um dies zu zeigen, die Formeln (8) und (8′) sowie die teren hierzu analogen Formeln, u. a. die Formel

$$|\zeta_3 - \varphi(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})| < 2\,1\,2\,H r_1^{1-\lambda} \varrho_1,$$

welcher r_1 den Abstand des Punktes M_1 von einem variablen Punkte, seine Projektion auf die Ebene $X_1 X_2$ bezeichnet, zu benutzen.

3. Indem wir jetzt die Integrale (7) und (9′) über das Flächenstück, außerhalb von (σ_0) gelegen ist, erstrecken und zu der Abschätzung der ferenzen übergehen, bemerken wir vor allem, daß, wenn wir in den enden Teilen der Summen (6) für (9″)

$$a_{11}a_{12}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_1' \partial x_2'}\right) + a_{11}a_{13}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_1' \partial x_3'}\right) + a_{12}a_{13}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_2' \partial x_3'}\right)$$

$$a_{12}a_{21}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_1' \partial x_2'}\right) + a_{13}a_{21}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_1' \partial x_3'}\right) + a_{13}a_{22}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_2' \partial x_3'}\right)$$

$$a_{12}a_{31}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_1' \partial x_2'}\right) + a_{13}a_{31}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_1' \partial x_3'}\right) + a_{13}a_{32}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_2' \partial x_3'}\right)$$

$$a_{31}a_{32}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_1' \partial x_2'}\right) + a_{31}a_{33}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_1' \partial x_3'}\right) + a_{32}a_{33}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_2' \partial x_3'}\right)$$

Integrale

$$\int \frac{\cos(N x_1')\cos(r_1 x_2')}{r_1^2}\,d\sigma \quad \text{durch} \quad \int \frac{\cos(N x_2')\cos(r_1 x_1')}{r_1^2}\,d\sigma,$$

Integrale

$$\int \frac{\cos(N x_i')\cos(r_1 N^{(1)})}{r_1^2}\,d\sigma \qquad (i = 1, 2)$$

ch

$$\int \frac{\cos(N N^{(1)})\cos(r_1 x_i')}{r_1^2}\,d\sigma + (-1)^i \int \frac{\cos(s x_j')}{r_1}\,ds \qquad (j \neq i,\ j \leqq 2)$$

tzen, wir u. a. entsprechend die Summen

$$a_{13}\left\{-a_{11}\int \frac{\cos(s x_2')}{r_1}\,ds + a_{12}\int \frac{\cos(s x_1')}{r_1}\,ds\right\},$$

$$a_{13}\left\{-a_{21}\int \frac{\cos(s x_2')}{r_1}\,ds + a_{22}\int \frac{\cos(s x_1')}{r_1}\,ds\right\},$$

$$a_{13}\left\{-a_{31}\int \frac{\cos(s x_2')}{r_1}\,ds + a_{32}\int \frac{\cos(s x_1')}{r_1}\,ds\right\},$$

$$a_{33}\left\{-a_{31}\int \frac{\cos(s x_2')}{r_1}\,ds + a_{32}\int \frac{\cos(s x_1')}{r_1}\,ds\right\},$$

mit

$$|a_{13}| = |\cos(N_1 X_1)| < H\delta^{1-\lambda}, \qquad |a_{31}| = |\cos(N^{(0)} X_1)| < H\delta^{1-\lambda},$$
$$|a_{32}| = |\cos(N^{(0)} X_2| < H\delta^{1-\lambda}$$

hinzufügen müssen. Da die Integrale, die über die Linie (S) erstrec sind, beschränkt sind, so haben die Summen (10) die Gestalt $a\delta^{1-\lambda}$.

Die Ausdrücke, die zurückbleiben, wenn man von (10) absieht, si gleich den Integralen

$$\int \frac{\cos(Nx_i)\cos(r_1 x_i)}{r_1^3}\, d\sigma, \qquad \int \frac{\cos(Nx_i)\cos(r_1 x_j)}{r_1^2}\, ds. \qquad (i <$$

Der Symmetrie der Formeln wegen genügt es sich mit den Differenz

$$(11)\quad \begin{aligned} &\int \cos(Nx_1)\left\{\frac{\cos(r_0 x_1)}{r_0^2} - \frac{\cos(r_1 x_1)}{r_1^2}\right\} d\sigma, \\ &\int \cos(Nx_1)\left\{\frac{\cos(r_0 x_2)}{r_0^3} - \frac{\cos(r_1 x_2)}{r_1^2}\right\} d\sigma, \\ &\int \cos(Nx_1)\left\{\frac{\cos(r_0 N^{(0)})}{r_0^3} - \frac{\cos(r_1 N^{(0)})}{r_1^2}\right\} d\sigma, \\ &\int \cos(NN^{(0)})\left\{\frac{\cos(r_0 N^{(0)})}{r_0^3} - \frac{\cos(r_1 N^{(0)})}{r_1^2}\right\} d\sigma \end{aligned}$$

zu beschäftigen.

4. Wenn wir zuerst die Integration nur über die Grenze erstrecke erhalten wir

$$(12)\quad \int \cos(Nx_1)\left\{\frac{\cos(r_0 x_1)}{r_0^2} - \frac{\cos(r_1 x_1)}{r_1^2}\right\} d\sigma$$
$$= \int \cos(Nx_1)\left\{\frac{\cos(r_0 x_1) - \cos(r_1 x_1)}{r_0^3}\right\} d\sigma + \int \cos(Nx_1)\cos(r_1 x_1)\left\{\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r_1^2}\right\}$$

sowie analoge Formeln für die beiden anderen Integrale. Wegen

$$r_0 - \delta < r_1 < r_0 + \delta, \qquad r_0 > 2\delta, \qquad \frac{1}{2} < \frac{r_1}{r_0} < \frac{3}{2},$$

$$|\cos(r_0 x_1) - \cos(r_1 x_1)| = \left|\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)_{M_0} - \left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)_{M_1}\right| \leq \frac{2\sqrt{2}\delta}{r'} < \frac{4\sqrt{2}\delta}{r_0},$$

wo r' den Abstand zwischen dem variablen Punkt und einem bestimmt Punkte M' zwischen M_0 und M_1 bezeichnet $(r' > r_0 - \delta)$, sind die erst Integrale (12) rechts absolut genommen kleiner als eine Zahl von der Fo

$$(13)\quad a\delta\left\{\frac{1}{(2\delta)^\lambda} - \frac{1}{(2d_0)^\lambda}\right\} < a'\delta^{1-\lambda}.$$

Zu dem gleichen Schluß gelangen wir bei dem zweiten Summanden (12), wenn wir beachten, daß

$$\left|\frac{1}{r_0^3}-\frac{1}{r_1^3}\right|<\frac{a\delta}{r_0^4}$$

Geben wir der letzten Differenz (11) die Form

$$\int\cos(NN^{(0)})\cos(r_0N^{(0)})\left\{\frac{1}{r_0^3}-\frac{1}{r_1^3}\right\}d\sigma + \int\frac{\cos(NN^{(0)})\{\cos(r_0N^{(0)})-\cos(r_1N^{(0)})\}}{r_1^3}d\sigma, \tag{12'}$$

finden wir leicht, daß der erste Term in (12′) die Gestalt (13) hat. weiter

$$\cos(r_0N^{(0)})-\cos(r_1N^{(0)})=\frac{\zeta_3}{r_0}\,\frac{\zeta_3-x_3^{(0)}}{r_1}$$

$$=\frac{\zeta_3}{r_0}\,\frac{r_1-r_0}{r_1}+\frac{x_3^{(1)}}{r_1}<\frac{2\sqrt{2}H\varrho}{r_0^\lambda}\,\frac{2\delta}{r_0}+\frac{4\sqrt{2}H\delta^{1-\lambda}\delta_0}{r_0}<\frac{a\delta}{\varrho^\lambda}+\frac{b\delta^{2-\lambda}}{\varrho}$$

wo δ_0 die Projektion von δ auf die Tangentialebene in M_0 bezeichnet, können wir behaupten, daß unsere Behauptung auch für das zweite egral gilt. Die Abschätzung der Differenzen, wenn die Integrale über Begrenzung der Kugel erstreckt sind, lehrt, daß sie von der Gestalt $a\delta$; wir setzen dabei $\delta<\frac{d_0}{2}$ voraus.

5. Es möge jetzt der Punkt M_1 auf der Normalen in M_0 gelegen ; es sei δ der Abstand M_0M_1. Wir wollen die Differenzen zwischen und den entsprechenden Ableitungen von P in M studieren.

Der Symmetrie wegen können wir uns mit dem Vergleich der Integrale

$$-\int\frac{\cos(Nx_i)\cos(Nx_l)}{r^2}d\sigma\ (i=1,2,3),\qquad -\int\frac{\cos(NN^{(0)})\cos(rN^{(0)})}{r^3}d\sigma$$

den ihnen entsprechenden Integralen begnügen.

Die drei ersten Integrale, erstreckt über (σ_0), sind von der Gestalt $^{-\lambda}$. Über den Rest der Grenze erstreckt, sind die gesuchten Differenzen die beiden ersten Integrale gleich

$$s(Nx_i)\,\mu\left\{\frac{1}{r_0^3}-\frac{1}{r^3}\right\}d\sigma\quad\text{mit}\quad\mu=\zeta_1=\varrho\cos\varphi\ \text{ bzw. }\ \mu=\zeta_2=\varrho\sin\varphi.$$

gen

$$\frac{1}{2}<\frac{r}{r_0}<\frac{3}{2},\qquad\frac{1}{r_0^3}-\frac{1}{r^3}<\frac{a\delta}{r_0^4}$$

t man leicht, daß sie die Gestalt (13) haben.

Auch die Differenz der dritten Integrale:

$$-\int\cos(Nx_1)\,\zeta_3\left\{\frac{1}{r_0^3}-\frac{1}{r^3}\right\}d\sigma$$

hat die gesuchte Gestalt. Bei der Abschätzung der letzten Differenz

$$(15) \qquad \int \cos(NN_0)\left\{\frac{\cos(r_0 N^{(0)})}{r_0^2} - \frac{\cos(rN^{(0)})}{r^2}\right\} d\sigma$$

kann man die Rechnungen von Herrn J. Hadamard[14]) benutzen, we man a. a. O. ϱ durch $\cos(NN^{(0)})$ ersetzt und λ als von Null verschied ansieht. Man findet, daß diese Differenz sich um einen Wert von d Form (13) von

$$-\int \frac{\cos(r_0 N)}{r_0^2} d\sigma + \int \frac{\cos(rN)}{r^2} d\sigma = 2\pi\varepsilon$$

unterscheidet, wo $\varepsilon = +1$ ist, wenn M_1 auf der positiven Seite der N male liegt.

Die Abschätzung der übrigen Teile der betrachteten Differenzen gil wenn $\delta < \frac{d_0}{2}$ gesetzt wird, eine Schranke $a\delta$.

6. Es möge jetzt der Punkt M_1 weder auf der Grenze noch auf ein Normalen an die Grenze in M_0 liegen. Wir beschreiben um ihn eine Kug vom Radius δ. — Mitten in der Kugel wird sich ein Punkt M_2 auf d Grenze finden, der dem Punkte M_1 am nächsten liegt. Sind δ_1 und die Entfernungen des Punktes M_2 von M_1 und M_0, so gilt

$$\delta_1 < \delta, \quad \delta_0 < 2\delta.$$

Wir setzen übrigens $\delta < \frac{d_0}{2}$ voraus. Handelt es sich nicht etwa um d Ableitung $P'' = \frac{\partial^2 P}{\partial x_3^2}$, so ist

$$|(P''_{M_0}) - P''_{M_1}| = |((P''_{M_0}) - (P''_{M_2})) + ((P''_{M_2}) - P''_{M_1})|$$
$$< a'\delta_0^{1-\lambda} + a''\delta_1^{1-\lambda} < a\delta^{1-\lambda}.$$

Für $P'' = \frac{\partial^2 P}{\partial x_3^2}$ gilt dagegen

$$|((P''_{M_0}) + 2\pi\varepsilon) - P''_{M_1}| = |((P''_{M_0}) - (P''_{M_2})) + ((P''_{M_2}) + 2\pi\varepsilon) - P''_{M_1}|$$
$$< a\delta^{1-\lambda}.$$

7. Aus dem Gesagten geht klar hervor, daß alle zweiten Ableitung von P bestimmte Grenzwerte haben, wenn M sich dem Punkte M_0 d Grenze auf einem Wege, dessen Punkte alle auf einer und derselben Se der Grenze liegen, nähert.

Wenn der Abstand des Punktes M von M_0 gleich δ ist, so ist d Unterschied zwischen der Ableitung in M und ihrem Grenzwerte absol genommen kleiner als eine Zahl von der Form $a\delta^{1-\lambda}$. Man erhält d

[14]) Vgl. J. Hadamard, Leçons sur la propagation des ondes, S. 20–22.

nzwert, wenn man in (6) an die Stelle der $\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^{(0)} \partial x_j^{(0)}}$ $(i < 3,\ j \leqq 3)$ $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^{(0)} \partial x_j^{(0)}}\right)$ und an Stelle von $\frac{\partial^2 P}{\partial x_3^{(0)\,2}}$ die Summe $2\pi\varepsilon + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_3^{(0)\,2}}\right)$ t. Alle Voraussetzungen sind erfüllt, wenn M sich auf einer Geraden egt, die die Grenze nicht berührt.

Eine Ausnahme kann nur eintreten, wenn M sich auf einer Tangente M_0 bewegt, wenn dabei M_0 ein Häufungspunkt der Schnittpunkte der nze und der Tangente ist.

8. Es seien jetzt zwei Punkte M_1, M_2, deren Abstand δ beträgt, eben. Wir nehmen an, daß M_1 auf der Normale zu der Grenze im kte M_0 liegt und daß der Abstand $M_0 M_1$ den Wert δ_1 hat. Es sei ter $\delta < \frac{d_0}{8}$, $\delta_1 < \frac{d_0}{3}$. Wir werden zeigen, daß die Differenz zwischen zweiten Ableitungen von P in M_1 und M_2 absolut genommen kleiner eine Zahl von der Form $a\delta^{1-\lambda}$ ist.

Ist $\delta_1 < 3\delta$, so ist $\delta_1 < \frac{d_0}{2}$, $\delta_2 < \frac{d_0}{2}$ ($\delta_2 =$ Abstand $M_2 M_0$). Nach 6 nen wir

$$|P''_{M_1} - P''_{M_2}| \leqq |P''_{M_1} - \lim_{M_1 \to M_0} P''| + |\lim_{M_1 \to M_0} P'' - P''_{M_2}| \,.$$

$$< a'\delta_1^{1-\lambda} + a''\delta_2^{1-\lambda} < a\delta^{1-\lambda}$$

reiben. Setzen wir jetzt also $\delta_1 > 3\delta$ voraus. Man beweist den Satz, em man die Überlegungen der vorhergehenden Paragraphen in gering- iger Weise ändert.

Wir beginnen mit den folgenden Bemerkungen: Ist γ derjenige Winkel Dreiecks $M^0 M_2 M_1$, der δ gegenüberliegt, so gilt

$$\frac{\delta}{\delta_1} = \frac{\sin\gamma}{\sin\eta}, \qquad \sin\gamma = \frac{\delta}{\delta_1}\sin\eta < \frac{1}{2}, \qquad \gamma < \frac{\pi}{6},$$

er α den Winkel zwischen δ_2 und r_0, unter β den Winkel zwischen r_0 seiner Projektion auf die Tangentialebene in M_0 verstanden. Offen- ist

$$\alpha + \beta + \gamma \geqq \frac{\pi}{2}; \qquad \alpha > \frac{\pi}{3} - \beta > \frac{\pi}{3} - \omega' \quad \text{und} \quad \sin\alpha > k,$$

nn α ein spitzer Winkel ist, da β, als der Winkel zwischen einer Sehne der Tagentialebene, gewiß kleiner als $\frac{\pi}{2} - \omega = \omega'$ ist, unter ω den 1 eingeführten Winkel verstehend.

Sind ferner r_0, r_1, r_2 die Entfernungen des Punktes M von M_0, M_1, M_2, ist

$$\frac{r_2}{r_0} = \frac{\sin\alpha}{\sin\varepsilon}, \qquad r_2 = \frac{r_0 \sin\alpha}{\sin\varepsilon}, \qquad \frac{1}{r_2^3} < \frac{1}{r_0^3 \sin^2\alpha}.$$

Ist α spitz, so ist $\frac{1}{r_2^2} < \frac{1}{k^2 r_0^2}$. Ist aber α stumpf, so ist gewiß $\frac{1}{r_2^2} <$
In allen Fällen ist also

$$\frac{1}{r_2^2} < \frac{1}{k^2 r_0^2}.$$

Des weiteren ist

$$r_1 - \delta < r_2 < r_1 + \delta, \quad \frac{r_1}{\delta_1} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'}, \quad \frac{r_1}{\delta_1} > \sin \alpha' > \sin \omega > k,$$

wo α' der r_1 gegenüberliegende Winkel in dem Dreieck mit den Seiten r_1, also ein Winkel zwischen einer Sehne und der Normale ist. Infolgedessen

$$\frac{r_2}{r_1} < 1 + \frac{1}{3k}, \quad \frac{r_2}{r_1} > 1 - \frac{1}{3k}.$$

9. Aus Gründen der Symmetrie genügt es, die Integrale

$$(16) \quad \int \cos(Nx_1)\left\{\frac{s}{r_1^3} - \frac{t}{r_2^3}\right\} d\sigma, \quad -\int \cos(NN^{(0)})\left\{\frac{\cos(r_1 N^{(0)})}{r_1^2} - \frac{\cos(r_2 N^{(0)})}{r_2^2}\right\} d$$

in welchen, wenn $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$, $x_3^{(2)}$ die Koordinaten von M_2 bezeichnen u

$s = \zeta_1$, $t = \zeta_1 - x_1^{(2)}$, oder $s = \zeta_2$, $t = \zeta_2 - x_2^{(2)}$, oder $s = \zeta_3 - \delta_1$, $t = \zeta_3 -$

zu setzen ist, zu studieren. Wenn wir alle fraglichen Integrale über ($
erstrecken, finden wir, daß sie eine Schranke von der Form $a\delta^{1-\lambda}$ habe

In der Tat, wenn wir zunächst die beiden ersten Differenzen in der For

$$\int \cos(Nx_1)\mu\left\{\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right\} d\sigma + \int \cos(Nx_1)\frac{\nu}{r_2^3} d\sigma, \quad \begin{matrix}\mu = \varrho\cos\varphi \\ \nu = x_1^{(2)}\end{matrix} \text{ oder } \begin{matrix}\mu = \varrho\,co \\ \nu = x_1^{(2)}\end{matrix}$$

schreiben und bemerken, daß

$$\left|\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right| < a\frac{\delta}{r_1^4}$$

ist, so finden wir leicht, daß jeder Term der vorstehenden Summe absol genommen kleiner als eine Zahl von der Form (13) ist.

Die dritte Differenz ist gleich

$$\int \cos(Nx_1)\zeta_3\left\{\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right\} d\sigma + \int \cos(Nx_1)\left\{\frac{x_3^{(2)}}{r_2^3} - \frac{\delta_1}{r_1^3}\right\} d\sigma;$$

das erste Integral ist, wie auch das ihm entsprechende in 5 von d Form (13). Dem zweiten Integral geben wir die Gestalt

$$\int \cos(Nx_1)\frac{x_3^{(2)} - \delta_1}{r_2^3} d\sigma + \int \cos(Nx_1)\delta_1\left\{\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3}\right\} d\sigma$$

und finden, indem wir bemerken, daß

$$|x_3^{(2)} - \delta_1| < \delta, \quad \frac{\delta_1}{r_1} < \frac{1}{k}$$

ist, daß auch dieses die Form (13) hat.

Geben wir schließlich, Herrn Hadamard folgend, dem letzten Inte-
(16) die Form:

$$P^{(0)} = P_1^{(0)} + P_2^{(0)} + P_3^{(0)}$$

$$= -\int \frac{\cos(r_1 N)}{r_1^2} d\sigma + \int \frac{\cos(r_2 N)}{r_2^2} d\sigma = \varepsilon(4\pi - 4\pi) = 0,$$

$$P_2 = \int (1 - \cos(NN^{(0)})) \left\{ \frac{\cos(r_1 N)}{r_1^2} - \frac{\cos(r_2 N)}{r_2^2} \right\} d\sigma,$$

$$= \int \cos(NN^{(0)}) \left\{ \frac{\cos(r_1 N) - \cos(r_1 N^{(0)})}{r_1^2} - \frac{\cos(r_2 N) - \cos(r_2 N^{(0)})}{r_2^2} \right\} d\sigma$$

erstrecken alle Integrale zuerst über (σ_0), so sehen wir, daß wir aber-
s Werte von der Form $a\delta^{1-\lambda}$ erhalten.

Erstrecken wir dann aber P_2 über den Rest der Grenze und beach-
wir, daß

$$|\cos(r_1 N) - \cos(r_2 N)| < 2 \sin \frac{r_1 r_2}{2} < \frac{\delta}{r_1}, \qquad \sin(r_1 r_2) = \frac{\delta}{r_1} \sin\alpha,$$

$$\frac{\cos(r_1 N)}{r_1^2} - \frac{\cos(r_2 N)}{r_2^2} = \cos(r_1 N) \left\{ \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right\} + \frac{1}{r_2^2} \{\cos(r_1 N) - \cos(r_2 N)\}$$

so finden wir wieder, daß es von der Form (13) ist.

Das Integral $P_3^{(0)}$ über den Rest der Grenze erstreckt, wird, wie das
entsprechende in 5, mit Hilfe einer Identität, die der von Herrn
damard[15]) benutzten analog ist, abgeschätzt.

II. Untersuchung eines Integrals.

10. Dieser Teil des Anhangs ist der Untersuchung des Integrals

$$U_i = \int \frac{L(\zeta_i - x_i)}{r^3} d\omega,$$

in 12 eingeführt und dort $U_i^{(n)}$ hieß, gewidmet; L, x_i, ζ_i, r bedeuten
ßen, die wir in 12 mit $L_n, x_i^{(n)}, \zeta_i^{(n)}, r_n$ bezeichnet hatten. Wir werden
en, daß U_i alle Bedingungen, die in 12 bezüglich $U_i^{(n)}$ gestellt waren
die es zu einer regulären Funktion von der Art (aN, λ) machen, erfüllt.

11. Ist r_0 der Abstand der Punkte (q_1, q_2, q_3) und (p_1, p_2, p_3), so ist

$$r_0(1 - 3B) < r < r_0(1 + 3B) \quad \text{sowie} \quad \frac{r_0^2}{r^2} < a.$$

lgedessen ist U_i absolut genommen kleiner als

$$a \int \frac{|L|\, d\omega}{r_0^2}.$$

---

[15]) Loc. cit. [14]) S. 22.

Die Konvergenz dieses Integrals steht außer Zweifel. Erstreckt man nämlich auf das Gebiet zwischen den Kugeln vom Radius R_0 und mit dem Mittelpunkt im Punkte $(0, 0, 0)$, so findet man einen We kleiner als

$$aN\int_{R_0}^{R}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{\varrho^2}\cdot\frac{\sin\theta\, d\varrho\, d\theta\, d\varphi}{r_0^2} < 2a\pi N\frac{1}{R_0^3},$$

falls $M(q_1, q_2, q_3)$ mitten in der Kugel R_0 liegt; ist aber ϱ_0, die Ent fernung des Punktes M vom Punkte $(0, 0, 0)$, größer als R_0, so findet man einen Wert kleiner als

$$\frac{2\pi aN}{\varrho_0}\int_{R_1}^{\varrho_0}\frac{1}{\varrho^3}\log\frac{\varrho+\varrho_0}{\varrho_0-\varrho}d\varrho+\frac{2\pi aN}{\varrho_0}\int_{\varrho_0}^{R}\frac{1}{\varrho^3}\log\frac{\varrho+\varrho_0}{\varrho-\varrho_0}d\varrho < \frac{4\pi aN}{R_0\varrho_0^2}+\frac{2\pi aN}{\varrho_0^3} < \frac{6\pi aN}{R_0\varrho_0^2}.$$

Bei diesen Abschätzungen haben wir nur die Eigenschaft (I) der Funktion L benutzt.

Wenn wir den Wert des Integrals (17) in den Punkten M und M' deren Abstand δ ist, berechnen und hierbei die Integration zuerst auf eine um den Punkt M beschriebene Kugel vom Radius 2δ, dann auf das Gebiet zwischen dieser Kugel und der zu ihr konzentrischen Kugel vom Radius D, endlich auf das Gebiet außerhalb der letzteren Kugel erstrecken, überzeugen wir uns leicht, daß die Differenz der zusammengehörigen Integrale entsprechend von der Form $a'\delta\cdot N$, $a\delta\log\delta N$, $a\delta N$ ist. Hieraus folgt, daß U_i eine stetige Funktion des Punktes M ist.

Wenn wir t den Wert t' erteilen und die Werte der Funktionen für $t=t'$ mit dem Zeichen $(')$ versehen, finden wir sogleich

$$U_i'-U_i=\int(L'-L)\frac{\zeta_i'-x_i'}{r'^3}d\omega+\int L\left\{\frac{\zeta_i'-x_i'}{r'^3}-\frac{\zeta_i-x_i}{r^3}\right\}d\omega.$$

Ist t' hinreichend wenig von t verschieden, so finden wir für den absoluten Betrag des ersten Termes rechts, indem wir die Existenz der Ableitungen von L nach t in jedem Punkte, der nicht auf der Grenze liegt, beachten, eine Schranke von der Form $aN^{(1)}|t'-t|$, da ja die Ableitung von nach t der Bedingung (I) genügt.

Es ist ferner

$$|(\zeta_i'-x_i')-(\zeta_i-x_i)| = \left|\int_t^{t'}(u_i(p_1, p_2, p_3, \tau)-u_i(q_1, q_2, q_3, \tau))\,d\tau\right|$$

$$< |\overline{3}\, r_0 b'|t-t'|.$$

Betrachten wir die Differenz unter dem zweiten Integralzeichen als Differenz der Werte von $\frac{\partial}{\partial \zeta_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\zeta_1^2+\zeta_2^2+\zeta_3^2}}$ in zwei verschiedenen Punkten, finden wir für sie eine Schranke von der Gestalt

$$b' |t'-t| \frac{r_0}{(r_1')^3} < a' |t'-t| \frac{1}{r_0^3},$$

r_1' den Wert von r in einem gewissen Punkte ist, und die den Ungleichheiten, die zu den Ungleichheiten (18) analog sind, genügt.

Alles dieses zeigt, daß für das zweite Integral eine Schranke von der Form $a|t-t'|N^{(1)}$ besteht und daß U_i eine stetige Funktion von t in jedem Punkte, der nicht auf der Grenze liegt, ist.

12. Um die Existenz der Ableitungen von U_i zu beweisen, bemerken wir, daß es genügt, da die Existenz der Ableitungen von x_1, x_2, x_3 nach q_2, q_3 außer Zweifel steht, die Existenz der Ableitungen von U_i nach x_2, x_3 zu zeigen. Wir wählen $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ zu Integrationsvariablen und schreiben für (17)

$$\int \frac{K(\zeta_i - x_i)}{r^3} d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3,$$

wo K die Funktion (14) in **5** bezeichnet. Es ist leicht, sich zu überzeugen, daß K den drei Bedingungen, die den Bedingungen (I), (II), (III) für L entsprechen, genügt; man muß nur dabei für N diesmal aN, wo a eine gewisse Zahl ist, setzen und die Ungleichheiten, in denen $\frac{dL}{dt}$ vorkommt, fortlassen.

Bei dem Beweise der Existenz der Ableitungen im Punkte $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$, der nicht auf der Grenze liegt, können wir, der Symmetrie halber, uns mit der Voraussetzung $i=1$ und einer Differentiation nach x_1, x_2 begnügen.

Es möge der Abstand des Punktes M_0 von der Grenze gleich 2δ sein. Teilen wir der Variablen x_1 einen Zuwachs h mit

$$2|h| < \delta$$

und beschreiben wir um M_0 zwei Kugeln mit den Radien 2δ und $2|h|$. Wir setzen ferner $U = U' + U''$, wobei in U'' die Integration sich über die Kugel 2δ, in U'' über den Restraum erstreckt. Es ist leicht zu sehen, daß das Integral

$$\left(\frac{\partial U''}{\partial x_1}\right)_0 = K \int \left\{ \frac{3(\zeta_1 - x_1^{(0)})^2}{r_0^5} - \frac{1}{r_0^3} \right\} d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3$$

konvergiert. Erstreckt man es nämlich zwischen den Kugeln mit Radien R_0 und R, so findet man, daß es absolut genommen kleiner $\frac{aN}{\delta^3}\left(\frac{1}{R_0}-\frac{1}{R}\right)$ ist. Es ist ferner klar, daß

$$\left|\frac{U''(x_1^{(0)}+h)-U''(x_1^{(0)})}{h}-\left(\frac{\partial U''}{\partial x_1}\right)_0\right|<\frac{h}{2}\int|K|\,\frac{24}{\delta^4}\,d\zeta_1\,d\zeta_2\,d\zeta_3$$

ist. Hieraus folgt, daß U'' das Integral (19) zur Ableitung hat.

Wir gehen jetzt zu U' über, bezeichnen mit K_0 den Wert von in M_0 und setzen

$$U'=K_0\int_{(2\delta)}\frac{\zeta_1-x_1^{(0)}}{r_0^3}\,d\zeta_1\,d\zeta_2\,d\zeta_3+\int_{(2\delta)}(K-K_0)\frac{\zeta_1-x_1^{(0)}}{r_0^3}\,d\zeta_1\,d\zeta_2\,d\zeta_3=U_1'+$$

U_1' ist die Ableitung eines Raumpotentials mit der Dichtigkeit K_0 nach Deshalb ist

$$\frac{\partial U_1'}{\partial x_1}=-\frac{4\pi}{3}K_0,\qquad\frac{\partial U_1'}{\partial x_2}=0.$$

Setzen wir weiter $U_2'=U_3+U_4$, wo in U_4 die Integration über die Ku $2|h|$ erstreckt ist. Jedes der Integrale $U_4(x_1^{(0)}+h)$, $U_4(x_1^{(0)})$ liegt abso genommen unterhalb einer Schranke von der Form $aN|h|^{2-\lambda}$. Der Di renzenquotient

$$\frac{U_4(x_1^{(0)}+h)-U_4(x_1^{(0)})}{h}$$

wird darum unendlich klein mit h.

Setzen wir

$$\left(\frac{\partial U_3}{\partial x_1}\right)_0=\int_{(2\delta-2|h|)}(K-K_0)\left\{\frac{3(\zeta_1-x_1^{(0)})^2}{r_0^5}-\frac{1}{r_0^3}\right\}d\zeta_1\,d\zeta_2\,d\zeta_3$$

und betrachten wir die Differenz

$$C=\frac{U_3(x_1^{(0)}+h)-U_3(x_1^{(0)})}{h}-\left(\frac{\partial U_3}{\partial x_1}\right)_0$$

$$=\frac{h}{2}\int_{(2\delta-2|h|)}(K-K_0)\left\{\frac{15(\zeta_1-x_1')^3}{(r')^7}-\frac{9(\zeta_1-x_1')}{(r')^5}\right\}d\zeta_1\,d\zeta_2\,d\zeta_3,$$

wo r' den Abstand des Punktes $(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$ von einem Punkte zwisch M_0 und M_1 bezeichnet. Es ist $r'<r_0-|h|$. Wir schließen hieraus, d

$$|C|<aN|h|\int_{2|h|}^{R}\frac{r_0^{3-\lambda}\,dr_0}{(r_0-|h|)^4}$$

ist und darum C mit h unendlich klein wird.

Fügen wir zu $\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1}\right)_0$ das Integral

$$\int_{2|h|} (K - K_0) \left\{ \frac{3(\zeta_1 - x_1^{(0)})}{r_0^5} - \frac{1}{r_0^3} \right\} d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3,$$

mit h unendlich klein wird, hinzu, so finden wir im Punkte M_0

$$\left.\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right|_{M_0} = -\frac{4\pi}{3} K_0 + \int_{(2\delta)} (K - K_0) \left\{ \frac{3(\zeta_1 - x_1^{(0)})^2}{r_0^5} - \frac{1}{r_0^3} \right\} d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3$$

$$+ \int K \left\{ \frac{3(\zeta_1 - x_1^{(0)})^2}{r_0^5} - \frac{1}{r_0^3} \right\} d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3,$$

das letzte Integral über das Gebiet außerhalb der Kugel (2δ) erstreckt
Für die Kugel (2δ) kann man irgendein anderes Gebiet (D), das
Punkt M_0 und keine Punkte der Grenze in seinem Innern enthält,
len. Man erhält dann für die Ableitung:

$$\left.\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right|_{M_0} = K_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \int_{(D)} \frac{d\omega}{r} \right)_{M_0} + \int_{(D)} (K - K_0) \{0\} d\omega + \int K \{0\} d\omega$$

$$\{\} = \frac{3(\zeta_1 - x_1)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}, \qquad d\omega = d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3.$$

Auf ähnliche Weise erhält man die Ableitung $\left.\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right|_{M_0}$. Das erste Glied
(20) wäre dabei durch $K_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \int_{(D)} \frac{d\omega}{r} \right)_{M_0}$ zu ersetzen, auch wäre

$$\{\} = \frac{3(\zeta_1 - x_1)(\zeta_2 - x_2)}{r^5}$$

schreiben.

13. Wir werden jetzt zeigen, daß die Ableitungen von U in dem
kte $M_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})$ bestimmte Grenzwerte haben, wenn M_1 sich dem
kte $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$ auf der Grenze nähert. Bezeichnen wir mit $(K)_i$
Wert von K in M_0 auf derjenigen Seite der Grenze, in der M_1 liegt,
$(K)_e$ den Wert von K in M_0 auf der anderen Seite; mit (d_i) denjenigen
der Kugel vom Radius d_0 um M_0, der M_1 enthält, mit (d_e) den Rest
Kugel; mit P_e den Wert des Integrals (1), wenn die Integration über
erstreckt wird.

Wir finden für die fraglichen Grenzwerte die Ausdrücke:

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right)_i = -\frac{4\pi (K)_i}{3} + \int_{(d_i)} (K - (K)_i) \{0\} d\omega + ((K)_e - (K)_i) \left(\frac{\partial^2 P_e}{\partial x_1^2}\right)_i$$

$$+ \int_{(d_e)} (K - (K)_e) \{0\} d\omega + \int K \{0\} d\omega.$$

analoger Ausdruck gilt für $\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)_i$.

Wir werden den Beweis für die Ableitung (20) durchführen.

Wählen wir für (D) das Gebiet (d_i), so können wir, wenn K_1 d Wert von K in M_1 bezeichnet, für (20) auch schreiben:

$$(22)\quad \frac{\partial U_1}{\partial x_1}\Big|_{M_1} = -\frac{4\pi K_1}{3} + \int_{(d_i)} (K - K_1)\{1\}\,d\omega + ((K)_e - K_1)\frac{\partial^2 P_e}{\partial x_1^2}\Big|_{M_1} + \int_{(d_e)} (K - (K)_e)\{1\}\,d\omega + \int K\{1\}\,d\omega.$$

Wir werden zeigen, daß, wenn δ der Abstand zwischen M_1 und M_0 i die Differenz zwischen (21) und (22) absolut genommen kleiner als ei Zahl von der Form $aN\delta^{1-\lambda}$ ist.

Für die Differenz der ersten Terme findet sich unmittelbar:

$$|K_1 - (K)_i| < aN\delta^{1-\lambda}.$$

Um jetzt die Integrale, die über (d_i) erstreckt sind, abzuschätzen, b schreiben wir um M_0 eine Kugel vom Radius 3δ und erstrecken die Int grale zuerst auf das (d_i) und dieser Kugel gemeinsame Gebiet. Wir finde daß sie absolut genommen kleiner als

$$a'N\int_0^{3\delta}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r_1^{1-\lambda} r_0^2 \sin\theta\, dr_0\, d\theta\, d\varphi}{r_1^3} = a''N\int_0^{3\delta}\int_{|r_0-\delta|}^{r_0+\delta} \frac{r_0\, dr_0\, dr_1}{r_1^{1+\lambda}} \text{ bzw. } a'N\int_0^{3\delta} \frac{dr_0}{r_0^{\lambda}}$$

sind, mithin die gesuchte Gestalt haben.

Was den Restteil der zweiten Terme von (21) und (22) betrifft, finden wir für ihre Differenz den Ausdruck

$$((K)_i - K_1)\int_{(d_i - 3\delta)} \{1\}\,d\omega + \int_{(d_i - 3\delta)} (K - (K)_i)[\{1\} - \{0\}]\,d\omega,$$

den man auch in der Form:

$$((K)_i - K_1)\frac{\partial^2 P_i}{\partial x_1^2}\Big|_{M_1} + \frac{4\pi}{3}((K)_i - K_1) + ((K)_i - K_1)\int_{(3\delta)_e} \{1\}\,d\omega + \int_{(d_i - 3\delta)} (K - (K)_i)[\{1\} - \{0\}]\,d\omega$$

darstellen kann.

Da $\frac{\partial^2 P_i}{\partial x_1^2}\Big|_{M_1}$ endlich ist, so haben die beiden ersten Summanden d gesuchte Gestalt. Da der Integralfaktor des dritten Gliedes, für den w auch $\int_{\omega} \frac{\cos(N x_1)\cos(r_1 x_1)}{r_1^2}\,d\sigma$ setzen können, endlich ist, so hat auch der dritt Summand die gewünschte Gestalt. Beachten wir jetzt, daß

$$|\{1\} - \{0\}| < \frac{24\sqrt{3}\,\delta}{(r_0 - \delta)^4}$$

ist, so überzeugen wir uns leicht, daß auch der letzte Term die verlangte Form ha

Wenn wir der Differenz der weiter folgenden Glieder in (21), (22) Form

$$(K_1 - (K)_i)\left(\frac{\partial^2 P_e}{\partial x_1^2}\right)_i + ((K)_e - K_1)\left\{\left(\frac{\partial^2 P_e}{\partial x_1^2}\right)_i - \left(\frac{\partial^2 P_e}{\partial x_1^2}\right)_1\right\}$$

en, sehen wir, da

$$|(K_e) - K_1| < |(K_e)| + |K_1| < 2aN$$

daß auch sie die gewünschte Gestalt hat.

Gehen wir jetzt zu den Integralen, die über (d_e) erstreckt sind, über. chreiben wir um M_1 eine Kugel vom Radius δ. Liegt M_1 nicht auf Normale an die Grenze in M_0, so wird sich im Innern der Kugel der Grenze gewiß ein von M_0 verschiedener Punkt M_2 finden, so daß auf der Normale in M_2 liegt. Ist δ_1 der Abstand $M_1 M_2$, δ_2 der Abd $M_0 M_2$, so ist

$$\delta_1 < \delta, \quad \delta_2 < 2\delta.$$

chreiben wir ferner um M_1 zwei Kugeln mit den Radien δ_1 und 4δ. sei $(K)_{e'}$ der Wert von K im M_2 auf der Seite von (d_e). Wir schreiben

$$K - (K_e))\{1\}\,d\omega = \int_{(3\delta)_e} (K - (K)_{e'})\{1\}\,d\omega + [(K)_{e'} - (K)_e]\int_{(3\delta)_e} \{1\}\,d\omega.$$

erste Integral rechts ist absolut genommen kleiner als

$$aN\int_{\delta_1}^{4\delta}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r_2^{1-\lambda}\sin\theta\,dr_1\,d\theta\,d\varphi}{r_1} = \frac{a'N}{\delta_1}\int_{\delta_1}^{4\delta}\int_{r_1-\delta}^{r_1+\delta} \frac{r_2^{2-\lambda}\,dr_1\,dr_2}{r_1^2} = bN\delta^{1-\lambda}.$$

zweite Integral rechts ist endlich, und da

$$|(K)_{e'} - (K)_e| < aN\delta_2^{1-\lambda}$$

so hat auch der zweite Summand die gesuchte Form.

Die Differenz der Integrale, die über $(d_e - 3\delta)$ erstreckt sind, ist olut genommen kleiner als

$$aN\delta\int_{3\delta}^{d_0} \frac{r_0^{1-\lambda} r_0^2\,dr_0}{(r_0-\delta)^4}$$

hat darum die gewünschte Gestalt. Eine nähere Untersuchung der erenz der letzten Integrale in (21) und (22) führt zu dem Ergebnis, sie absolut genommen kleiner als eine Zahl von der Form $aN\delta$ ist. Aus allem dem folgt, daß unsere Behauptung richtig ist.

14. Es ist zu bemerken, daß eine Abschätzung der Ableitungen), (21′) leicht lehrt, daß sie absolut genommen kleiner als bN und sind.

15. Ist S eine der Ableitungen von U_i nach x_1, x_2, x_3, und si M_0, M_1 zwei Punkte mit dem Abstande δ auf derselben Seite der Gren so ist

$$|S_{M_0} - S_{M_1}| < aN\delta^{1-\lambda}, \quad \varrho_0^3 |S_{M_0} - S_{M_1}| < aN\delta^{1-\lambda}.$$

Bei dem Beweise wird vorausgesetzt, daß $\delta < \frac{d_0}{8}$ ist.

Wir beschreiben um M_0 eine Kugel vom Radius 3δ. Gibt es Innern der Kugel einen Punkt $M^{(0)}$ auf der Grenze, so ist, wenn δ_1 u δ_2 die Abstände $M^{(0)} M_0$ und $M^{(0)} M_1$ bezeichnen, $\delta_1 < 3\delta$, $\delta_2 < 4\delta$; wohl δ_1 als auch δ_2 sind kleiner als $\frac{d_0}{2}$. Es folgt also:

$$|S_{M_0} - S_{M_1}| < |(S_{M_0} - S_{M^{(0)}})| + |S_{M^{(0)}} - S_{M_1}| < bN\delta^{1-\lambda} + bN\delta_2^{1-\lambda} < aN\delta^{1-\lambda}.$$

Setzen wir jetzt voraus, daß es im Innern der Kugel keinen Punkt d Grenze gibt. Beschreiben wir um M_0 noch eine Kugel vom Radius $\frac{d_0}{3}$. We es auch im Innern dieser Kugel keine Punkte der Grenze gibt, so nehmen wir (20) für das Gebiet (D) eben diese Kugel an. Alsdann liefert der Verglei der Ableitungen in M_0 und M_1 direkt, daß ihre Differenz die gesuch Gestalt hat. Die an zweiter Stelle befindlichen Integrale über die Kugel (3 erstreckt, haben nämlich einzeln die Gestalt $aN\delta^{1-\lambda}$. Erstreckt man s aber auf den Rest von (D), so bekommt man für die Differenz den We

$$(K_1 - K_0) \int_{\left(\frac{d_0}{3} - 3\delta\right)} \{1\} d\omega - \int_{\left(\frac{d_0}{3} - 3\delta\right)} (K - K_0)[\{0\} - \{1\}] d\omega.$$

Das erste Integral verschwindet, das zweite ist absolut genommen kleiner a

$$aN\delta \int_{3\delta}^{\frac{d_0}{3}} \frac{r_0^{3-\lambda} dr_0}{(r_0 - \delta)^4}, \quad \frac{aN\delta}{\varrho_0^4} \int_{3\delta}^{\frac{d_0}{3}} \frac{r_0^{3-\lambda} dr_0}{(r_0 - \delta)^4}$$

und hat also die gesuchte Schranke.

Die Differenz zwischen den letzten Integralen ist absolut genomme kleiner als die Zahlen $aN\delta$ und $\frac{aN\delta}{\varrho_0^3}$.

Setzen wir jetzt voraus, daß im Innern der Kugel $\left(\frac{d_0}{3}\right)$ wohl Punkt der Grenze liegen, und daß $M^{(0)}$ der M_0 am nächsten liegende ist.

Sind δ_0 und δ_1 seine Entfernungen von M_0 und M_1, so hat man

$$3\delta < \delta_0 < \frac{d_0}{3}, \quad \delta_1 < \delta_0 + \delta < \frac{d_0}{2}.$$

Grenze teilt die Kugel $\left(\frac{d_0}{3}\right)$ in zwei Gebiete. Das Gebiet, das M_0 M_1 enthält, wollen wir mit (d_i), das andere mit (d_e) bezeichnen. der Formel (20) werden wir jetzt für (D) das Gebiet (d_i) nehmen die Formel (22) anwenden. Wir bezeichnen darum mit K_0 und K_1 Werte von K in M_0 und M_1, mit $(K)_e$ den Wert von K im Punkte $M^{(0)}$ derjenigen Seite der Grenze, in der sich (d_e) befindet.

Wir wollen jetzt die einzelnen Glieder der so gebauten Formeln miteinander vergleichen. Die Differenz der ersten Terme hat gewiß die geschte Gestalt, da ja

$$|K_0 - K_1| < a N \delta^{1-\lambda}$$

Die an zweiter Stelle befindlichen Integrale, wenn man sie über die el (3δ) erstreckt, sind bereits abgeschätzt worden und haben jedes sich die gesuchte Gestalt.

Der Rest der Differenz hat den Wert

$$(K_1 - K_0) \int_{(d_i - 3\delta)} \{1\} d\omega + \int_{(d_i - 3\delta)} (K - K_0)[\{0\} - \{1\}] d\omega.$$

erste Integral dieser Summe hat gewiß die gewünschte Eigenschaft, zweite ist absolut genommen kleiner als

$$a N \delta \int_{\left(d_0 + \frac{d_0}{3}\right) - (3\delta)} \frac{r_0^{3-\lambda} \sin\theta \, dr_0 \, d\theta \, d\varphi}{(r_0 - \delta)^4} < a' N \delta \int_{3\delta}^{d_0 + \frac{d_0}{3}} \frac{r_0^{3-\lambda} \, dr_0}{(r_0 - \delta)^4} < b N \delta^{1-\lambda}.$$

Differenz der dritten Terme hat den Wert

$$(K_1 - K_0) \frac{\partial P_e}{\partial x_1^2}\Big|_{M_0} + ((K)_e - K_1) \left\{ \frac{\partial^2 P_e}{\partial x_1^2}\Big|_{M_0} - \frac{\partial^2 P_e}{\partial x_1^2}\Big|_{M_1} \right\}.$$

erste Summand hat offenbar die gewünschte Gestalt; der zweite falls, da

$$|(K)_e - K_1| < 2 a N, \quad \left| \frac{\partial^2 P_e}{\partial x_1^2}\Big|_{M_0} - \frac{\partial^2 P_e}{\partial x_1^2}\Big|_{M_1} \right| < a \delta^{1-\lambda}$$

Wenn r_1 den Abstand eines variablen Punktes von $M^{(0)}$ bezeichnet, t der Ausdruck

$$\int_{(d_e)} (K - (K)_e)[\{0\} - \{1\}) d\omega$$

lut genommen kleiner als

$$a N \delta \int_{(d_0 - 3\delta)} \frac{r_1^{1-\lambda} \, d\omega}{(r_0 - \delta)^4} < a' N \delta \int_{3\delta}^{\frac{4}{3} d_0} \frac{r_0^{3-\lambda} \, dr_0}{(r_0 - \delta)^4} < b N \delta^{1-\lambda},$$

dies wegen

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \qquad r_1 < \frac{r_0}{\sin\alpha} < \frac{1}{k} r_0,$$

weil ja α größer als der Winkel zwischen der Normale und einer Seh der Kugel vom Radius (d_0) um $M^{(0)}$ als Mittelpunkt ist. Eine näh Betrachtung der an letzter Stelle befindlichen Integrale zeigt, daß il Differenz eine Schranke $aN\delta$ bzw. $\frac{aN\delta}{\varrho_0^3}$ hat.

16. Um die Stetigkeit der Ableitungen $\frac{\partial U_t}{\partial q_j}$ als Funktionen von t a gefaßt zu beweisen, genügt es, die Stetigkeit der Ableitungen $\frac{\partial U_t}{\partial x_j}$ na zuweisen.

Bemerken wir vor allem, daß K bei festem (x_1, x_2, x_3) als Funkti von t nur so lange stetig bleibt, solange der Punkt (x_1, x_2, x_3) nicht eine Grenze gelangt.

Wir benutzen jetzt die Formeln (20), setzen für (D) eine Kugel u nehmen $t' - t$ so klein an, daß die Punkte $M'(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$ u $M''(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})$, die einem festen q_1, q_2, q_3 für t und t' entsprech beide innerhalb dieser Kugel liegen.

Nachdem wir die Formeln (20) für die Punkte M' und M'' gebil haben, kehren wir zu den alten Integrationsvariablen p_1, p_2, p_3 zurü Wir erhalten so

$$(23) \qquad \left.\frac{\partial U}{\partial x_1}\right|_{M'} = -\frac{4\pi}{3}\frac{L_0}{J_0} + \int_{(D_t)} \left(L - \frac{L_0}{J_0} J\right)\{0\}\, d\omega + \int L\{0\}\, d\omega,$$

$$(23') \qquad \left.\frac{\partial U}{\partial x_1}\right|_{M''} = -\frac{4\pi}{3}\frac{L_0'}{J_0'} + \int_{(D_{t'})} \left(L' - \frac{L_0'}{J_0'} J'\right)\{1\}\, d\omega + \int L'\{1\}\, d\omega,$$

wo das Zeichen $(')$ bedeutet, daß die zugehörigen Funktionen dem Wert entsprechen. Der Stetigkeit der Funktionen L und J zufolge wird Differenz der ersten Summanden unendlich klein mit $t' - t$.

Wir geben weiter dem zweiten Integral in (23') die Form

$$(24) \qquad \int_{(D_t)} \left(L' - \frac{L_0'}{J_0'} J'\right)\{1\}\, d\omega + \int_{(D_{t'} - D_t)} \left(L' - \frac{L_0'}{J_0'} J'\right)\{1\}\, d\omega$$

und schätzen zuerst das zweite Integral ab. Wir können annehmen, M' im Mittelpunkt der Kugel (D) ist und der Abstand $M'M''$ klei als $\frac{D}{2}$ ist. Der Abstand des Punktes M' von dem Rande von (D_t) b $(D_{t'})$ ist größer als $\frac{D}{1+3B}$, also wegen $B < \frac{1}{9}$ größer als $\frac{3}{4} D$.

Der Abstand der Punkte M'' bis zu denselben Randflächen ist größer $\frac{D}{4}$; die Funktion unter dem Integralzeichen ist also beschränkt. Hieraus t leicht, daß das zweite Integral in (24) mit $t'-t$ unendlich klein d. Wenn wir schließlich dem letzten Integral in (23′) die Form

$$\int L'\{1\}\,d\omega + \int\limits_{(D_t - D_{t'})} L'\{1\}\,dx$$

en, können wir uns in ähnlicher Weise überzeugen, daß auch das letzte egral in (25) mit $t'-t$ unendlich klein wird.

Dem übriggebliebenen Teil der Differenz der zweiten Integrale in), (23′) kann man die Form

$$\int\limits_{(D_t)} \left[\left(L' - \frac{L_0'}{J_0'}J'\right) - \left(L - \frac{L_0}{J_0}J\right)\{1\}\,d\omega + \int\limits_{(D_t)} \left(L - \frac{L_0}{J_0}J\right)[\{1\} - \{0\}]\,d\omega\right.$$

en. Wegen

$$\left|\left(L' - \frac{L_0'}{J_0'}J'\right) - \left(L - \frac{L_0}{J_0}J\right)\right| < c\,|t' - t_0|,$$

$$\left|\left(L' - \frac{L_0'}{J_0'}J'\right) - \left(L - \frac{L_0}{J_0}J\right)\right| < c'\,r_0^{1-\lambda}$$

$$\left|\left(L' - \frac{L_0'}{J_0'}J'\right) - \left(L - \frac{L_0}{J_0}J\right)\right| < \sqrt{c\,c'}\,|t' - t|^{\frac{1}{2}}\,r^{1-\frac{1+\lambda}{2}}.$$

raus folgt, daß das erste Integral in (26) mit $t'-t$ unendlich klein l. Es ist weiter leicht zu sehen, daß der Klammerausdruck in dem iten Integral die Gestalt

$$\frac{a\,r\,|t'-t|}{r^4}$$

und daß auch dieses Integral mit $|t'-t|$ verschwindet. Das gleiche ultat liefert die Betrachtung der dritten Summanden in (23), (23′) ts.

17. Aus allem dem in **11—16** bewiesenen folgt, daß die Behauptung **0** zutrifft.

(Eingegangen am 28. Dezember 1924.)

Über die Gitterpunkte auf konvexen Kurven.

Von

Vojtěch Jarník in Göttingen.

§ 1.

Formulierung der Hauptsätze.

Es seien in der Ebene zwei rechtwinklige Koordinatenachsen u, gegeben. Es sei $x > 3$. Dann bezeichne ich als eine „Kurve der Klas $L(x)$" oder kürzer als „eine $L(x)$" jede Kurve C der u-v-Ebene, d folgenden Voraussetzungen genügt:

1. C ist eine stetige rektifizierbare Kurve, deren Länge höchste gleich x ist.

2. C hat eine stetig veränderliche Tangente.

3. Es soll möglich sein, auf C einen Durchlaufungssinn so zu wähle daß, wenn τ den (im positiven Sinn gemessenen) Winkel der gerichtet Tangente mit der positiven u-Achse bezeichnet, stets $0 \leqq \tau \leqq \frac{\pi}{4}$ ist.

4. Der Winkel τ soll beständig wachsen, wenn der zugehörige Pun die Kurve C in dem unter 3. festgelegten Sinn durchläuft.

Analytisch läßt sich das Gesagte so formulieren: Eine Kurve C eine $L(x)$, wenn sie durch eine Gleichung

$$v = F(u) \qquad (u_1 \leqq u \leqq u_2)$$

gegeben ist, wo $F(u)$ folgenden Voraussetzungen genügt:

1. $F(u)$ ist für $u_1 \leqq u \leqq u_2$ definiert und hat daselbst eine steti Ableitung[1]) $F'(u)$.

---

[1]) Wenn ich von einer ersten oder zweiten Ableitung in einem Endpunkte Definitionsintervalls einer Funktion spreche, verstehe ich darunter stets die zugehö *einseitige* Ableitung.

2. Falls $u_1 \leqq u' < u'' \leqq u_2$ ist, so ist

$$0 \leqq F'(u') < F'(u'') \leqq 1.$$

3. $$\int_{u_1}^{u_2} \sqrt{1 + F'^2(u)}\, du \leqq x.$$

Auf jeder Kurve C der Klasse $L(x)$ liegt eine gewisse Anzahl g_C von terpunkten; offenbar ist g_C ganz und $0 \leqq g_C \leqq [x] + 1$. Die Menge Zahlen g_C für alle C der Klasse $L(x)$ enthält daher nur endlich viele schiedene Zahlen; ihre obere Grenze sei $f(x)$. Offenbar gibt es wenigs eine Kurve der Klasse $L(x)$, auf welcher genau $f(x)$ Gitterpunkte en. Dann lautet der

Satz 1.

$$f(x) = \frac{3}{2\sqrt[3]{2\pi}} x^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}}).$$

Der Satz 2 beschäftigt sich mit einer verwandten Frage; nur werden ere Kurven zur Konkurrenz zugelassen. Der wichtigste Unterschied schen Satz 1 und Satz 2 besteht in einer Einschränkung der Größe des ümmungsradius für die zugelassenen Kurven. Der genaue Wortlaut des zes 2 ist der folgende:

Es sei $x > 0$. Ich bezeichne als eine Kurve der Klasse $M(x)$ jede rve C der u-v-Ebene, die folgenden Voraussetzungen genügt:

1. C ist eine einfache, geschlossene, konvexe Kurve, die eine stetig änderliche Tangente und einen stetig veränderlichen, immer von 0 verschiedenen Krümmungsradius besitzt.

2. Die Länge der Kurve C ist höchstens gleich x.

3. Der Krümmungsradius von C ist in jedem Punkte dem absoluten rage nach kleiner als $7x$.

Auf jeder Kurve C der Klasse $M(x)$ liegt eine gewisse Anzahl g_C Gitterpunkten; die obere Grenze von g_C für alle C der Klasse $M(x)$ $\varphi(x)$; es gibt auch hier offenbar mindestens eine Kurve der Klasse $x)$, auf welcher genau $\varphi(x)$ Gitterpunkte liegen. Dann lautet der

Satz 2.

$$\varphi(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{2\pi}} x^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}}).$$

§ 2.

Beweis des Satzes 1.

Um den Satz 1 zu beweisen, führe ich zunächst folgende Definition Es sei $x > 3$; ein System von n verschiedenen Punkten ($n \geqq 2$) der -Ebene $P_1, P_2, \ldots, P_n$ nenne ich ein $\mathfrak{P}(x)$-System, wenn folgendes gilt:

1. $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sind Gitterpunkte;

2. die Länge des geradlinigen Streckenzuges $P_1 P_2 \ldots P_n$, der dadurc entsteht, daß man jeden Punkt P_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ mit dem Punkt P_{i+1} durch eine Strecke verbindet, ist kleiner als x;

3. wenn α_i den Winkel bedeutet, den die gerichtete Strecke $\overrightarrow{P_i P_{i+}}$ mit der positiven u-Achse bildet, so ist $0 < \alpha_i < \frac{\pi}{4}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-$ und im Falle $n > 2$ noch $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-2)$.

Zu jedem $x > 3$ gibt es mindestens ein $\mathfrak{P}(x)$-System; denn z. B. d Punkte $(0, 0)$, $(2, 1)$ bilden ein solches. Jedes $\mathfrak{P}(x)$-System setzt sic also aus einer gewissen Anzahl n von Punkten zusammen. Die obe Grenze von n für alle $\mathfrak{P}(x)$-Systeme sei $g(x)$. Offenbar gibt es auch hi ein $\mathfrak{P}(x)$-System von genau $g(x)$ Punkten. Ich behaupte: $g(x) = f(x$ Denn erstens, wenn ich ein $\mathfrak{P}(x)$-System von $g(x)$ Punkten habe, so läß sich offenbar durch sie ein konvexer Kurvenzug führen, der zur Klas $L(x)$ gehört; also ist $f(x) \geqq g(x)$. Zweitens, wenn auf einer $L(x)$ gens $f(x)$ Gitterpunkte liegen, so bilden sie (es ist $f(x) \geqq g(x) \geqq 2$) offenb ein $\mathfrak{P}(x)$-System; also ist $g(x) \geqq f(x)$.

Es seien nun u_i, v_i die Koordinaten von P_i; ich setze

$$(1) \qquad k_i = u_{i+1} - u_i, \quad l_i = v_{i+1} - v_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1$$

Dann ist für ein $\mathfrak{P}(x)$-System:

$$(2) \qquad \begin{cases} k_i > 0, \ l_i > 0; \ k_i, \ l_i \text{ ganz} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1; \ n \geqq 2 \\ 0 < \frac{l_1}{k_1} < \frac{l_2}{k_2} < \ldots < \frac{l_{n-1}}{k_{n-1}} < 1; \\ \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{k_i^2 + l_i^2} < x. \end{cases}$$

Umgekehrt, wenn ein System von Zahlen $k_1, l_1, k_2, l_2, \ldots, k_{n-1}, l_n$ (2) erfüllt, so kann ich z. B. $u_1 = v_1 = 0$ setzen und $u_2, v_2, \ldots, u_n$, aus (1) bestimmen; dann bilden die n Punkte mit den Koordinaten u_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ offenbar ein $\mathfrak{P}(x)$-System. Also ist $f(x) = g(x) = h(x$ wenn $h(x)$ die größtmögliche Zahl n bedeutet, für welche noch (2) dur ein gewisses System von Zahlen $k_1, l_1, \ldots, k_{n-1}, l_{n-1}$ erfüllbar ist.

Für $h(x) = f(x)$ will ich nun eine explizite Darstellung geben.

Hilfssatz 1. *Es sei $x > 3$, $m \geqq 3$ und ganz; es bedeute $U(m)$ die Anzahl der Lösungen von*

$$m = k^2 + l^2, \quad k > l > 0, \quad k, l \text{ ganz}, \quad (k, l) = 1;$$

es sei die ganze Zahl $r \geqq 3$ so gewählt, daß

$$\sum_{m=3}^{r} U(m) \sqrt{m} < x \leqq \sum_{m=3}^{r+1} U(m) \sqrt{m}.$$

nd die ganze Zahl $k \geqq 0$ *so, daß*

$$\sum_{m=3}^{r} U(m)\sqrt{m} + k\sqrt{r+1} < x \leqq \sum_{m=3}^{r} U(m)\sqrt{m} + (k+1)\sqrt{r+1}.$$

Behauptung. $h(x) = \sum_{m=3}^{r} U(m) + k + 1.$

Vorbemerkung. Daß die Wahl der Zahl r immer möglich ist, folgt araus, daß $x > 3$, aber $U(3) = 0$ ist.

Beweis. Ein System von $h(x)-1$ Zahlenpaaren $k_1, l_1, \ldots, k_{h(x)-1}, l_{h(x)-1}$, ie (2) mit $n = h(x)$ erfüllen, nenne ich ein Maximalsystem; wenn überies $(k_i, l_i) = 1$ für $i = 1, \ldots, h(x) - 1$ ist, ein primitives Maximalsystem. Daß es Maximalsysteme gibt, wissen wir schon. Es liege also ein Maximalystem k_i, l_i $(i = 1, \ldots, h(x) - 1)$ vor; es sei $\delta_i = (k_i, l_i)$. Dann bilen die Zahlen $k_i' = \frac{k_i}{\delta_i}$, $l_i' = \frac{l_i}{\delta_i}$ $(i = 1, \ldots, h(x) - 1)$ offenbar auch ein Iaximalsystem, und zwar ein primitives Maximalsystem, da $(k_i', l_i') = 1$.

Ich behaupte nun: wenn ein primitives Maximalsystem vorliegt, so t $k_i^2 + l_i^2 \geqq 3$ und bei gegebenem m ist die Gleichung $k_i^2 + l_i^2 = m$ höchtens für $U(m)$ Werte von i erfüllt. Denn erstens, wäre $k_i^2 + l_i^2 = 1$ zw. $= 2$, so müßte $k_i = 1$, $l_i = 0$ bzw. $k_i = 1$, $l_i = 1$ sein, was (2) widerpricht. Wäre zweitens für ein gewisses $m \geqq 3$ die Gleichung $k_i^2 + l_i^2 = m$ ür mehr als $U(m)$ Werte von i erfüllt, so wäre für gewisse zwei verchiedene Indizes s, t: $k_s = k_t$, $l_s = l_t$, also $\frac{l_s}{k_s} = \frac{l_t}{k_t}$, was wieder mit (2) n Widerspruch steht.

Es liege nun ein primitives Maximalsystem vor, in welchem folgenes gilt:

Es ist $k_i^2 + l_i^2 = m$ genau für $U(m)$ Werte von i, wenn $m = 3, 4, \ldots, M-1$ t (für $m = 3$ ist dies wegen $U(3) = 0$ immer der Fall); weiter ist $_i^2 + l_i^2 = M$ für s Werte von i, wo $0 \leqq s < U(M)$; und endlich ist für in gewisses h: $k_h^2 + l_h^2 > M$. Ich konstruiere nun ein neues primitives Iaximalsystem folgendermaßen: ich lasse aus unserem System k_h, l_h weg nd ersetze sie durch ein Zahlenpaar k, l, für welches $k^2 + l^2 = M$, $< l < k$, k, l ganz, $(k, l) = 1$ ist und welches im ursprünglichen System icht vorkam (das ist wegen $s < U(M)$ möglich). Wenn ich noch die ndizes geeignet verändere, bildet dieses neue System wieder ein primitives Iaximalsystem, in welchem wieder $k_i^2 + l_i^2 = m$ für genau $U(m)$ Werte on i ist, wenn $m = 3, 4, \ldots, M-1$, aber $k_i^2 + l_i^2 = M$ für $s+1$ Werte on i.

Durch Wiederholung dieses Verfahrens bekomme ich endlich ein primives Maximalsystem $k_1, l_1, \ldots, k_{h(x)-1}, l_{h(x)-1}$, in welchem folgendes gilt: Es gibt zwei ganze Zahlen R und K, wo $R \geqq 3$, $0 \leqq K < U(R+1)$ ist,

so daß die Gleichung $k_i^2 + l_i^2 = m$ für genau $U(m)$ Werte von i erfü ist, falls $m = 3, 4, \ldots, R$; die Gleichung $k_i^2 + l_i^2 = R+1$ genau für Werte von i, und die Ungleichung $k_i^2 + l_i^2 > R+1$ für kein i erfüllt Also ist

$$h(x) = \sum_{m=3}^{R} U(m) + K + 1. \tag{3}$$

Weiter ist für unser System

$$\sum_{i=1}^{h(x)-1} \sqrt{k_i^2 + l_i^2} = \sum_{m=3}^{R} U(m)\sqrt{m} + K\sqrt{R+1}.$$

Daher ist

$$\sum_{m=3}^{R} U(m)\sqrt{m} + K\sqrt{R+1} < x. \tag{4}$$

Andererseits ist aber

$$\sum_{m=3}^{R} U(m)\sqrt{m} + (K+1)\sqrt{R+1} \geqq x; \tag{5}$$

denn, wäre dieser Ausdruck $< x$, so könnten wir zu unserem Syst noch ein in ihm nicht enthaltenes Zahlenpaar k, l hinzufügen, für welc k, l ganz, $0 < l < k$, $(k, l) = 1$, $k^2 + l^2 = R+1$ ist (ein solches Zahl paar ist wegen $K < U(R+1)$ vorhanden), so daß auch das erweite System die Bedingungen (2) erfüllen würde; das ist aber bei ein Maximalsystem unmöglich. Aus (4) und (5) folgt aber $R = r$, $K =$ womit wegen (3) der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 2. *Ei sei $y > 0$; dann ist*

$$\sum_{m=3}^{[y]} U(m) = \frac{3}{4\pi} y + O(y^{\frac{1}{2}}), \tag{6}$$

$$\sum_{m=3}^{[y]} U(m)\sqrt{m} = \frac{1}{2\pi} y^{\frac{3}{2}} + O(y). \tag{7}$$

(Für $\alpha < 3$ verstehe ich unter $\sum_{m=3}^{\alpha}$ Null.)

Beweis. Es sei (für $y > 0$) $F(y)$ die Anzahl der Lösungen vo

$$k^2 + l^2 \leqq y, \qquad k, l \gtrless 0 \text{ ganz}, \qquad (k, l) = 1. \tag{8}$$

Dann ist für $y > 3$

$$F(y) = 8 \sum_{m=3}^{[y]} U(m) + 8; \tag{9}$$

denn zu jeder Lösung von $3 \leqq \varkappa^2 + \lambda^2 \leqq y$, $0 < \lambda < \varkappa$, $\varkappa, \lambda$ g $(\varkappa, \lambda) = 1$ gehören acht Lösungen von (8), nämlich $k = \pm\varkappa$, $l =$ und $k = \pm\lambda$, $l = \pm\varkappa$, wo die Vorzeichen unabhängig voneinande

ehmen sind, und dazu treten noch die acht Lösungen $k=0,\ l=\pm 1$; $=\pm 1,\ l=0$; $k=\pm 1,\ l=\pm 1$ von (8) hinzu. Es sei (für $y>0$) (y) die Anzahl der Lösungen von $0<k^2+l^2\leqq y$, k, l ganz; d. h. (y) ist die Anzahl der vom Nullpunkt verschiedenen Gitterpunkte im Kreise $u^2+v^2=y$. Dann ist $A(y)$ offenbar auch gleich der Anzahl on Lösungen von $k^2+l^2\leqq \frac{y}{d^2}$, k, l, d ganz, $d>0$, $(k,l)=1$; d. h. s ist

$$A(y)=F(y)+F\left(\frac{y}{2^2}\right)+F\left(\frac{y}{3^2}\right)+\dots;$$

ür $z<1$ ist $A(z)=F(z)=0$.

Diese Gleichung will ich nach $F(y)$ auflösen[2]).

Es ist

$$A\left(\frac{y}{n^2}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}F\left(\frac{y}{n^2m^2}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)A\left(\frac{y}{n^2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)\sum_{m=1}^{\infty}F\left(\frac{y}{n^2m^2}\right)=\sum_{l=1}^{\infty}F\left(\frac{y}{l^2}\right)\sum_{n\mid l}\mu(n)=F(y).^{3})$$

Also ist

$$F(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)A\left(\frac{y}{n^2}\right)=\sum_{n=1}^{[\sqrt{y}]}\mu(n)A\left(\frac{y}{n^2}\right). \tag{10}$$

Ich setze nun $A(y)=\pi y+R(y)$; nach dem Satz von Sierpiński ist ür $y\geqq 1$: $|R(y)|\leqq cy^{\frac{1}{3}}$, wo c eine absolute Konstante ist. Daher ist ach (10)

$$F(y)=\sum_{n=1}^{[\sqrt{y}]}\mu(n)\cdot\pi\frac{y}{n^2}+O\left(y^{\frac{1}{3}}\sum_{n=1}^{[\sqrt{y}]}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right).$$

Weiter ist

$$\sum_{n=1}^{[\sqrt{y}]}\frac{\mu(n)}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}-\sum_{n=[\sqrt{y}]+1}^{\infty}=\frac{6}{\pi^2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right),$$

da bekanntlich

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2}=\frac{1}{\zeta(2)}=\frac{6}{\pi^2},$$

$$\sum_{n=[\sqrt{y}]+1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2}=O\left(\sum_{n>\sqrt{y}}\frac{1}{n^2}\right)=O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$$

[2]) Alle folgenden Operationen mit unendlichen Reihen sind legitim, da alle vorkommenden Reihen von selbst im Endlichen abbrechen.

[3]) Wegen der Definition der Funktion $\mu(n)$ und ihrer einfachsten Eigenschaften gl. z. B. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung von Primzahlen, Bd. 2. . 567 und 575.

ist. Endlich ist

$$\sum_{n=1}^{[\sqrt{y}]} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} = O(y^{\frac{1}{6}}),$$

so daß

$$F(y) = \frac{6}{\pi} y + O(y^{\frac{1}{3}});$$

daraus folgt aber wegen (9) die Behauptung (6). Aus (6) folgt aber (7) durch partielle Summation:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=3}^{[y]} U(m)\sqrt{m} &= \sum_{m=3}^{[y]} \Big(\sum_{n=3}^{m} U(n) - \sum_{n=3}^{m-1} U(n) \Big) \sqrt{m} \\
&= \sum_{m=3}^{[y]} \Big(\sum_{n=3}^{m} U(n) \Big) (\sqrt{m} - \sqrt{m+1}) + \sum_{n=3}^{[y]} U(n) \cdot \sqrt{[y]+1} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{m=3}^{[y]} \Big(\sum_{n=3}^{m} U(n) \Big) \int_{m}^{m+1} \frac{du}{\sqrt{u}} + \frac{3}{4\pi} y^{\frac{3}{2}} + O(y) \qquad \text{(nach (7))} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{m=3}^{[y]} \int_{m}^{m+1} \Big(\sum_{n=3}^{[u]} U(n) \Big) \frac{du}{\sqrt{u}} + \frac{3}{4\pi} y^{\frac{3}{2}} + O(y) \\
&= -\frac{1}{2} \int_{3}^{[y]+1} \Big(\frac{3}{4\pi} u + O(u^{\frac{1}{2}}) \Big) \frac{du}{\sqrt{u}} + \frac{3}{4\pi} y^{\frac{3}{2}} + O(y) \\
&= -\frac{1}{4\pi} y^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4\pi} y^{\frac{3}{2}} + O(y) = \frac{1}{2\pi} y^{\frac{3}{2}} + O(y),
\end{aligned}$$

w. z. b. w.

Schluß des Beweises des Satzes 1. Nach Hilfssatz 1 ist

$$h(x) = \sum_{m=3}^{r} U(m) + k + 1,$$

wo $0 \leqq k < U(r+1)$ ist; also

$$\sum_{m=3}^{r} U(m) < h(x) \leqq \sum_{m=3}^{r+1} U(m), \tag{11}$$

wo

$$\sum_{m=3}^{r} U(m)\sqrt{m} < x \leqq \sum_{m=3}^{r+1} U(m)\sqrt{m}.$$

Also ist nach (7)

$$\frac{1}{2\pi} r^{\frac{3}{2}} + O(r) < x \leqq \frac{1}{2\pi} (r+1)^{\frac{3}{2}} + O(r+1),$$

d. h.

$$x = \frac{1}{2\pi} r^{\frac{3}{2}} + O(r);$$

raus $r = O(x^{\frac{2}{3}})$; also

$$r^{\frac{3}{2}} = 2\pi x + O(x^{\frac{1}{2}}),$$

$$r = (2\pi x)^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}}).$$

so ist, wegen (11) und (6):

$$\frac{3}{4\pi} r + O(r^{\frac{1}{2}}) < h(x) \leqq \frac{3}{4\pi}(r+1) + O((r+1)^{\frac{1}{2}}),$$

h.

$$h(x) = \frac{3}{4\pi} r + O(r^{\frac{1}{2}}) = \frac{3}{4\pi}(2\pi x)^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}}) = \frac{3}{2\sqrt[3]{2\pi}} x^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}}).$$

mit ist aber Satz 1 bewiesen.

§ 3.

Eine Anwendung des Satzes 1.

Cauer[4]) hat folgenden Satz bewiesen:

Es sei im ersten Quadranten einer u-v-Ebene eine Kurve γ gegeben, von einem Punkt der v-Achse, auf dieser senkrecht stehend, ausgeht d, ohne mit einer Horizontalen oder Vertikalen mehr als einen Punkt meinsam zu haben, in einem Punkt der u-Achse, auch auf dieser senkcht stehend, endet. γ habe stetige, nicht verschwindende Krümmung, ch in den Endpunkten, und werde dargestellt durch eine Gleichung

$$f(u, v) = a_0 u^n + a_1 u^{n-1} v + \ldots + a_n v^n = 1 \qquad (n \geqq 2),$$

die Koeffizienten, soweit es die anderen Voraussetzungen zulassen, liebige reelle Zahlen sind.

Es sei $A(x)$ die Anzahl der ganzzahligen Lösungen von

$$f(|u|, |v|) \leqq x;$$

sei $B(x)$ die Anzahl der ganzzahligen Lösungen von

$$f(u, v) = x, \quad u \geqq 0, \quad v \geqq 0.$$

sei β eine nur von der Funktion $f(u, v)$ abhängende Zahl, für die $(x) = O(x^\beta)$ ist. Dann ist

2) $$A(x) = J x^{\frac{2}{n}} + O(x^\beta) + O\left(x^{\frac{2}{3n}}\right),$$

$$J = \iint_{f(|u|, |v|) \leqq 1} du\, dv$$

[4]) D. Cauer, Über die Pfeiffersche Methode (Abhandlungen, H. A. Schwarz m 50-jährigen Doktorjubiläum gewidmet; Berlin, Jul. Springer, 1914; S. 432–447).

Ich will zeigen, daß

$$B(x) = O\left(x^{\frac{2}{3n}}\right) \tag{13}$$

ist; damit wird (12) zu

$$A(x) = Jx^{\frac{2}{n}} + O\left(x^{\frac{2}{3n}}\right) \tag{14}$$

verbessert.

Wenn l die Länge der Kurve $f(u, v) = 1$, $u \geqq 0$, $v \geqq 0$ bezeich so ist die Länge der Kurve $f(u, v) = x$, $u \geqq 0$, $v \geqq 0$ offenbar gl $l \cdot x^{\frac{1}{n}}$. Diese Kurve genügt also, wie man aus den Voraussetzungen ü die Kurve $f(u, v) = 1$ sieht, allen Bedingungen für eine Kurve der Kl $L\left(lx^{\frac{1}{n}}\right)$, bis auf die Bedingung 3 (vgl. § 1); wenn wir nämlich die Ku von ihrem Schnittpunkt mit der u-Achse zu ihrem Schnittpunkt mit v-Achse durchlaufen, so wächst der Winkel τ von $\frac{\pi}{2}$ bis zu π. Ich t nun unsere Kurve in zwei Teile K_1, K_2, so daß auf K_1 bzw. K_2 gilt

$$\frac{\pi}{2} \leqq \tau \leqq \frac{3\pi}{4} \text{ bzw. } \frac{3\pi}{4} \leqq \tau \leqq \pi.$$

K_1 und K_2 kann man dann durch Spiegelungen an den Koordinat achsen und ihren Symmetralen — wodurch Gitterpunkte in Gitterpun übergehen — in zwei Kurven K_1', K_2' überführen, auf welchen $0 \leqq \tau \leqq$ Die Kurven K_1', K_2' gehören nun offenbar zur Klasse $L\left(lx^{\frac{1}{n}}\right)$; also die Anzahl der Gitterpunkte auf K_1' und K_2' nach Satz 1 höchst $2f\left(lx^{\frac{1}{n}}\right) = O\left(x^{\frac{2}{3n}}\right)$; daher ist auch $B(x) = O\left(x^{\frac{2}{3n}}\right)$, womit (13) und bewiesen ist.

Man kann allerdings heute (14) noch auf eine andere Weise bewei nämlich als eine unmittelbare Folge eines allgemeinen Satzes des H van der Corput[5]).

§ 4.

Beweis des Satzes 2.

Den Beweis dieses Satzes zerlege ich in zwei Teile.

I. Teil. Ich will zuerst zeigen, daß

$$\varphi(x) \leqq \frac{3}{\sqrt[3]{2\pi}} x^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}}) \tag{15}$$

[5]) Siehe z. B. J. G. van der Corput, Über Gitterpunkte in der Ebene, M Annalen **81**, S. 1–20; vgl. namentlich das Korollar auf S. 5.

. Das ergibt sich sehr leicht aus dem Satz 1. Es sei C eine Kurve r Klasse $M(x)$. Ich teile die Kurve C in acht Bogen C_i $(i = 1, 2, \ldots, 8)$. daß auf C_i der Winkel τ das Intervall $\left((i-1)\frac{\pi}{4}, i\frac{\pi}{4}\right)$ durchläuft. e Länge von C_i sei x_i. Ich kann nun C_i durch Spiegelungen an den raden $u = 0$, $v = 0$, $v = \pm u$ (wodurch Gitterpunkte in Gitterpunkte ergehen) in eine Kurve C_i' überführen, auf welcher $0 \leqq \tau \leqq \frac{\pi}{4}$ ist. Es dann entweder $x_i > 3$; dann gehört C_i' offenbar zur Klasse $L(x_i)$, also nach Satz 1 [6])

$$g_{C_i} \leqq \frac{3}{2\sqrt[3]{2\pi}} x_i^{\frac{2}{3}} + O(x_i^{\frac{1}{3}});$$

der ist $x_i \leqq 3$, und dann ist $g_{C_i'} \leqq 4$.

Also ist jedenfalls

$$g_C \leqq \frac{3}{2\sqrt[3]{2\pi}} \sum_{i=1}^{8} x_i^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}}).$$

un ist $\sum_{i=1}^{8} x_i \leqq x$, $x_i > 0$; also ist bekanntlich

$$\sum_{i=1}^{8} x_i^{\frac{2}{3}} \leqq 8\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = 2x^{\frac{2}{3}};$$

aher ist

$$g_C \leqq \frac{3}{\sqrt[3]{2\pi}} x^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}}),$$

omit (15) bewiesen ist.

II. Teil. Es bleibt uns nur übrig zu zeigen, daß

16) $$\varphi(x) \geqq \frac{3}{\sqrt[3]{2\pi}} x^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}})$$

t. Um (16) zu beweisen, genügt es, folgendes zu zeigen:

A) *Jedem $x > c$ kann man eine Kurve C_x der Klasse $M(x)$ zuordnen, so daß*

$$g_{C_x} \geqq \frac{3}{\sqrt[3]{2\pi}} x^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}})$$

ist [7]).

Der Beweis von (A) ist ein wenig umständlich; ich zerlege ihn in rei Schritte.

---

[6]) Mit $g_{(\ )}$ bezeichne ich immer die Anzahl der Gitterpunkte auf der Kurve C.

[7]) Mit c bezeichne ich von nun ab positive absolute Konstanten, die ich nicht urch Indizes voneinander unterscheide.

1. Schritt. Ich will jedem $x > c$ ein ganz bestimmtes konve Polygon $Q(x)$ der u-v-Ebene zuordnen, dessen Länge $< x$ ist, des Ecken Gitterpunkte sind und welches $\frac{3}{\sqrt[3]{2\pi}} x^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}})$ Ecken besi

Ich konstruiere $Q(x)$ folgendermaßen: Es sei $x > c$; dann wähle die ganze Zahl $r \geqq 3$ so, daß

$$\sum_{m=3}^{r} U(m)\sqrt{m} < \frac{x}{8} \leqq \sum_{m=3}^{r+1} U(m)\sqrt{m}. \tag{17}$$

Dann nehme ich alle untereinander verschiedenen Zahlenpaare k, l, folgenden Voraussetzungen genügen: $k^2 + l^2 \leqq r$, k, l ganz, $0 < l <$ $(k, l) = 1$. Ihre Anzahl sei n; dann ist nach (6)

$$n = \sum_{m=3}^{r} U(m) = \frac{3}{4\pi} r + O(r^{\frac{1}{2}}). \tag{18}$$

Ich versehe diese Zahlenpaare mit Indizes $1, 2, \ldots, n$, und zv so, daß

$$0 < \frac{l_1}{k_1} < \frac{l_2}{k_2} < \ldots < \frac{l_n}{k_n} < 1 \tag{19}$$

ist. Aus (17) folgt weiter wegen (7)

$$\frac{x}{8} = \frac{1}{2\pi} r^{\frac{3}{2}} + O(r),$$

also

$$r^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi}{4} x + O(x^{\frac{2}{3}})$$

oder

$$r = \frac{\pi^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{2}{3}}} x^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}}). \tag{20}$$

Also ist nach (18):

$$n = \frac{3}{8\sqrt[3]{2\pi}} x^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}}). \tag{21}$$

Ich setze nun $u_0 = 0$, $v_0 = 0$; $u_i = \sum_{j=1}^{i} k_j$, $v_i = \sum_{j=1}^{i} l_j$ $(i = 1, 2, \ldots$ und konstruiere die Punkte P_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ mit den Koordinaten u_i, Dann konstruiere ich den Streckenzug, dessen Anfangs- bzw. Endpu der Punkt P_0 bzw. P_n ist und dessen Ecken der Reihe nach die Pun $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ sind. Durch den Punkt P_n führe ich die Gerade dem Richtungskoeffizienten -1. Diese Gerade schneidet die v-Achse einem Punkt R, der notwendig ein Gitterpunkt ist. Ich verschiebe die Koordinatenachsen u, v parallel zu sich selbst so, daß der Anfa

unkt mit dem Punkt R zusammenfällt. Dabei behalten die Punkte $_0, P_1, \ldots, P_n$ ihre Eigenschaft, Gitterpunkte zu sein, offenbar bei. Nun piegele ich den Streckenzug $P_0 P_1 \ldots P_n$ an der Geraden $v = -u$; [8]) en so entstandenen Streckenzug mit $2n$ Seiten spiegele ich an der -Achse und den so entstandenen Streckenzug mit $4n$ Seiten an der -Achse. So entsteht ein Polygon $Q(x)$, das wirklich die verlangten igenschaften besitzt:

1. Die Länge von $Q(x)$ ist gleich

$$8 \sum_{i=1}^{n} \sqrt{k_i^2 + l_i^2} = 8 \sum_{m=3}^{r} U(m) \sqrt{m} < x \quad \text{(nach (17))}.$$

2. Die Ecken von $Q(x)$ sind Gitterpunkte.

3. Die Anzahl der Ecken von $Q(x)$ ist

$$8n = \frac{3}{\sqrt[3]{2\pi}} x^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}}) \quad \text{(nach (21))}. \tag{22}$$

4. $Q(x)$ ist konvex, wie man aus (19) und aus dem benutzten piegelungsverfahren sogleich sieht.

Dazu besitzt $Q(x)$ noch folgende Eigenschaften, die ich im folgenden rauchen werde:

5. Die Geraden $u = 0$, $v = 0$, $v = \pm u$ sind Symmetrieachsen von (x).

6. Der Anfangspunkt liegt im Innern von $Q(x)$.

Die $8n$ Ecken von $Q(x)$ bezeichne ich der Reihe nach mit $P_0, P_1, \ldots$ dabei sind die Punkte $P_0, P_1, \ldots, P_n$ bereits bezeichnet worden). Dabei etze ich fest, daß $P_m = P_{m'}$, sobald $m \equiv m' \pmod{8n}$ ist.

2. Schritt. Nun will ich für jedes $x > c$ durch die Ecken von (x) eine konvexe geschlossene Kurve C_x' konstruieren, die eine stetig eränderliche Tangente und einen stetig veränderlichen Krümmungsradius, er stets dem absoluten Betrage nach $< 7x$ ist, besitzt; endlich soll die änge von C_x' kleiner als $x + 25x^{\frac{1}{3}}$ sein. Um die Existenz einer solchen urve nachzuweisen, muß ich zunächst untersuchen, wie unser Polygon $Q(x)$ gekrümmt" ist, d. h. ich muß für die Länge seiner Seiten und die Größe einer Winkel einige Abschätzungen geben, die den Inhalt der beiden lgenden Hilfssätze bilden.

Hilfssatz 3. *Für $x > c$ sind alle Seiten $\overline{P_i P_{i+1}}$ von $Q(x)$ kleiner ls $x^{\frac{1}{3}}$.*

[8]) Von nun ab meine ich unter u, v die neu eingeführten verschobenen Koordinatenachsen.

Beweis. Aus Symmetriegründen (Eigenschaft 5 von $Q(x)$) darf i
$0 \leqq i \leqq n-1$ voraussetzen. Dann ist die Länge von $\overline{P_i P_{i+1}} = \sqrt{k_{i+1}^2 + l_i^2}$
$\leqq r = \left(\frac{\pi x}{4}\right)^{\frac{1}{3}} + O(1)$ (nach (20))

$$< x^{\frac{1}{3}} \quad \text{für} \quad x > c.$$

Hilfssatz 4. *Es sei β_i der Außenwinkel von $Q(x)$ im Punkte P
dann ist für $x > c$ und für alle i:*

$$\frac{1}{2x^{\frac{2}{3}}} < \operatorname{tg} \beta_i < \frac{10}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Beweis. Aus Symmetriegründen darf ich $0 \leqq i \leqq n$ voraussetze
Ich bemerke, daß der Richtungskoeffizient der Strecke $\overline{P_i P_{i+1}}$ (f
$i = 0, 1, \ldots, n-1$) gleich $\frac{l_{i+1}}{k_{i+1}}$ ist.

1. Es sei $1 \leqq i \leqq n-1$; dann ist

$$\operatorname{tg} \beta_i = \frac{\frac{l_{i+1}}{k_{i+1}} - \frac{l_i}{k_i}}{1 + \frac{l_i}{k_i}\frac{l_{i+1}}{k_{i+1}}} \geqq \frac{1}{k_i k_{i+1} + l_i l_{i+1}} > \frac{1}{2x^{\frac{2}{3}}},$$

weil $k_i, k_{i+1}, l_i, l_{i+1}$ nach Hilfssatz 3 sämtlich $< x^{\frac{1}{3}}$ sind.

2. Es sei $i = 0$; dann ist β_0 gleich dem Doppelten des Winkels, d
die Strecke $\overline{P_0 P_1}$ mit der u-Achse bildet; also $\operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2} = \frac{l_1}{k_1} > \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$; es
aber $\frac{l_1}{k_1} < 1$, also $0 < \frac{\beta_0}{2} < \frac{\pi}{4}$; daher ist

$$\operatorname{tg} \beta_0 > \operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2} > \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} > \frac{1}{2x^{\frac{2}{3}}}.$$

3. Es sei $i = n$; dann ist β_n das Doppelte des Winkels, den
Gerade mit dem Richtungskoeffizienten 1 mit der Strecke $\overline{P_{n-1} P_n}$ bildet, d.

$$\operatorname{tg} \frac{\beta_n}{2} = \frac{1 - \frac{l_n}{k_n}}{1 + \frac{l_n}{k_n}} \geqq \frac{1}{k_n + l_n} > \frac{1}{2x^{\frac{1}{3}}} > \frac{1}{2x^{\frac{2}{3}}}.$$

Es ist wieder $0 < \operatorname{tg} \frac{\beta_n}{2} < 1$, also $0 < \frac{\beta_n}{2} < \frac{\pi}{4}$; daher ist

$$\operatorname{tg} \beta_n > \operatorname{tg} \frac{\beta_n}{2} > \frac{1}{2x^{\frac{2}{3}}}.$$

Damit ist die untere Abschätzung für β_i für alle i bewiesen.
Nun setze ich $t = \left[\sqrt{\frac{r}{2}}\right]$.*) Dann treten unter den Zahlen $\frac{l_i}{k_i}$ sän

*) Es ist $t > 1$ für $x > c$.

he Zahlen $\frac{s}{t}$ $(s = 1, 2, \ldots, t-1)$ auf; denn jede dieser Zahlen $\frac{s}{t}$ läßt ch in der Form $\frac{l}{k}$ schreiben, wo $0 < l < k \leqq t$, $(k, l) = 1$ ist, und also $^2 + l^2 < 2t^2 \leqq r$. Daraus folgt:

1. $\frac{l_1}{k_1} \leqq \frac{1}{t}$; 2. $\frac{l_n}{k_n} \geqq \frac{t-1}{t}$; 3. falls ein i gegeben ist, wo $1 \leqq i \leqq n-1$, läßt sich ein ganzes s_i $(0 \leqq s_i \leqq t-1)$ so finden, daß

$$\frac{s_i}{t} \leqq \frac{l_i}{k_i} < \frac{l_{i+1}}{k_{i+1}} \leqq \frac{s_i+1}{t}.$$

araus folgt aber weiter:

1. $\operatorname{tg}\frac{\beta_0}{2} = \frac{l_1}{k_1} \leqq \frac{1}{t}$, also $\operatorname{tg}\beta_0 < \frac{3}{t}$ (für $t > c$, also für $x > c$).

2. $\operatorname{tg}\frac{\beta_n}{2} = \frac{1-\frac{l_n}{k_n}}{1+\frac{l_n}{k_n}} \leqq \frac{1-\frac{t-1}{t}}{1+\frac{t-1}{t}} = \frac{1}{2t-1} < \frac{1}{t}$, also $\operatorname{tg}\beta_n < \frac{3}{t}$ (alles für $> c$).

3. Es sei $1 \leqq i \leqq n-1$. Dann ist der Winkel β_i nach (a) nicht ößer als der Winkel, den die Gerade mit dem Richtungskoeffizienten $\frac{s_i+1}{t}$ it der Geraden mit dem Richtungskoeffizienten $\frac{s_i}{t}$ einschließt; also ist

$$\operatorname{tg}\beta_i \leqq \frac{\frac{s_i+1}{t} - \frac{s_i}{t}}{1 + \frac{s_i}{t}\frac{s_i+1}{t}} \leqq \frac{1}{t}.$$

lso gilt für $x > c$ und alle i:

$$\operatorname{tg}\beta_i < \frac{3}{t} = \frac{3}{\left[\sqrt{\frac{r}{2}}\right]} < \frac{6}{\sqrt{r}} = 6\left(\frac{4}{\pi x}\right)^{\frac{1}{3}} + O(x^{-\frac{2}{3}}) \quad \text{(nach (20))}$$

$$< \frac{10}{x^{\frac{1}{3}}},$$

omit der Hilfssatz bewiesen ist.

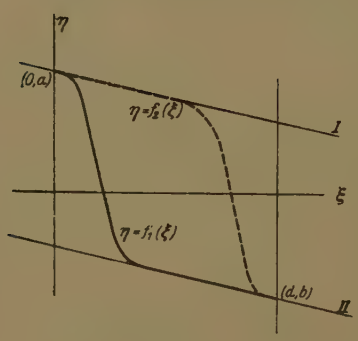
Ich brauche noch folgenden

Hilfssatz 5. *Es sei* $x > 1$, $a > \frac{1}{6x^{\frac{2}{3}}}$, $b < -\frac{1}{6x^{\frac{2}{3}}}$, $0 < d < x^{\frac{1}{3}}$.

Behauptung. *Es gibt eine Funktion* $f(\xi)$, *die für* $0 \leqq \xi \leqq d$ *definiert ist und folgende Eigenschaften hat:*

$$\begin{cases} f(0) = a,\ f(d) = b;\ f'(\xi) \text{ existiert und ist stetig für } 0 \leqq \xi \leqq d; \\ f'(\xi) \leqq -\frac{1}{6x},\ f'(0) = -\frac{1}{6x},\ f'(d) = -\frac{1}{6x};\ \int_0^d f(\xi)\,d\xi = 0. \end{cases}$$

Beweis. Weil $\frac{1}{6x} \cdot d < a$, $\frac{1}{6x} \cdot d < -b$, so liegt (s. die Figur!) d



Gerade I bzw. II, die von dem Punk $\xi = 0$, $\eta = a$ bzw. $\xi = d$, $\eta = b$ mit de Richtungskoeffizienten $-\frac{1}{6x}$ ausgeht, Intervall $0 \leqq \xi \leqq d$ oberhalb bzw. unte halb der ξ-Achse. Daher kann man offe bar (s. die Figur!) zwei Kurven $\eta = f_1(\xi)$ $\eta = f_2(\xi)$ konstruieren, wo die Funktion $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$ für $0 \leqq \xi \leqq d$ definiert si und stetige erste Ableitung besitze so daß

$$f_i(0) = a, \quad f_i(d) = b, \quad f_i'(0) = f_i'(d) = -\frac{1}{6x},$$

$$f_i'(\xi) \leqq -\frac{1}{6x} \quad \text{für} \quad 0 \leqq \xi \leqq d \qquad (i = 1, 2$$

$$\int_a^b f_1(\xi)\,d\xi < 0, \qquad \int_a^b f_2(\xi)\,d\xi > 0.$$ [10])

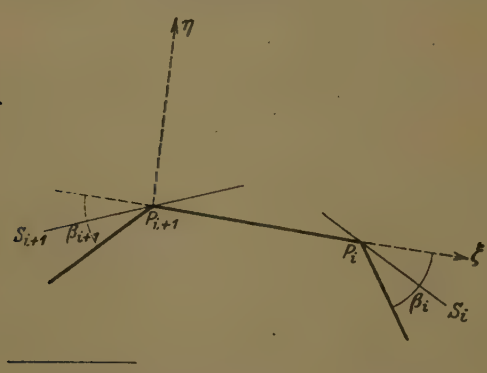
Ich setze nun

$$\int_a^b f_1(\xi)\,d\xi = J_1, \quad \int_a^b f_2(\xi)\,d\xi = J_2;$$

dann besitzt die Funktion

$$f(\xi) = \frac{J_2 f_1(\xi) - J_1 f_2(\xi)}{J_2 - J_1}$$

offenbar die Eigenschaften (α), w. z. b. w.



Nun können wir an Konstruktion der Kurve herantreten.

Es sei $\overline{P_i P_{i+1}}$ eine Se von $Q(x)$; ich zeichne in bzw. P_{i+1} die Symmetrale bzw. S_{i+1} des Außenwinkels bzw. β_{i+1} von $Q(x)$. N führe ich neue Koordinat achsen ξ, η ein; die ξ-Ac sei die Gerade $\overline{P_{i+1} P_i}$, wo

[10]) Um z. B. $\eta = f_1(\xi)$ zu konstruieren, kann man so verfahren: Man neh vom Punkte $(0, a)$ ausgehend, ein kleines Stück der Geraden I, dann verbinde I mit II durch eine genügend steile Strecke und nehme noch das übrigbleibe Stück der Geraden II bis zum Punkte (d, b). Die beiden Ecken dieses Strec zuges runde man dann durch kleine Kreisbogen ab.

sitive Sinn von P_{i+1} nach P_i hinweist; die η-Achse sei die in P_{i+1} f ξ senkrecht stehende Gerade, positiv nach außen von $Q(x)$ gerechnet.

Nach Hilfssatz 3 und 4 ist für $x > c$:

$$\text{die Länge von } \overline{P_i P_{i+1}} = d_i < x^{\frac{1}{3}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta_{i+1}}{2} > \frac{1}{3}\operatorname{tg}\beta_{i+1} > \frac{1}{6x^{\frac{1}{3}}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta_i}{2} > \frac{1}{3}\operatorname{tg}\beta_i > \frac{1}{6x^{\frac{1}{3}}}.$$

aher gibt es nach Hilfssatz 5 eine Funktion $f(\xi)$, die die Eigenschaften) mit $d = d_i$, $a = \operatorname{tg}\frac{\beta_{i+1}}{2}$, $b = -\operatorname{tg}\frac{\beta_i}{2}$ besitzt. Ich setze noch

$$F(\xi) = \int_0^{\xi} f(\xi)\,d\xi \qquad (0 \leqq \xi \leqq d_i).$$

ie Kurve C_i:

$$\eta = F(\xi), \qquad 0 \leqq \xi \leqq d_i$$

t dann folgende Eigenschaften:

1. $F(0) = F(d_i) = 0$; d. h.: C_i geht durch P_{i+1} und P_i.

2. Es ist $F'(\xi) = f(\xi)$, $F''(\xi) = f'(\xi)$; also hat C_i eine stetig ver- derliche Tangente und einen stetig veränderlichen Krümmungsradius, r, weil $F''(\xi)$ endlich, nirgends verschwindet.

3. $F'(0) = \operatorname{tg}\frac{\beta_{i+1}}{2}$, $F'(d_i) = -\operatorname{tg}\frac{\beta_i}{2}$; also berührt C_i in P_{i+1} bzw. die Symmetrale S_{i+1} bzw. S_i.

4. $F'(\xi)$ nimmt monoton ab; es ist aber nach Hilfssatz 4

$$F'(0) = \operatorname{tg}\frac{\beta_{i+1}}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta_{i+1} < \frac{5}{x^{\frac{1}{3}}},$$

$$F'(d_i) = -\operatorname{tg}\frac{\beta_i}{2} > -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta_i > -\frac{5}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

aher ist für $0 \leqq \xi \leqq d_i$

3) $$|F'(\xi)| < \frac{5}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

5. Der absolute Betrag des Krümmungsradius von C_i ist

$$\leqq (1 + F'^2(\xi))^{\frac{3}{2}}\,6x < 7x \text{ (nach (23), für } x > c);$$

in P_{i+1} ist er gleich $\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\beta_{i+1}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} 6x$,

in P_i ist er gleich $\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\beta_i}{2}\right)^{\frac{3}{2}} 6x$.

6. Die Länge von C_i ist gleich

$$\int_0^{d_i} \sqrt{1+F'^2(\xi)}\,d\xi \leqq \int_0^{d_i} (1+F'^2(\xi))\,d\xi < d_i\left(1+\frac{25}{x^{\frac{2}{3}}}\right)$$

(nach (23)).

Die Kurven C_i $(i=0, 1, \ldots, 8n-1)$ bilden zusammen eine Kur die ich mit C_x' bezeichnen will und die wirklich alle verlangten Eige schaften besitzt. Denn:

1. C_x' ist eine einfache, geschlossene, stetige Kurve, die durch a Ecken von $Q(x)$ hindurchgeht.

2. C_x' hat eine stetig veränderliche Tangente; dies ist klar in jed inneren Punkte eines Bogens C_i; aber auch im Punkte P_i ist es wahr, hier C_{i-1} und C_i dieselbe Gerade S_i berühren.

3. C_x' hat einen stetig veränderlichen, nicht verschwindenden Krü mungsradius; das ist wieder klar in jedem inneren Punkte einer C_i; a auch im Punkte P_i ist es wahr, da hier C_{i-1} und C_i denselben Krümmun radius $\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\beta_i}{2}\right)^{\frac{3}{2}} 6x$ besitzen.

4. Der absolute Betrag des Krümmungsradius von C_x' ist stets < 7 Aus 1., 3. und 4. folgt weiter, daß C_x' eine konvexe Kurve ist.

5. Die Länge von C_x' ist $< \sum_{i=0}^{8n-1} d_i\left(1+\frac{25}{x^{\frac{2}{3}}}\right) < \left(1+\frac{25}{x^{\frac{2}{3}}}\right)x = x+25x$

Damit ist der zweite Schritt durchgeführt[11]).

3. Schritt. Nun definiere ich die Kurve C_x folgendermaßen: jedem $x>c$ gibt es ein $y>c$ so, daß $x=y+25y^{\frac{1}{3}}$ ist. Ich neh für C_x die Kurve C_y'. Dann ist C_x eine einfache, geschlossene, konve Kurve, die eine stetig veränderliche Tangente und einen stetig veränd lichen, nicht verschwindenden Krümmungsradius besitzt, dessen absolu Betrag in jedem Punkte $< 7y < 7x$ ist. Die Länge von C_x ist klei als $y+25y^{\frac{1}{3}}=x$; also gehört C_x zur Klasse $M(x)$. Weiter ist die A zahl der Gitterpunkte auf C_x mindestens gleich der Anzahl der Ec von $Q(y)$, d. h. es ist nach (22)

$$g_{C_x} \geqq \frac{3}{\sqrt[3]{2\pi}} y^{\frac{2}{3}} + O(y^{\frac{1}{3}}) = \frac{3}{\sqrt[3]{2\pi}} x^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}}).$$

Damit ist also die Aussage (A) bewiesen, also auch der Satz 2.

---

[11]) Freilich kann ich C_x' bei gegebenem x auf mehrere Weisen konstruieren, in der Wahl der Funktion $f(\xi)$, die im Hilfssatz 5 vorkommt, eine gewisse Will besteht.

Ich bemerke noch ausdrücklich — zwecks der folgenden Anwendung: ı $Q(y)$ den Anfangspunkt im Inneren enthält, so gilt dasselbe auch n C_y', d. h. von C_x.

§ 5.

Eine Anwendung des Satzes 2.

H. van der Corput hat[12]) einen allgemeinen Satz bewiesen, der sich f die Abschätzung der Anzahl der Gitterpunkte in ebenen Bereichen zieht. Auf S. 5 seiner Annalenarbeit findet sich ein Korollar jenes tzes, auf welches sich meine Anwendung beziehen wird. Der Leser wird h leicht überzeugen, daß in jenem Korollar folgender Satz als Spezialll enthalten ist[13]):

Es sei jedem $x > c$ eine geschlossene, konvexe Kurve K_x der u-v-Ebene geordnet, die eine stetig veränderliche Tangente und einen stetig veränderlichen Krümmungsradius besitzt. Die obere Grenze des absoluten trages des Krümmungsradius auf K_x sei $O(\sqrt{x})$; es sei $A(x)$ die Anhl der Gitterpunkte innerhalb und auf K_x, $J(x)$ der Inhalt des von K_x geschlossenen Bereiches. Dann ist

4) $$A(x) = J(x) + O(x^{\frac{1}{3}}).$$

Ich will zeigen: Der Satz wird falsch, wenn in (24) o statt O gerieben wird. (Daraus folgt dann sofort, daß auch das Korollar des van der Corput falsch wird, wenn in ihm $O(x^{\frac{1}{3}})$ durch $o(x^{\frac{1}{3}})$ ersetzt rd, d. h. sein Korollar läßt sich nicht verschärfen.)

Um dies zu zeigen, konstruiere ich die Kurven K_x folgendermaßen: r jede ganze Zahl $g > c$ nehme ich für K_g die Kurve $C_{\sqrt{g}}$ aus § 4; $g - \frac{1}{2} < x \leqq g + \frac{1}{2}$ nehme ich für K_x die Kurve $\sqrt{\frac{x}{g}}\, C_{\sqrt{g}}$, d. h. die rve, die aus $C_{\sqrt{g}}$ durch homothetische Transformation im Verhältnis $\sqrt{\frac{x}{g}}$ bezug auf den Nullpunkt entsteht. Dann ist K_x eine konvexe, gelossene Kurve mit stetig veränderlicher Tangente und stetig veränderhem Krümmungsradius, dessen absoluter Betrag stets kleiner ist als $\sqrt{\frac{x}{g}}\, 7\sqrt{g} = 7\sqrt{x}$. Daher ist der letztgenannte Satz auf K_x anwendbar. enn nun x wachsend durch den Wert g hindurchgeht, so ändert sich r Inhalt $J(x)$ stetig; dagegen wächst $A(x)$ sprungweise genau um die

[12]) *Over roosterpunten in het platte vlak*, 128 S., Noordhoff, Groningen 1919; *Über terpunkte in der Ebene*, Math. Annalen 81, S. 1—20; ich zitiere nach der Annalenzeit.

[13]) Man lese nur die S. 3—5 seiner Annalenarbeit nach!

Anzahl der Gitterpunkte, die auf K_g liegen (weil der Anfangspunkt i Inneren von K_x liegt); diese Anzahl ist aber gleich $\frac{3}{\sqrt[3]{2\pi}} g^{\frac{1}{3}} + O(g^{\frac{1}{3}})$; d her kann eine Beziehung

$$A(x) = J(x) + o(x^{\frac{1}{3}})$$

nicht stattfinden, womit die Behauptung bewiesen ist.

§ 6.

Schlußbemerkung.

Alle zum Beweise der Sätze 1 und 2 benutzten Hilfsmittel war elementar, bis auf die Benutzung des Sierpińskischen Satzes

$$R(y) = O(y^{\frac{1}{3}}) \tag{25}$$

im Beweise des Hilfssatzes 2. Übrigens funktioniert der Beweis auc wenn wir statt (25) die schwächere Abschätzung

$$R(y) = O(y^c)$$

mit einem beliebigen $c < \frac{1}{2}$ benutzen. Aber auch die triviale Abschätzu

$$R(y) = O(y^{\frac{1}{2}})$$

führt zum Ziel, nur daß dann im Satze 1 und 2 statt $O(x^{\frac{1}{3}})$ r $O(x^{\frac{1}{3}} \log x)$ herauskommt.

Ich möchte diese Gelegenheit nicht vorübergehen lassen, ohne d Herrn Prof. E. Landau in Göttingen und dem Herrn Prof. K. Petr Prag für ihre mannigfache Anregung, ihre wertvollen Winke und ihr Intere an meinen Arbeiten meinen Dank auszusprechen.

(Eingegangen am 18. Januar 1925).

Über Gitterpunkte in vierdimensionalen Ellipsoiden.

Von

H. D. Kloosterman in Den Haag.

Einleitung.

In Bd. 19 dieser Zeitschrift hat Herr Walfisz die vorher bekannten bschätzungen der Anzahl der Gitterpunkte in k-dimensionalen Ellipsoiden $\geqq 8$) erheblich verschärft. In Bd. 21 hat Herr Landau durch Abderung der Walfiszschen Methode dasselbe für $k \geqq 4$ getan. Für $k = 4$ t sein Resultat folgendes:

Es sei

$$Q(u) = \sum_{\mu,\nu=1}^{4} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu \qquad (a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu})$$

ne positiv definite quadratische Form mit rationalen Koeffizienten und er Determinante D; α_1, α_2, α_3, α_4 mögen rationale Zahlen bedeuten. ür $x > 0$ sei

$$F(x) = \sum_{Q(m) \leqq x} e^{2\pi i(\alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_4 m_4)}$$

e über die Gitterpunkte des k-dimensionalen Ellipsoids $Q(m) \leqq x$ erreckte Summe der „Gewichte" $e^{2\pi i(\alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_4 m_4)}$. Dann ist

$$F(x) = \delta \frac{\pi^2}{2\sqrt{D}} x^2 + O(x \log^2 x), \tag{1}$$

o $\delta = 1$ oder $= 0$, je nachdem alle α ganzzahlig sind oder nicht.

Ich will jetzt zeigen, daß man in gewissen Fällen das Restglied (1) zu $O(x \log x)$ verschärfen kann, und zwar werde ich den folgenden atz beweisen:

Hauptsatz. *Die Anzahl $F(x)$ der Gitterpunkte des vierdimensionalen llipsoids (a, b, c, d positive ganze Zahlen)*

$$a u_1^2 + b u_2^2 + c u_3^2 + d u_4^2 \leqq x$$

t

$$F(x) = \frac{\pi^2}{2\sqrt{abcd}} x^2 + O(x \log x). \tag{2}$$

Herr Landau leitet sein Resultat (1) her aus der folgenden Form

$$(3) \qquad F(x) = \frac{\pi^2}{\sqrt{D}} \sum_{\substack{q \leqq \sqrt{x} \\ q \equiv 0 \pmod H}} \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q,(a)}}{q^4} \sum_{0 \leqq n \leqq x} n e^{\frac{2\pi i n p}{q}} + O(x \log x).$$

Hier ist H der Hauptnenner von $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$; Σ' bedeutet, daß p zu teilerfremd ist und

$$(4) \qquad S_{p,q,(a)} = \sum_{(a)=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{p}{q} Q(a) + 2\pi i (\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_4 a_4)},$$

wo (a) geschrieben ist für a_1, a_2, a_3, a_4.

In dem hier betrachteten speziellen Falle ist

$$(5) \qquad S_{p,q,(a)} = S_{ap,q} S_{bp,q} S_{cp,q} S_{dp,q},$$

wo rechts die gewöhnlichen Gaußschen Summen gemeint sind:

$$S_{p,q} = \sum_{j=0}^{q-1} e^{\frac{2\pi i p j^2}{q}}.$$

Bei dem Beweise von (2) werden wir in (5) die exakten Werte d Gaußschen Summen einsetzen. Dies macht den Beweis recht kompliziert

Nach Berechnung der verallgemeinerten Gaußschen Summen (4) würde sich vielleicht entscheiden lassen, ob das Restglied auch im allgemeinen Falle $O(x \log x)$ ist oder nicht.

§ 1.

Hilfssätze über die Summen $\sigma_q^{(h)}(n)$.

Ich schreibe (y, q) für den größten gemeinsamen Teiler von y und $(y = a, b, c, d)$ und

$$y = (y, q) y_q, \qquad q = (y, q) q_y,$$
$$q_y = 2^\mu Q_y \quad (Q_y \text{ ungerade}).$$

Die Größe $\eta(p, q, y)$ sei definiert durch

$$(6) \quad \begin{cases} \eta(p,q,y) = 1 & \text{für } q_y = \text{ungerade} = Q_y; \\ = 0 & \text{für } q_y \equiv 2 \pmod 4; \\ = e^{\frac{1}{4} v_q p Q_y \pi i} & \text{für } q_y = 2^\mu Q_y \text{ und } \mu \text{ ungerade} > 2; \\ = 1 + e^{\frac{1}{2} v_q p Q_y \pi i} & \text{für } q_y = 2^\mu Q_y \text{ und } \mu \text{ gerade} \geqq 2. \end{cases}$$

$$(7) \quad \zeta(p,q,a,b,c,d) = \zeta(p,q) = \eta(p,q,a)\,\eta(p,q,b)\,\eta(p,q,c)\,\eta(p,q,d$$

A_q ist eine nur von q, a, b, c, d abhängige Größe, nicht immer di selbe, die, absolut genommen, für alle Werte von q unterhalb einer en lichen, nur von a, b, c, d abhängigen Schranke bleibt.

$\left(\frac{L}{M}\right)$ ist für ungerades positives M und $(L, M)=1$ das Symbol von gendre-Jacobi $\left(\left(\frac{L}{1}\right)=1\right)$.

Immer ist $(p, q)=1$. $\sum_{p=0}^{q-1}{}'$ bedeutet Summation über alle p mit $\leqq p \leqq q-1$ und $(p, q)=1$.

Die Summen $c_q(n)$ von Ramanujan sind definiert durch

$$c_q(n)=\sum_{p=0}^{q-1}{}' e^{-\frac{2\pi i p n}{q}}.$$

kanntlich ist

$$c_q(n)=\sum_{\delta \mid (q, n)} \delta \mu\left(\frac{q}{\delta}\right)$$

l

$$c_{qq'}(n)=c_q(n)\, c_{q'}(n)$$

$(q, q')=1$.

Hilfssatz 1. *Es ist*

$$S_{ap, q} S_{bp, q} S_{cp, q} S_{dp, q}=A_q\left(\frac{p}{Q_a Q_b Q_c Q_d}\right)\zeta(p, q)\, q^2.$$

es folgt aus den bekannten Werten für die Gaußschen Summen (siehe 3. Bachmann, Die analytische Zahlentheorie, 1894, S. 146—187).

Hilfssatz 2. *Es ist*

$$F(x)=\frac{\pi^2}{2\sqrt{abcd}} x^2+\sum_{2 \leqq q \leqq \sqrt{x}} \frac{A_q}{q^2} \sum_{0 \leqq n \leqq x} n\, s_q(n)+O(x \log x),$$

)

$$s_q(n)=\sum_{p=0}^{q-1}{}'\left(\frac{p}{Q_a Q_b Q_c Q_d}\right)\zeta(p, q)\, e^{-\frac{2\pi i n p}{q}}.$$

Beweis. Aus (3) und (5) folgt:

$$x)=\frac{\pi^2}{\sqrt{abcd}} \sum_{q \leqq \sqrt{x}} \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S_{ap, q} S_{bp, q} S_{cp, q} S_{dp, q}}{q^4} \sum_{0 \leqq n \leqq x} n\, e^{-\frac{2\pi i n p}{q}}+O(x \log x).$$

s Glied $q=1$ liefert:

$$\frac{\pi^2}{\sqrt{abcd}} \sum_{0 \leqq n \leqq x} n=\frac{\pi^2}{2\sqrt{abcd}} x^2+O(x).$$

übrigen Glieder liefern wegen Hilfssatz 1:

$$\sum_{2 \leqq q \leqq \sqrt{x}} \frac{A_q}{q^2} \sum_{0 \leqq n \leqq x} n\, s_q(n).$$

mit der Hilfssatz 2 bewiesen ist.

Hilfssatz 3. *Für* $q_y \not\equiv 2 \pmod 4$ $(y = a, b, c, d)$ *ist*

$$s_q(n) = \sum_{h=1}^{A_q} \sigma_q^{(h)}(n),$$

wo

$$\sigma_q^{(h)}(n) = \sum_{p=0}^{q-1}{}' \left(\frac{p}{Q_a Q_b Q_c Q_d}\right) e^{\frac{1}{4}\nu_h \pi i p} e^{-\frac{2\pi i n p}{q}}$$

und die ν_h *ganze Zahlen sind, die nicht von* p *abhängen. Falls eine o*
mehrere der Zahlen $q_a, q_b, q_c, q_d \equiv 2 \pmod 4$ *sind, ist* $s_q(n) = 0$.

Beweis. Folgt aus (10), (7) und (6). Übrigens kann man noch
merken, daß immer

$$2^{\xi-3}\nu_h = \text{ganze Zahl}, \tag{11}$$

wenn $q = 2^\xi Q$ (Q ungerade). Für $\xi \geqq 3$ ist dies trivial.

Für $\xi = 2$ ist $q_a = 2^\alpha Q_a$, $q_b = 2^\beta Q_b$, $q_c = 2^\gamma Q_c$, $q_d = 2^\delta Q_d$,
α, β, γ und δ entweder 0 oder 2 sind, also wegen der ersten und letzt
Formel (6) jedenfalls $\nu_h \equiv 0 \pmod 2$.

Für $\xi = 1$ oder $\xi = 0$ sind q_a, q_b, q_c, q_d alle ungerade, also weg
der ersten Formel (6) eben $\nu_h \equiv 0 \pmod 8$.

Falls q_a, q_b, q_c, q_d alle ungerade sind, tritt nur eine Summe $\sigma_q^{(h)}($
auf (nach der ersten Formel (6)) und zwar die Summe

$$\sigma_q(n) = \sum_{p=0}^{q-1}{}' \left(\frac{p}{Q_a Q_b Q_c Q_d}\right) e^{-\frac{2\pi i n p}{q}}, \tag{12}$$

also eine Summe $\sigma_q^{(h)}(n)$ mit $\nu_h \equiv 0 \pmod 8$.

Hilfssatz 4. *Falls* $q = 2^\xi Q$ (Q *ungerade*), $q_y \not\equiv 2 \pmod$
$(y = a, b, c, d)$, *ist*

$$\sigma_q^{(h)}(n) = \left(\frac{2}{Q_a Q_b Q_c Q_d}\right)^\xi \sigma_Q(n)\, c_{2^\xi}(2^{\xi-3}\nu_h Q - n),$$

wo $\sigma_Q(n)$ *die durch* (12) *definierte Summe ist.*

Beweis. Es ist

$$\sigma_q^{(h)}(n) = \sum_{P=0}^{q-1}{}' \left(\frac{P}{Q_a Q_b Q_c Q_d}\right) e^{\frac{1}{4}\nu_h \pi i P} e^{-\frac{2\pi i n P}{q}}.$$

Ich schreibe $P = 2^\xi p + Q p'$, wo p ein reduziertes Restsystem mod Q u
p' ein reduziertes Restsystem mod 2^ξ durchläuft. Dann folgt wegen (1

$$\sigma_q^{(h)}(n) = \sum_{p=0}^{Q-1}{}' \sum_{p'=0}^{2^\xi-1}{}' \left(\frac{2^\xi p + Q p'}{Q_a}\right) \cdots \left(\frac{2^\xi p + Q p'}{Q_d}\right) e^{\frac{1}{4}\nu_h \pi i Q p'} e^{-\frac{2n\pi i p}{Q}} e^{-\frac{2n\pi i}{2^\xi}}$$

$$= \left(\frac{2}{Q_a Q_b Q_c Q_d}\right)^\xi \sum_{p=0}^{Q-1}{}' \left(\frac{p}{Q_a Q_b Q_c Q_d}\right) e^{-\frac{2n\pi i p}{Q}} \sum_{p'=0}^{2^\xi-1}{}' e^{\frac{1}{4}\nu_h \pi i Q p'} e^{-\frac{2n\pi i p'}{2^\xi}},$$

o wegen (12):

$$\sigma_q^{(k)}(n) = \left(\frac{2}{Q_a Q_b Q_c Q_d}\right)^{\xi} \sigma_Q(n)\, c_{2\xi}(2^{\xi-3}\nu_k Q - n).$$

Hilfssatz 5. *Wenn Q und Q' ungerade Zahlen sind und $(Q, Q') = 1$, nn ist*

$$\sigma_{QQ'}(n) = \left(\frac{Q'}{Q_a Q_b Q_c Q_d}\right)\left(\frac{Q}{Q_a' Q_b' Q_c' Q_d'}\right)\sigma_Q(n)\,\sigma_{Q'}(n).$$

Beweis. Wegen $(Q, Q') = 1$ ist

$$(QQ')_y = Q_y Q_y' \qquad (y = a, b, c, d),$$

o

$$\sigma_{QQ'}(n) = \sum_{P=0}^{QQ'-1}{}' \left(\frac{P}{Q_a Q_a'}\right)\cdots\left(\frac{P}{Q_d Q_d'}\right) e^{-\frac{2\pi i n P}{QQ'}}.$$

zt man

$$P = pQ' + p'Q,$$

p ein reduziertes Restsystem mod Q und p' ein reduziertes Rest-tem mod Q' durchläuft, so ist

$$\left(\frac{P}{Q_y Q_y'}\right) = \left(\frac{pQ'+p'Q}{Q_y}\right)\left(\frac{pQ'+p'Q}{Q_y'}\right) = \left(\frac{Q'}{Q_y}\right)\left(\frac{Q}{Q_y'}\right)\left(\frac{p}{Q_y}\right)\left(\frac{p'}{Q_y'}\right) \quad (y = a, b, c, d),$$

o

$$= \left(\frac{Q'}{Q_a Q_b Q_c Q_d}\right)\left(\frac{Q}{Q_a' Q_b' Q_c' Q_d'}\right)\sum_{p=0}^{Q-1}{}'\sum_{p'=0}^{Q'-1}{}'\left(\frac{p}{Q_a Q_b Q_c Q_d}\right)\left(\frac{p'}{Q_a' Q_b' Q_c' Q_d'}\right) e^{-\frac{2\pi i n (pQ'+p'Q)}{QQ'}}$$

$$= \left(\frac{Q'}{Q_a Q_b Q_c Q_d}\right)\left(\frac{Q}{Q_a' Q_b' Q_c' Q_d'}\right)\sigma_Q(n)\,\sigma_{Q'}(n).$$

Hilfssatz 6. *Es sei Q eine ungerade Zahl und*

3) $$Q = \prod_{\omega \mid Q} \omega^{\lambda}$$

e Zerlegung in Primfaktoren. Dann ist

$$\sigma_Q(n) = A_Q \prod_{\omega \mid Q} \sigma_{\omega^\lambda}(n).$$

Beweis. Folgt durch wiederholte Anwendung von Hilfssatz 5.

Hilfssatz 7. *Es seien für jede durch* (13) *bestimmte Primzahl-lenz ω^λ die Zahlen μ_y $(y = a, b, c, d)$ bestimmt durch*

$$(\omega^\lambda)_y = \frac{\omega^\lambda}{(y, \omega^\lambda)} = \omega^{\mu_y}$$

d es sei

$$N(\omega^\lambda) = N = \mu_a + \mu_b + \mu_c + \mu_d.$$

Dann ist

$$\sigma_{\omega^\lambda}(n) = c_{\omega^\lambda}(n), \quad \textit{falls } N \textit{ gerade ist};$$
$$\sigma_{\omega^\lambda}(n) = 0, \quad \textit{falls } N \textit{ ungerade ist, ausgenomm}$$

wenn die Primzahl ω genau in der $(\lambda-1)$-ten Potenz in n aufgeht, welchem Falle

$$\sigma_{\omega^\lambda}(n) = -c_{\omega^\lambda}(n)\cdot S_{-n',\omega},$$

wo n' bestimmt ist durch

$$n = \omega^{\lambda-1} n', \qquad (n', \omega) = 1.$$

Beweis. Es ist

$$\sigma_{\omega^\lambda}(n) = \sum_{p=0}^{\omega^\lambda-1}{}' \left(\frac{p}{(\omega^\lambda)_a (\omega^\lambda)_b (\omega^\lambda)_c (\omega^\lambda)_d}\right) e^{\frac{2\pi i n p}{\omega^\lambda}} = \sum_{p=0}^{\omega^\lambda-1}{}' \left(\frac{p}{\omega}\right)^N e^{-\frac{2\pi i n p}{\omega^\lambda}}$$

Dies ist $c_{\omega^\lambda}(n)$, falls N gerade ist. Falls N ungerade ist, kann man schreib

$p = p' + \nu\omega$, wo $0 \leqq p' \leqq \omega - 1$, $(p', \omega) = 1$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, \omega^{\lambda-1} -$

Also

$$\sigma_{\omega^\lambda}(n) = \sum_{p'=0}^{\omega-1}{}' \left(\frac{p'}{\omega}\right) e^{-\frac{2n\pi i p'}{\omega^\lambda}} \sum_{\nu=0}^{\omega^{\lambda-1}-1} e^{-\frac{2n\pi i \nu}{\omega^{\lambda-1}}}.$$

Die innere Summe ist 0, ausgenommen, wenn $n = \omega^{\lambda-1} n'$. Fa $(n', \omega) > 1$, ist

$$\sigma_{\omega^\lambda}(n) = \omega^{\lambda-1} \sum_{p'=0}^{\omega-1}{}' \left(\frac{p'}{\omega}\right) = 0.$$

Falls $(n', \omega) = 1$, ist

$$\sigma_{\omega^\lambda}(n) = \omega^{\lambda-1} \sum_{p'=0}^{\omega-1}{}' \left(\frac{p'}{\omega}\right) e^{-\frac{2n'\pi i p'}{\omega}} = \omega^{\lambda-1} S_{-n',\omega},$$

wo $S_{-n',\omega}$ eine Gaußsche Summe ist. Für $n = \omega^{\lambda-1} n'$, $(n', \omega) =$ ist aber

$$c_{\omega^\lambda}(n) = -\omega^{\lambda-1},$$

also

$$\sigma_{\omega^\lambda}(n) = -c_{\omega^\lambda}(n) S_{-n',\omega}.$$

Hilfssatz 8. *Es sei $q = 2^\xi Q$ (Q ungerade, $q_y \not\equiv 2 \pmod 4$ $y = a, b, c, d$) und*

$$\pi_1^{\varkappa_1}, \pi_2^{\varkappa_2}, \ldots, \pi_r^{\varkappa_r}$$

seien diejenigen Primzahlpotenzen von Q, für welche N ungerade ist, u

$$\omega_1^{\lambda_1}, \omega_2^{\lambda_2}, \ldots, \omega_s^{\lambda_s}$$

diejenigen Primzahlpotenzen von Q, für welche N gerade ist, so daß

$$q = 2^\xi \pi_1^{\varkappa_1} \pi_2^{\varkappa_2} \ldots \pi_r^{\varkappa_r} \omega_1^{\lambda_1} \omega_2^{\lambda_2} \ldots \omega_s^{\lambda_s}.$$

nn ist

$$\sigma_q^{(h)}(n) = A_q c_q\left(-n+\frac{1}{8}\nu_h q\right), \quad \textit{falls } r=0;$$

$$\sigma_q^{(h)}(n) = 0, \quad \textit{falls } r>0,$$

genommen, wenn die sämtlichen Primzahlen $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r$ genau in Potenzen $\varkappa_1-1, \varkappa_2-1, \ldots, \varkappa_r-1$ in n aufgehen, in welchem Falle

$$\sigma_q^{(h)}(n) = A_q c_q(-n+\tfrac{1}{8}\nu_h q)\cdot \prod_{t=1}^{r}\left(\frac{n^{(t)}}{\pi_t}\right),$$

$n = \pi_t^{\varkappa_t-1} n^{(t)}$ gesetzt ist.

Beweis. Nach Hilfssatz 4 ist

$$\sigma_q^{(h)}(n) = A_q \sigma_Q(n) c_2 \xi(2^{\xi-3}\nu_h Q - n),$$

l nach Hilfssatz 6:

$$\sigma_Q(n) = A_q \prod_{t=1}^{r} \sigma_{\pi_t^{\varkappa_t}}(n) \prod_{t=1}^{s} \sigma_{\omega_t^{\lambda_t}}(n).$$

Falls $r=0$ ist nach Hilfssatz 7:

$$\sigma_Q(n) = A_q \prod_{t=1}^{s} c_{\omega_t^{\lambda_t}}(n) = A_q c_Q(n).$$

o nach (14):

$$\sigma_q^{(h)}(n) = A_q c_Q(n) c_2 \xi(2^{\xi-3}\nu_h Q - n) = A_q c_q(-n+\tfrac{1}{8}\nu_h q).$$

Falls $r>0$ ist nach (15) und Hilfssatz 7:

$$\sigma_Q(n) = 0, \quad \text{also auch} \quad \sigma_q^{(h)}(n) = 0,$$

genommen, wenn die sämtlichen Primzahlen $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r$ genau in den enzen $\varkappa_1-1, \varkappa_2-1, \ldots, \varkappa_r-1$ in n aufgehen, in welchem Falle

$$\sigma_Q(n) = A_q \prod_{t=1}^{r} c_{\pi_t^{\varkappa_t}}(n) S_{-n^{(t)},\pi_t} \prod_{t=1}^{s} c_{\omega_t^{\lambda_t}}(n) = A_q c_Q(n) \prod_{t=1}^{r} S_{-n^{(t)},\pi_t}.$$

kanntlich ist

$$S_{-n^{(t)},\pi_t} = A_q\left(\frac{n^{(t)}}{\pi_t}\right)\sqrt{\pi_t},$$

o

$$\sigma_Q(n) = A_q c_Q(n)\cdot A_q^r \sqrt{\pi_1\pi_2\ldots\pi_r}\cdot \prod_{t=1}^{r}\left(\frac{n^{(t)}}{\pi_t}\right).$$

ist aber

$$A_q^r\sqrt{\pi_1\pi_2\ldots\pi_r} = A_q,$$

l jede der Zahlen $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r$ in wenigstens einer der Zahlen a, b, c, d gehen muß (denn sonst wäre $N(\pi_t^{\varkappa_t})$ gerade).

Aus (14), (16), (17) folgt jetzt

$$\sigma_q^{(h)}(n) = A_q c_Q(n) c_2^{\xi}(2^{\xi-3}\nu_h Q - n) \prod_{t=1}^{r}\left(\frac{n^{(t)}}{\pi_t}\right) = A_q c_q\left(-n+\frac{1}{8}\nu_h q\right) \prod_{t=1}^{r}\left(\frac{n^{(t)}}{\pi_t}\right)$$

§ 2.

Beweis des Hauptsatzes.

Für den Beweis von (2) genügt es nach Hilfssatz 2

$$\sum_{2 \leqq q \leqq \sqrt{x}} \frac{A_q}{q^2} \sum_{0 \leqq n \leqq x} n s_q(n) = O(x \log x) \tag{18}$$

nachzuweisen.

Die Summe (18) zerfällt nach Hilfssatz 3 in eine Anzahl A_o v Summen

$$\sum_{q} \frac{A_q}{q^2} \sum_{0 \leqq n \leqq x} n \sigma_q^{(h)}(n), \tag{19}$$

wo q ein System S von ganzen Zahlen durchläuft, wovon für jedes q gi $2 \leqq q \leqq \sqrt{x}$. Es genügt also, zu zeigen, daß die Summen (19) $O(x \log$ sind, und für dieses genügt es wieder, für $1 \leqq m \leqq x$

$$s_m = \sum_{q} \frac{A_q}{q^2} \sum_{n=1}^{m} \sigma_q^{(h)}(n) = O(\log x) \tag{20}$$

gleichmäßig nachzuweisen. Denn aus (20) folgt durch partielle Summati

$$\sum_{q} \frac{A_q}{q^2} \sum_{0 \leqq n \leqq x} n \sigma_q^{(h)}(n) = \sum_{0 \leqq n \leqq x} n(s_n - s_{n-1}) = \sum_{0 \leqq n \leqq x} s_n(n - (n+1)$$
$$+([x]+1)s_{[x]} = O(x \log x).$$

Um (20) zu beweisen, zerlegen wir die Summe s_m, wo q das Syste von ganzen Zahlen S durchläuft, in zwei Summen

$$s_m = \sum_{q} = \sum_{q}^{(1)} + \sum_{q}^{(2)},$$

wo in $\sum^{(1)}$ die Zahl q alle diejenigen ganzen Zahlen des Systems S dure läuft, wofür die Zahl r des Hilfssatzes 8 gleich null ist, und wo in $\sum$ die Zahl q alle diejenigen ganzen Zahlen des Systems S durchläuft, wo die Zahl $r > 0$ ist.

Beweis von $\sum^{(1)} = O(\log x)$.

Nach Hilfssatz 8 ist

$$\sum^{(1)} = \sum_{q} \frac{A_q}{q^2} \sum_{n=1}^{m} c_q\left(-n+\frac{1}{8}\nu_h q\right),$$

nach (8):

$$\sum^{(1)} = \sum_q \frac{A_q}{q^2} \sum_{n=1}^{m} \sum_{\delta \mid (-n+\frac{1}{8}\nu_h q)} \delta \mu\left(\frac{q}{\delta}\right) = \sum_q \frac{A_q}{q^2} \sum_{\delta \mid q} \delta \mu\left(\frac{q}{\delta}\right) \sum_{n=1 \atop \delta \mid (-n-\frac{1}{8}\nu_h q)}^{m} 1.$$

ist aber

$$\sum_{n=1 \atop \delta \mid (-n+\frac{1}{8}\nu_h q)}^{m} 1 = \frac{m}{\delta} + O(1),$$

$$\sum^{(1)} = m \sum_q \frac{A_q}{q^2} \sum_{\delta \mid q} \mu\left(\frac{q}{\delta}\right) + O\Big(\sum_{1 \leqq q \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{q^2} \sum_{\delta \mid q} \delta \Big)$$

$$= 0 + O\Big(\sum_{1 \leqq \delta \leqq \sqrt{x}} \delta \sum_{q_1=1}^{\infty} \frac{1}{q_1^2 \delta^2} \Big) = O\Big(\sum_{1 \leqq \delta \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{\delta} \Big) = O(\log x).$$

Beweis von $\sum^{(2)} = O(\log x)$.

Nach Hilfssatz 8 ist

$$\sum^{(2)} = \sum_q \frac{A_q}{q^2} \sum_{n=1}^{m}{}'' c_q\left(-n + \frac{1}{8}\nu_h q\right) \prod_{t=1}^{r} \left(\frac{n^{(t)}}{\pi_t}\right),$$

n nur diejenige Werte durchläuft, in denen die Primzahlen $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r$ au in den Potenzen $\varkappa_1 - 1, \varkappa_2 - 1, \ldots, \varkappa_r - 1$ aufgehen, was durch $\sum_{n=1}^{m}{}''$ gegeben ist.

Nach (8) ist also

$$\sum^{(2)} = \sum_q \frac{A_q}{q^2} \sum_{n=1}^{m}{}'' \sum_{\delta \mid (-n+\frac{1}{8}\nu_h q)} \delta \mu\left(\frac{q}{\delta}\right) \prod_{t=1}^{r} \left(\frac{n^{(t)}}{\pi_t}\right)$$

$$= \sum_q \frac{A_q}{q^2} \sum_{\delta \mid q} \delta \mu\left(\frac{q}{\delta}\right) \sum_{n=1 \atop \delta \mid (-n+\frac{1}{8}\nu_h q)}^{m}{}'' \prod_{t=1}^{r} \left(\frac{n^{(t)}}{\pi_t}\right).$$

$$\left|\sum^{(2)}\right| < K \sum_q \frac{1}{q^2} \sum_{\delta \mid q, \mu\left(\frac{q}{\delta}\right) \neq 0} \delta \left| \sum_{n=1}^{m}{}'' \prod_{t=1}^{r} \left(\frac{n^{(t)}}{\pi_t}\right) \right|.$$

Es ist also hinreichend

$$\sum_{n=1}^{m}{}'' \prod_{t=1}^{r} \left(\frac{n^{(t)}}{\pi_t}\right) = O(1)$$

gleichmäßig in m, q und δ nachzuweisen, wobei nur solche δ zu berücksichtigen sind, wofür $\mu\left(\frac{q}{\delta}\right) \neq 0$. Wir können also annehmen, daß δ durch $\pi_1^{\varkappa_1 - 1} \pi_2^{\varkappa_2 - 1} \dots \pi_r^{\varkappa_r - 1}$ teilbar ist.

Wir schreiben zur Abkürzung $P = \pi_1 \pi_2 \dots \pi_r$ und

$$\delta = 2^{\alpha} \delta_1 \quad (\delta \text{ ungerade}), \quad q = 2^{\xi} \delta_1 \delta_1'.$$

Dann ist $\alpha = \xi$ oder $\alpha = \xi - 1$.

Es sei zuerst ν_h ungerade. Dann ist $\xi \geqq 3$ wegen (11). Falls $\alpha = \xi$

$$n = \frac{1}{8} \nu_h q + A\delta = 2^{\xi - 3} \delta_1 (\nu_h \delta_1' + 8A) = 2^{\xi - 3} \delta_1 v,$$

$$(v, P) = 1, \quad v \equiv \nu_h \delta_1' \pmod 8.$$

Also

$$\left| \sum_{n=1}^{m}{}'' \right| = \left| \sum_{\substack{1 \leqq v \leqq \frac{m}{2^{\xi-3}\delta_1} \\ (v,P)=1,\ v \equiv \nu_h \delta_1' \pmod 8}} \left(\frac{v}{\pi_1 \pi_2 \dots \pi_r}\right) \right|.$$

Weil aber für reelles B

$$\sum_{\substack{B \leqq v < B + 8P \\ (v,P)=1,\ v \equiv \nu_h \delta_1' \pmod 8}} \left(\frac{v}{\pi_1 \pi_2 \dots \pi_r}\right) = 0,$$

folgt

$$\left| \sum_{n=1}^{m}{}'' \right| \leqq 8 \pi_1 \pi_2 \dots \pi_r = O(1),$$

weil, wie schon oben bemerkt wurde, die Zahlen $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r$ alle wenigstens einer der Zahlen a, b, c, d aufgehen müssen.

Falls $\alpha = \xi - 1$ ist

$$n = \frac{1}{8} \nu_h q + A\delta = 2^{\xi - 3} \delta_1 (\nu_h \delta_1' + 4A) = 2^{\xi - 3} \delta_1 v, \ (v, P) = 1,$$

$$v \equiv \nu_h \delta_1' \pmod 4.$$

Wie oben folgt jetzt

$$\left| \sum_{n=1}^{m}{}'' \right| \leqq 4 \pi_1 \pi_2 \dots \pi_r = O(1).$$

Zweitens sei $\nu_h \equiv 2 \pmod 4$. Dann ist $\xi \geqq 2$ wegen (11). Also für $\alpha = \xi$:

$$n = \frac{1}{8} \nu_h q + A\delta = 2^{\xi - 2} \delta_1 \left(\frac{\nu_h}{2} \delta_1' + 4A\right) = 2^{\xi - 2} \delta_1 v, \ (v, P) = 1,$$

$$v \equiv \frac{\nu_h}{2} \delta_1 \pmod 4,$$

für $\alpha = \xi - 1$:

$$n = \frac{1}{8} \nu_h q + A\delta = 2^{\xi-2}\delta_1 \left(\frac{\nu_h}{2}\delta_1' + 2A\right) = 2^{\xi-2}\delta_1 v, \quad (v, P) = 1,$$

$$v \equiv \frac{\nu_h}{2}\delta_1 \pmod 2.$$

Drittens sei $\nu_h \equiv 0 \pmod 4$, $\nu_h \not\equiv 0 \pmod 8$. Dann ist $\xi \geqq 1$ wegen). Also für $\alpha = \xi$:

$$= 2^{\xi-1}\delta_1 \left(\frac{\nu_h}{4}\delta_1' + 2A\right) = 2^{\xi-1}\delta_1 v, \quad (v, P) = 1, \quad v \equiv \frac{\nu_h}{4}\delta_1' \pmod 2,$$

für $\alpha = \xi - 1$:

$$n = 2^{\xi-1}\delta_1 \left(\frac{\nu_h}{4}\delta_1' + A\right) = 2^{\xi-1}\delta_1 v, \quad (v, P) = 1.$$

Für $\nu_h \equiv 0 \pmod 8$ ist

$$n = \delta v, \qquad (v, P) = 1.$$

In jedem dieser Fälle folgt, wie oben für ungerades ν_h ausgeführt ist:

$$\left| \sum_{n=1}^{m}{}'' \right| \leqq C \cdot \pi_1 \pi_2 \ldots \pi_r = O(1),$$

C eine numerische Konstante ist. Hiermit ist (21) bewiesen und also Beweis des Hauptsatzes vollständig geführt.

Den Haag, den 17. Januar 1925.

(Eingegangen am 21. Januar 1925.)

Über Lichtgrenztangentensysteme und mit ihnen zusammenhängende Flächentransformationen.

Von

Axel Schur in Hannover.

Die folgenden Untersuchungen über gewisse Transformationen v Flächen, die auf eine Schar von *Lichtgrenzen*, also Berührungskurven u schriebener Zylinder, und die konjugierte Schar der von den Lichtri tungen umhüllten *Lichtrichtungskurven* bezogen sind, entstanden aus d Bestreben, spezielle von Darboux aufgestellte Flächenbiegungen der sonderen Klasse, für die die zweite Schar aus den Berührungskurven u schriebener Kegel besteht (§ 1), auf eine allgemeinere Klasse von Fläch auszudehnen. Unterwirft man diese Flächen einer Transformation na parallelen Tangenten an die Parameterlinien (§ 2), so gehen sie über eine allgemeinere Klasse von auf Lichtgrenzen bezogenen Flächen, de Lichtrichtungskurven Berührungskurven umschriebener Torsen sind, die umschriebenen Kegel der Ausgangsfläche zu Richtkegeln haben. A für diese Flächen haben also die Scharen von Lichtgrenzen und Lic richtungskurven noch einen speziellen Charakter und wir wollen sie k als Scharen von *ausgezeichneten Lichtgrenzen* auf der Fläche bezei nen (§ 3).

Betrachten wir nun das Tangentensystem einer derartigen Schar a gezeichneter Lichtgrenzen, so berührt dies seine zweite Brennfläche wie nach einer Schar ausgezeichneter Lichtgrenzen (§ 4) und diese Eigensch ist für das ausgezeichnete Lichtgrenztangentensystem charakteristisch (§ Dieses gestattet ferner eine sehr einfache Erzeugung mittels zweier n parallelen Tangenten an die Schubkurven aufeinander bezogenen Schi flächen, indem man eine als Leitfläche, die andere als Richtfläche Strahlensystems wählt (§ 3). Dann entsprechen die Schubkurven beiden Flächen den beiden Scharen von Torsen des Tangentensyst (§ 4). Alle Flächen nun, die eine Schar von ausgezeichneten Lichtgren

gen, lassen Biegungen zu, bei denen die ausgezeichneten Lichtgrenzen der in solche übergehen (§ 5). Durch diese Biegungen geht also das gezeichnete Lichtgrenztangentensystem wieder in ein derartiges, also h die ausgezeichneten Lichtgrenzen auf der zweiten Brennfläche in ichartige Kurven über. Doch ist die Abbildung für die zweite Brennhe im allgemeinen keine Biegung, da zwar die Lichtrichtungskurven, ht aber die Lichtgrenzen längentreu aufeinander bezogen sind. Sollen h die zweiten Brennflächen längentreu aufeinander bezogen sein, so ssen die erzeugenden Schiebflächen Isometrien zulassen, bei denen sich e Punkte auf konzentrischen Kugeln verschieben. Es gelingt nun in Tat, Schiebflächen mit derartigen Isometrien anzugeben und so den chweis zu erbringen für *Strahlensysteme, deren Brennflächen gleichig so verbogen werden können, daß sie Brennflächen eines Strahlentems bleiben* (§ 6). Diese besonderen Lichtgrenztangentensysteme verteln dann gleichzeitig für eine von einer willkürlichen Funktion einer iablen abhängige Familie von Flächen, die von den Torsen des Strahlentems nach ausgezeichneten Lichtgrenzen und den zugehörigen Lichttungskurven geschnitten werden, eine Isometrie in der Weise, daß je i Flächen, die zu derselben Wahl der willkürlichen Funktion gehören, inander isometrisch sind (§ 9).

Nachdem so die ausgezeichneten Lichtgrenztangentensysteme in ihren upteigenschaften geklärt sind, schreitet die Untersuchung zu den allneinen Lichtgrenztangentensystemen, also zu den Strahlensystemen fort, aus den Tangenten an eine beliebige Schar von Lichtgrenzen bestehen '). Diese berühren nun im allgemeinen die zweite Brennfläche nicht ur nach Lichtgrenzen, besitzen aber noch unendlichviele Leit- und htflächen, auf denen den Torsen des Systems ein Netz von Lichtgrenzen Lichtrichtungskurven entspricht, so zwar, daß die Lichtrichtungen in sprechenden Punkten auf allen Flächen der Familie parallel sind. Diese onderen Leitflächen lassen sich in Scharen von je ∞^1 anordnen, die in sprechenden Punkten auch parallele Tangenten an die Lichtgrenzen en, die ihrerseits parallel zu den Lichtgrenztangenten an eine Schar licher Richtflächen sind. Man kann also ein Lichtgrenztangentensystem der allgemeinsten Weise erzeugen, indem man irgend zwei auf Lichtnzen und Licthrichtungskurven bezogene Flächen, die nach parallelen genten an dieses Netz aufeinander abgebildet sind, als Leit- und Richtne wählt (§ 8).

Erzeugt man nun ein Strahlensystem in der allgemeinsten Weise urch, daß man als Leit- und Richtfläche irgend zwei auf Lichtgrenzen Lichtrichtungskurven bezogene Flächen wählt, die in entsprechenden kten parallele Lichtrichtungen haben, sonst aber ganz beliebig aufein-

ander bezogen sind, so haben diese Strahlensysteme mit den Lichtgren tangentensystemen noch die Eigenschaft gemein, daß sie unendlichvie von einer willkürlichen Funktion einer Variablen abhängige Leitfläche besitzen, die alle auf Lichtgrenzen und Lichtrichtungskurven bezoge sind, in entsprechenden Punkten parallele Lichtrichtungen zu den beide Ausgangsflächen haben und von der einen Schar von Torsen nach de Lichtrichtungskurven geschnitten werden (§ 8). Die zweite Schar vo Torsen schneidet im allgemeinen nicht nach den Lichtgrenzen. Vielmel ist das für Lichtgrenztangentensysteme charakteristisch. Die den allg meinsten Strahlensystemen verbleibenden Eigenschaften lassen sich a einfache Sätze über Parallelkurven zurückführen uud zeigen so ihre U abhängigkeit von der speziellen Zuordnung der Leit- und Richtfläche.

Die behandelten Fragestellungen tragen durchaus affinen Charakte denn das wesentliche Merkmal sind ja immer Beziehungen des Paralleli mus und des Konjugiertseins, also affininvariante Beziehungen. Jedo scheinen die hier angestellten Untersuchungen, die sich wesentlich a Darboux-Guichardsche Methoden stützen, in keiner unmittelbaren B ziehung zu den durch die Herren Blaschke und Pick angeregten neuer Untersuchungen auf diesem Gebiete zu stehen. Jedenfalls gelang ei Einordnung bisher noch nicht und ebenso wäre noch eine Charakterisieru der ausgezeichneten Lichtgrenzen auf der Fläche selbst zu wünschen, d freilich unseres Wissens auch für die konisch-zylindrischen Netze noch feh

§ 1.

Flächen mit einem konjugierten Netz, dessen eine Schar aus d Berührungskurven umschriebener Zylinder und dessen zweite Schar a den Berührungskurven umschriebener Kegel besteht (konisch-zylindrische Flächen).

Darboux[1]) hat in der zweiten Auflage seiner „Leçons sur la théo générale des surfaces“ nach dem Vorgange von Peterson[2]) für eine Fläch die auf ein konjugiertes Netz bezogen ist, dessen eine Schar aus den B rührungskurven umschriebener Zylinder besteht, während die zweite v den Berührungskurven umschriebener Kegel gebildet wird, die folgen

[1]) Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, 2ième édition, Pa 1914. Première partie, p. 181 ff.

[2]) Peterson, Über Kurven und Flächen § 14 und § 34, Moskau und Leip 1868. — Vgl. auch M. Lagally, Über gewisse Verbiegungen achsenaffiner Fläch insbesondere der Flächen 2. Grades. [Sitzungsberichte der Bayr. Akad. d. Wiss. 19 wo spezielle Flächen dieser Klasse von einer sehr eleganten geometrischen Erzeug aus untersucht werden.

rstellung in den rechtwinkligen Koordinaten x_1, x_2, x_3 des laufenden ächenpunktes angegeben:

$$x_i = A(u)\alpha_i(v) + \int A'(u)a_i(u)\,du \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Man erkennt sofort die Eigenschaften des Bezugssystems, wenn man mogene Punktkoordinaten:

$$\mathfrak{x}_i = \alpha_i(v) + \frac{1}{A(u)}\int A'(u)a_i(u)\,du \quad (i = 1, 2, 3), \qquad \mathfrak{x}_4 = \frac{1}{A(u)}$$

führt und die Gleichungen für die homogenen Koordinaten $\mathfrak{p}_i$ der ngentialebene aufstellt, nämlich:

$$\sum_1^4 \mathfrak{x}_i \mathfrak{p}_i = 0, \qquad \sum_1^4 \frac{\partial \mathfrak{x}_i}{\partial u}\mathfrak{p}_i = 0, \qquad \sum_1^4 \frac{\partial \mathfrak{x}_i}{\partial v}\mathfrak{p}_i = 0.$$

nn ergeben die beiden letzten Gleichungen

$$\begin{cases} \dfrac{A'(u)}{A^2(u)}\left(\displaystyle\sum_1^3\left(A(u)a_i(u) - \int A'(u)a_i(u)\,du\right)\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_4\right) \\ \qquad = \dfrac{A'(u)}{A^2(u)}\left(\displaystyle\sum_1^3 \int A(u)a_i'(u)\,du\,\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_4\right) = 0, \text{ [3]} \\ \displaystyle\sum_1^3 \alpha_i'(v)\mathfrak{p}_i = 0 \end{cases}$$

l zeigen, daß die Tangentialebenen längs einer Kurve $u =$ konst. durch eigentlichen Punkt

$$\left(\int A(u)a_1'(u)\,du : \int A(u)a_2'(u)\,du : \int A(u)a_3'(u)\,du : -1\right)$$

ben, also einen Kegel umhüllen, während die Tangentialebenen längs einer rve $v =$ konst. durch den uneigentlichen Punkt $(\alpha_1'(v) : \alpha_2'(v) : \alpha_3'(v) : 0)$ en und einen Zylinder umhüllen. Zugleich erkennt man, daß die Erzenden der umhüllten Flächen jedesmal die Tangenten an die Kurven anderen Schar in den Punkten der Berührungskurve der Fläche sind. raus folgt, daß das Netz der Parameterkurven auf unserer Fläche ein jugiertes Netz bildet. Man kann das auch unmittelbar verifizieren, n es ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial v} = A'(u)\alpha_i'(v) = \frac{A'(u)}{A(u)}\frac{\partial x_i}{\partial v} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

zweite gemischte Ableitung läßt sich also durch die ersten Ableitungen

[3]) Die letzte Form entsteht durch eine partielle Integration, die sich für die metrische Deutung als entscheidend erweisen wird.

allein linear und homogen ausdrücken, und das ist ja charakteristisch f ein konjugiertes Netz.

Wir haben die erste Formel (3) durch partielle Integration auf ei wesentlich einfachere Gestalt gebracht. Führen wir die entsprechen partielle Integration auch in den Ausgangsformeln (1) für die Koordinat aus, so werden diese zwar zunächst komplizierter, aber, wie wir seh werden, für die geometrische Diskussion geeigneter. Wir merken desha die Formeln:

$$x_i = A(u)[a_i(u) + \alpha_i(v)] - \int A(u)a_i'(u)du \qquad (i = 1, 2,$$

an und bemerken noch, daß selbstverständlich die Ableitungen und in besondere die Formeln (4) ungeändert bleiben.

Die Flächen (1) oder (5) lassen nun, wie auch Darboux[1]) sch gezeigt hat, Biegungen in Flächen derselben Art zu, bei denen das konisc zylindrische Netz erhalten bleibt. Zunächst ergibt sich für die Koef zienten der ersten Grundform:

$$(6)\quad \begin{cases} E = A'^2(u)\Big(\sum_1^3 [a_i(u) + \alpha_i(v)]^2\Big), \\ F = A(u)A'(u)\Big(\sum_1^3 [a_i(u) + \alpha_i(v)]\alpha_i'(v)\Big), \quad G = A^2(u)\Big(\sum_1^3 \alpha_i'(v)^2 \end{cases}$$

Wollen wir nun eine Fläche $(\bar{x}_i)$

$$\bar{x}_i = \bar{A}(u)[\bar{a}_i(u) + \bar{\alpha}_i(v)] - \int \bar{A}(u)\bar{a}_i'(u)du \qquad (i = 1, 2,$$

bestimmen, für die die Beziehungen

$$(7)\qquad \bar{E} = E, \qquad \bar{F} = F, \qquad \bar{G} = G$$

erfüllt sind, so können wir $\bar{A}(u) = A(u)$ setzen und dann die sec Funktionen $\bar{a}_i(u)$, $\bar{\alpha}_i(v)$ $(i = 1, 2, 3)$ noch auf unendlichviele Arten bestimmen, daß die Relationen:

$$(8)\quad \sum_1^3 [a_i(u) + \alpha_i(v)]^2 = \sum_1^3 [\bar{a}_i(u) + \bar{\alpha}_i(v)]^2, \quad \sum_1^3 \alpha_i'^2(v) = \sum_1^3 \bar{\alpha}_i'^2(v)$$

bestehen, wodurch die beiden äußeren Gleichungen (7) erfüllt werde Soll auch die mittlere befriedigt werden, so müssen die $\bar{a}_i(u)$, $\bar{\alpha}_i(v)$ no die Beziehung:

$$(9)\qquad \sum_1^3 [a_i(u) + \alpha_i(v)]\alpha_i'(v) = \sum_1^3 [\bar{a}_i(u) + \bar{\alpha}_i(v)]\bar{\alpha}_i'(v)$$

erfüllen, die aber durch Differentiation aus der ersten Gleichung (8) fol und erfüllt ist, sobald die Relationen (8) bestehen. Jeder Satz von sec Funktionen $\bar{a}_i(u)$, $\bar{\alpha}_i(v)$ $(i = 1, 2, 3)$, die den Gleichungen (8) genüge liefert uns also eine Biegungsfläche der Ausgangsfläche.

§ 2.

Die Abbildung nach parallelen Tangenten an das Netz der Parameterkurven.

Wir wollen nun zunächst eine Abbildung betrachten, die zuerst von terson[4]) angegeben und etwa 30 Jahre später von Guichard[5]) un-ängig wieder gefunden worden ist, und deren Anwendung auf die vor-rachtete Flächenklasse von Darboux und Peterson uns zur wesent-allgemeineren Flächenklasse derjenigen Flächen führen wird, die auf konjugiertes Netz bezogen sind, dessen eine Schar aus den Berührungs-ven einer Schar von umschriebenen Zylindern besteht, sogenannten *htgrenzen*, während die zweite Schar nur noch an die Forderung ge-den ist, daß die von den Tangentialebenen längs jeder ihrer Kurven hüllte abwickelbare Fläche einen Richtkegel hat, der eine Fläche längs r Lichtrichtungskurve berührt. Wir wollen diese speziellen Scharen Lichtgrenzen kurz *ausgezeichnete* Scharen nennen.

Die in Frage stehende Abbildung ist eine solche nach parallelen malen, bei der außerdem in entsprechenden Punkten die Tangenten entsprechende Parameterkurven einander parallel sind. Sie wird also mittelt durch die Formeln:

$$\frac{\partial y_i}{\partial u} = P\frac{\partial x_i}{\partial u}, \qquad \frac{\partial y_i}{\partial v} = Q\frac{\partial x_i}{\partial v} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

die Funktionen P und Q so zu bestimmen sind, daß

$$dy_i = \frac{\partial y_i}{\partial u}du + \frac{\partial y_i}{\partial v}dv = P\frac{\partial x_i}{\partial u}du + Q\frac{\partial x_i}{\partial v}dv \quad (i = 1, 2, 3)$$

vollständiges Differential wird. Dies führt auf die Bedingung

$$(P - Q)\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial x_i}{\partial u} - \frac{\partial Q}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

der man wieder sofort schließen kann, daß das Parameternetz ein jugiertes Netz sein muß, da sie eine lineare homogene Relation zwischen gemischten zweiten Ableitungen und den ersten Ableitungen der Ko-inaten darstellt. Eine solche Abbildung nach parallelen Tangenten an Netz der Parameterkurven ist also nur möglich, wenn dieses Netz ein jugiertes Netz ist. Eine Ausnahme bildet nur die Ähnlichkeit, da aus $= Q$ leicht $P = Q =$ konst. gefolgert werden kann.

---

[4]) Peterson, a. a. O. § 22ff. — S. a. Stäckel, Biegungen und konjugierte eme. Math. Ann. 49 (1897), S. 255ff.

[5]) Guichard, Sur la déformation des surfaces. Journal de mathématique (5) 896), p. 123.

Die Funktionen P und Q hängen nur vom Linienelement der Fläch ab, wie man durch Vergleich von (11) mit der Gleichung:

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial v} - \frac{G\frac{\partial E}{\partial v} - F\frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG-F^2)}\frac{\partial x_i}{\partial u} - \frac{E\frac{\partial G}{\partial u} - F\frac{\partial E}{\partial v}}{2(EG-F^2)}\frac{\partial x_i}{\partial v} \\ &\quad = \frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial v} - m_1\frac{\partial x_i}{\partial u} - m_2\frac{\partial x_i}{\partial v} = 0 \qquad (i=1,2,3)\end{aligned}\right.$$

erkennt, so daß zur Bestimmung von P und Q sich die beiden Gleichungen

$$(13)\qquad \frac{\partial P}{\partial v} = (Q-P)\,m_1, \qquad \frac{\partial Q}{\partial u} = (P-Q)\,m_2$$

ergeben, deren Koeffizienten nur vom Linienelement abhängen. Zwei isometrische Flächen (x_i) und $(\bar{x}_i)$, bezogen auf das gemeinsame konjugierte Netz der Isometrie, gestatten also eine Peterson-Guichardsche Abbildung mit denselben Funktionen P und Q:

$$(14)\quad \frac{\partial y_i}{\partial u} = P\frac{\partial x_i}{\partial u}, \quad \frac{\partial y_i}{\partial v} = Q\frac{\partial x_i}{\partial v}; \qquad \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial u} = P\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial u}, \quad \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial u} = Q\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial v}$$
$$(i=1,2,3),$$

und man findet für die Fundamentalgrößen der neuen Flächen:

$$(15)\quad \begin{aligned} &E(y) = P^2E(x), \quad F(y) = PQF(x), \quad G(y) = Q^2G(x), \\ &\bar{E}(\bar{y}) = P^2\bar{E}(\bar{x}), \quad \bar{F}(\bar{y}) = PQ\bar{F}(\bar{x}), \quad \bar{G}(\bar{y}) = Q^2\bar{G}(\bar{x}), \end{aligned}$$

also wegen

$$(16)\qquad E(x) = \bar{E}(\bar{x}), \quad F(x) = \bar{F}(\bar{x}), \quad G(x) = \bar{G}(\bar{x})$$

auch:

$$(17)\qquad E(y) = \bar{E}(\bar{y}), \quad F(y) = \bar{F}(\bar{y}), \quad G(y) = \bar{G}(\bar{y}).$$

Die beiden Bildflächen (y_i) und $(\bar{y}_i)$ sind also wieder isometrisch aufeinander bezogen, und das Parameternetz ist auch gemeinsames konjugiertes Netz für diese Isometrie.

Wenden wir also diese Abbildung auf die in § 1 studierte Flächenklasse an, so werden wir nicht nur die im Anfang dieses Paragraphen kurz beschriebene allgemeinere Flächenklasse erhalten, sondern auch zu jeder Biegungsfläche der alten Klasse eine Biegungsfläche der neuen. Wir werden in der Tat sehen, daß das Biegungsproblem für beide Flächenklassen auf dieselben Bedingungsgleichungen (8) führt.

§ 3.

chen bezogen auf ein konjugiertes Netz mit einer ausgezeichneten Schar von Lichtgrenzen.

Wir können uns zunächst rein anschaulich überlegen, welche Flächen erhalten, wenn wir auf die Flächen (x_i), die wir im § 1 untersuchten, Abbildung nach parallelen Tangenten an die Parameterlinien anwenden. ersahen ja aus den Gleichungen (3), daß die Tangenten an die Kurven konst. längs einer Kurve $v =$ konst. einem Zylinder angehören. Also l dasselbe auch für die Tangenten an die Kurven $u =$ konst. längs r Kurve $v =$ konst. auf der Fläche (y_i) gelten, und die Kurven konst. werden auch auf (y_i) Lichtgrenzen sein. Ferner bildeten die genten an diese Lichtgrenzen längs einer Kurve $u =$ konst. auf (x_i) en Kegel. Auf y_i werden sie nun eine beliebige abwickelbare Fläche en, für die der Tangentenkegel an (x_i) Richtkegel ist, und in ihrer amtheit ein Strahlensystem erzeugen, das uns später noch ausführlicher chäftigen wird. Wir erhalten also auf diesem Wege die allgemeinste, eine ausgezeichnete Schar von Lichtgrenzen und die zu ihr konjugierte ar bezogene Fläche.

Um nun die Flächen (y_i) zu finden, können wir zunächst P und Q den Gleichungen (13), die nach (4) in unserem Falle lauten:

$$\frac{\partial P}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial u} = (P - Q)\frac{A'(u)}{A(u)}$$

sich leicht vollständig integrieren lassen. Man findet:

$$P = P(u), \qquad Q = \frac{-\mathsf{A}(v) + \int P(u)\,A'(u)\,du}{A(u)}$$

r, mit nur scheinbarer Einschränkung der Allgemeinheit:

$$P = 1, \qquad Q = \frac{-\mathsf{A}(v) + A(u)}{A(u)} = -\frac{\mathsf{A}(v)}{A(u)} + 1.$$

n ergibt sich für y_i durch Integration der Gleichungen (10):

$$\begin{cases} y_i = x_i - \int \mathsf{A}(v)\,\alpha_i'(v)\,dv = A(u)\,[a_i(u) + \alpha_i(v)] \\ \qquad - \left[\int A(u)\,a_i'(u)\,du + \int \mathsf{A}(v)\,\alpha_i'(v)\,dv\right] \qquad (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

die allgemeinste Darstellung einer Fläche, auf der die Kurven $v =$ konst. gezeichnete Lichtgrenzen und die Kurven $u =$ konst. ihre konju- ten sind.

Wir können nun leicht die oben durch Überlegung gewonnenen E gebnisse verifizieren, wenn wir zu den homogenen Punktkoordinaten

$$(22)\quad \begin{cases} \mathfrak{y}_i = a_i(u) + \alpha_i(v) - \dfrac{1}{A(u)}\left[\int A(u)\,a_i'(u)\,du + \int \mathsf{A}(v)\,\alpha_i'(v)\,dv\right] \\ \mathfrak{y}_l = \dfrac{1}{A(u)} \qquad (i = 1, 2, \end{cases}$$

und den homogenen Ebenenkoordinaten $\mathfrak{q}_l$ $(l = 1, 2, 3, 4)$ übergehe Bilden wir mit den Werten $\mathfrak{y}_l$ die Gleichungen (2), so ergibt sich:

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{A'(u)}{A^2(u)}\left(\sum_1^3 \left[\int A(u)\,a_i'(u)\,du + \int \mathsf{A}(v)\,\alpha_i'(v)\,dv\right]\mathfrak{q}_i - \mathfrak{q}_4\right) = 0, \\ \dfrac{A(u) - \mathsf{A}(v)}{A(u)} \sum_1^3 \alpha_i'(v)\,\mathfrak{q}_i = 0. \end{cases}$$

Die letzte Gleichung zeigt nun, daß die Tangentialebenen längs ein Kurve $v =$ konst. durch den uneigentlichen Punkt $(\alpha_1' : \alpha_2' : \alpha_3' : 0)$ gehe also einen Zylinder umhüllen, der zu dem der Ausgangsfläche längs d entsprechenden Kurve umschriebenen parallel ist. Die Kurven $v =$ kons sind folglich Lichtgrenzen.

Die erste Gleichung (23) besagt, daß die Tangentialebene im Punk (u, v) der Fläche (y_i) durch den Punkt (u, v) der Schiebfläche

$$(24)\qquad \eta_i = -\left[\int A(u)\,a_i'(u)\,du + \int \mathsf{A}(v)\,\alpha_i'(v)\,dv\right] \qquad (i = 1, 2,$$

hindurchgeht. Dabei ist die Verbindungslinie entsprechender Punkte (und (η_i) der beiden Flächen die Tangente an die Kurve $v =$ konst. d Fläche (y_i). Denn man findet für ihre Richtungscosinus:

$$(25)\quad \frac{y_i - \eta_i}{r} = \frac{a_i(u) + \alpha_i(v)}{\sqrt{\sum_1^3 (a_i(u) + \alpha_i(v))^2}} = \frac{\dfrac{\partial x_i}{\partial u}}{\sqrt{E(x)}} = \frac{\dfrac{\partial y_i}{\partial u}}{\sqrt{E(y)}} \qquad (i = 1, 2, 3$$

also die Richtung der Tangente an die Lichtgrenze $v =$ konst. Die Ta genten an die Kurven $v =$ konst. auf der Fläche (y_i) bilden folgli ein Strahlensystem, das durch jeden Punkt der Fläche (η_i) einen Stra sendet. Die Richtung dieses Strahles läßt sich nun, wie die Gleichung (2 zeigt, in einfacher Weise charakterisieren, wenn wir neben der Schie fläche (η_i) noch die Schiebfläche

$$(26)\qquad \xi_i = a_i(u) + \alpha_i(v) \qquad (i = 1, 2,$$

einführen. Dann besagt ja (25), daß der Strahl, welcher durch d Punkt (u, v) der Fläche (η_i) läuft, parallel ist zum Radiusvektor Punktes (u, v) der Fläche (ξ_i).

Zwischen den beiden Schiebflächen (ξ_i) und (η_i) besteht nun auch einfache Beziehung. Es ist nämlich:

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial u} = A(u)\,a_i'(u) = A(u)\frac{\partial \xi_i}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \eta_i}{\partial v} = \mathsf{A}(v)\,\alpha_i'(v) = \mathsf{A}(v)\frac{\partial \xi_i}{\partial v}$$
$$(i = 1, 2, 3),$$

eiden Schiebflächen also nach parallelen Tangenten der Schubkurven nander abgebildet, und zwar in der allgemeinsten Weise.

Die Fläche (y_i) ist also die eine Brennfläche eines Strahlensystems, uf die folgende Weise erzeugt werden kann:

Man gehe aus von zwei Schiebflächen (ξ_i) und (η_i), die nach llelen Tangenten des Schubkurvennetzes aufeinander bezogen sind, ziehe jeden Punkt von (η_i) eine Parallele zum Radiusvektor nach dem rechenden Punkt von (ξ_i) von einem beliebigen, aber festen Anfangs- t aus. Dann erhält man ein Strahlensystem, dessen eine Brenn- e (y_i) von den Strahlen des Systems längs einer Schar von aus- chneten Lichtgrenzen berührt wird.

Nun zeigt uns die zweite Gleichung (23) noch eine Beziehung hen der Schiebfläche (ξ_i) und der der Fläche (y_i) längs der Lichtgrenzen onst. umschriebenen Zylinderschar. Diese hat nämlich die Schub- e $(\alpha_i(v))$ von (ξ_i) zur Leitkurve. Denn die Erzeugenden des Zylinders, angenten an die Kurven $u =$ konst. längs einer Kurve $v =$ konst., parallel zur Tangente an die Kurve $(\alpha_i(v))$ in dem Punkt mit dem- n v-Wert. Die Flächen (y_i), (η_i), (ξ_i) haben also in entsprechenden ten parallele Tangenten an die Kurven $u =$ konst., und diese bilden entsprechender Kurven $v =$ konst. parallele Zylinder.

§ 4.

Das Strahlensystem aus den Tangenten an eine Schar von ausgezeichneten Lichtgrenzen.

Wir wollen nun noch kurz das Strahlensystem studieren, welches aus Tangenten an eine Schar von ausgezeichneten Lichtgrenzen besteht, von dem wir eben eine Erzeugung mit Hilfe zweier Schieb- en kennen lernten, von denen die eine als Leitfläche, die andere als fläche des Strahlensystems diente. Wir werden dann in erster Linie eziehung des Strahlensystems zu der Leitfläche und ferner die zweite nfläche unseres Strahlensystems aufsuchen und auf diesem Wege em Formelsystem volle Symmetrie geben, der auch eine völlige geo- sche Symmetrie entspricht.

Wenn wir also zunächst die Beziehung des Strahlensystems zur Leit- e (η_i) untersuchen, so werden wir nach dem Kurvennetz fragen,

welches die abwickelbaren Flächen des Systems aus der Leitfläche a schneiden. Hier ergibt sich nun sofort, daß dies das Netz der Schu kurven ist. Wir wissen ja, daß die Kurven $v =$ konst. auf der Brennfläc (y_i) die Rückkehrkanten der einen Schar von abwickelbaren Flächen si also die Kurven $u =$ konst. als ihre konjugierte Schar die Schnittkurv der zweiten Schar von abwickelbaren Flächen mit der Brennfläche (y Also werden die abwickelbaren Flächen auch die Leitfläche (η_i) nach d Kurven $u =$ konst. und $v =$ konst. schneiden, welche aber das konjugie Netz der Schubkurven bilden. Wir können also noch die weitere Eig schaft unseres Strahlensystems aussprechen:

Die abwickelbaren Flächen des Strahlensystems, das aus den Ta genten einer Schar von ausgezeichneten Lichtgrenzkurven besteht, schneid die Leitschiebfläche (η_i) nach dem konjugierten Netz der Schubkurven.

Bevor wir nun ermitteln können, ob diese Leitschiebfläche (η_i) s in einer ausgezeichneten Lage zum Strahlensystem befindet, etwa Mitt fläche ist, müssen wir erst die zweite Brennfläche $(y_i^{(2)})$ aufstellen. W gehen dabei von den bekannten Formeln aus [6]):

$$y_i^{(2)} = y_i^{(1)} - \frac{1}{m_2}\frac{\partial y_i^{(1)}}{\partial u} \qquad (i = 1, 2, \tag{28}$$

wo m_2 das durch die Gleichung (12), geschrieben für $y_i^{(1)}$, erklärte Sym ist. In unserem Falle ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 y_i^{(1)}}{\partial u\,\partial v} = A'(u)\,\alpha_i'(v) = \frac{A'(u)}{A(u) - \mathsf{A}(v)}\frac{\partial y_i^{(1)}}{\partial v} \qquad (i = 1, 2, \tag{29}$$

$$m_2 = \frac{A'(u)}{A(u) - \mathsf{A}(v)}.$$

Führen wir diesen Wert in (28) ein, so erhalten wir:

$$\begin{cases} y_i^{(2)} = A(u)\left[a_i(u) + \alpha_i(v)\right] - \left[\int A(u)\,a_i'(u)\,du + \int \mathsf{A}(v)\,\alpha_i'(v)\,d\right. \\ \qquad\qquad - \left[A(u) - \mathsf{A}(v)\right]\left[a_i(u) + \alpha_i(v)\right] \\ \quad = \mathsf{A}(v)\left[a_i(u) + \alpha_i(v)\right] - \left[\int A(u)\,a_i'(u)\,du + \int \mathsf{A}(v)\,\alpha_i'(v)\,d\right. \end{cases} \tag{30}$$

Aus der Form dieser Flächendarstellung können wir nun sof schließen, daß $(y_i^{(2)})$ ebenfalls von den Systemstrahlen längs einer Sch von ausgezeichneten Lichtgrenzen $u =$ konst. berührt wird, daß also Tangenten an die Kurven $v =$ konst. längs einer Kurve $u =$ konst. ein Zylinder bilden, und dies durch genau analoge Formeln zu den Form (22) und (23) bestätigen, in denen nur die Funktionen von u mit d

[6]) Siehe etwa die Ableitung auf S. 115 meiner Arbeit: Über diejenigen Strahl systeme, deren Brennflächen durch die Systemstrahlen isometrisch aufeinander zogen werden. Math. Zeitschr. 19 (1923), S. 114–127.

rechenden von v zu vertauschen sind. Lassen wir in (23) die vor Klammern stehenden nicht identisch verschwindenden Faktoren weg, eibt die erste, die symmetrisch in den Funktionen von u und v ist, ändert, also auch die aus ihr entwickelten Folgen, auf denen die igung des Strahlensystems fußte. Die zweite geht über in:

$$\sum_1^n a_i'(u)\, \mathfrak{q}_i^{(2)} = 0$$

besagt, daß die Kurven $u =$ konst. Berührungskurven von umschrie- n Zylindern sind, deren Erzeugende, die Tangenten an die Kurven onst. in den Punkten der Berührungskurve, parallel zur Tangente e Schubkurve $(a_i(u))$ von (ξ_i) im Punkte mit demselben u-Werte Die Flächen $(y_i^{(2)})$, (ξ_i) und (η_i) haben also in entsprechenden ten parallele Tangenten an die Kurven $v =$ konst. und diese bilden jeder Kurve $u =$ konst. parallele Zylinder. Wir können so schließ- noch das Ergebnis aussprechen:

Ein Strahlensystem, das aus den Tangenten an eine Schar von aus- hneten Lichtgrenzen besteht, berührt seine zweite Brennfläche eben- nach einer Schar von ausgezeichneten Lichtgrenzen und beide Brenn- en sind durch die Systemstrahlen so aufeinander bezogen, daß die gierten Netze, welche die ausgezeichneten Lichtgrenzen enthalten, sich rechen.

Aus den obigen Formeln erkennen wir zugleich, daß die Leitfläche nicht irgendwie gegen das Strahlensystem ausgezeichnet ist.

§ 5.

Biegungen unter Erhaltung eines konjugierten Netzes, das eine Schar von Lichtgrenzen erhält.

Nunmehr können wir dazu übergehen, die Biegungen der Flächen (y_i) Erhaltung des konjugierten Netzes der Parameterlinien zu untersuchen. haben ja am Schluß des § 2 aus den Eigenschaften der Abbildung parallelen Tangenten an die Parameterlinien geschlossen, daß die en (y_i) genau wie die Flächen (x_i) des § 1 eine Biegung gestatten en, bei der das Netz der Lichtgrenzen und ihrer konjugierten in ein artiges Netz übergeht. Wir können nun noch insbesondere zeigen, diese Biegungen für beide Flächenklassen von denselben Bedingungen gen. Sodann finden wir hier noch eine neue Fragestellung von derem Interesse. Wir sahen ja, daß in einem Strahlensystem, das den Tangenten an eine Schar von ausgezeichneten Lichtgrenzen be- die zweite Brennfläche ebenfalls längs ausgezeichneter Lichtgrenzen rt wird. Auch diese wird also Biegungen in Flächen der gleichen

Darstellung gestatten, und es entsteht die Frage, ob man beide Bre flächen gleichzeitig einer Biegung unterwerfen kann so, daß sie au nachher Brennflächen desselben Strahlensystems sind. Diese Frage st in enger Beziehung zu gewissen Biegungen der schon mehrfach benutz Schiebfläche (ξ_i), von denen sich tatsächlich Scharen angeben lassen, so d wir hier ein Beispiel gewinnen für Strahlensysteme, deren Brennfläch simultan verbogen werden können.

Zunächst werden wir die Fundamentalgrößen erster Ordnung $E_1, F_1,$ von $(y_i^{(1)})$ und E_2, F_2, G_2 von $(y_i^{(2)})$ berechnen und finden:

$$(31)\quad \begin{cases} E_1 = A'^2(u)\Big(\sum_1^3 [a_i(u)+\alpha_i(v)]^2\Big), \\ F_1 = A'(u)(A(u)-\mathsf{A}(v))\Big(\sum_1^3 [a_i(u)+\alpha_i(v)]\,a_i'(v)\Big), \\ G_1 = (A(u)-\mathsf{A}(v))^2\Big(\sum_1^3 \alpha_i'^2(v)\Big) \\ E_2 = (A(u)-\mathsf{A}(v))^2\Big(\sum_1^3 a_i'^2(u)\Big), \\ F_2 = \mathsf{A}'(v)(A(u)-\mathsf{A}(v))\Big(\sum_1^3 [a_i(u)+\alpha_i(v)]\,a_i'(u)\Big), \\ G_2 = \mathsf{A}'^2(v)\Big(\sum [a_i(u)+\alpha_i(v)]^2\Big). \end{cases}$$

Wollen wir nun zunächst eine Fläche $(\bar{y}_i^{(1)})$

$$(32)\quad \bar{y}_i^{(1)} = \bar{A}(u)[\bar{a}_i(u)+\bar{\alpha}_i(v)] - [\int \bar{A}(u)\,\bar{a}_i'(u)\,du + \int \bar{\mathsf{A}}(v)\,\bar{\alpha}_i'(v)\,d$$
$$(i=1,2,3)$$

bestimmen, für die die Beziehungen:

$$(33)\qquad \bar{E}_1 = E_1, \qquad \bar{F}_1 = F_1, \qquad \bar{G}_1 = G_1$$

bestehen, so können wir wieder zunächst $\bar{A}(u) = A(u)$, $\bar{\mathsf{A}}(v) = \mathsf{A}$ setzen und erhalten dann zur Bestimmung der sechs Funktionen $\bar{a}_i($ $\bar{\alpha}_i(v)$ die zwei Bedingungsgleichungen (8). Dann ist aber auch:

$$(34)\qquad \bar{F}_2 = F_2, \qquad \bar{G}_2 = G_2,$$

da auch die Bedingung:

$$(35)\qquad \sum_1^3 [\bar{a}_i(u)+\bar{\alpha}_i(v)]\,\bar{a}_i'(u) = \sum_1^3 [a_i(u)+\alpha_i(v)]\,a_i'(u)$$

aus der ersten Gleichung (8) durch Differentiation folgt. Hingegen werd im allgemeinen $\bar{E}_2$ und E_2 voneinander verschieden sein, die Fläche $(\bar{y}_i^{(}$

$$\bar{y}_i^{(2)} = \bar{\mathsf{A}}(v)[\bar{a}_i(u) + \bar{\alpha}_i(v)] - [\int \bar{A}(u)\,\bar{a}_i'(u)\,du + \int \bar{\mathsf{A}}(v)\,\bar{\alpha}_i'(v)\,dv]$$
$$(i = 1, 2, 3),$$

nicht isometrisch zur Fläche $(y_i^{(2)})$. Wir sehen also tatsächlich, daß Problem der Verbiegung einer Fläche (y_i) in eine Fläche derselben sse auf genau dieselben Bedingungen führt, wie das entsprechende blem für die *Darboux-Petersonschen Flächen* (x_i). Durch unsere nsformation sind wir zu einer wesentlich allgemeineren Flächenklasse ngt, von der wir ebenfalls Biegungen angeben können, sobald wir ungen $\bar{a}_i(u)$, $\bar{\alpha}_i(v)$ der Gleichungen (8) kennen. Auf die allgemeine ussion dieser Gleichungen wollen wir hier nicht eingehen, sondern uns der Frage zuwenden, wann die beiden Flächen $(y_i^{(1)})$ und $(y_i^{(2)})$ eine ltane Biegung zulassen. Es wird sich zeigen, daß dann auch die en Flächen (ξ_i) und (η_i) eine simultane Biegung gestatten, so daß die Flächen (ξ_i), (η_i), $(y_i^{(1)})$, $(y_i^{(2)})$, die ja eine affininvariante Konfigura- bilden, auch eine simultane Biegung gestatten.

§ 6.

r die simultanen Biegungen der Flächen $(y_i^{(1)})$ und $(y_i^{(2)})$ und eine damit zusammenhängende Klasse von Schiebflächen.

Soll nun gleichzeitig $(\bar{y}_i^{(1)})$ zu $(y_i^{(1)})$ und $(\bar{y}_i^{(2)})$ zu $(y_i^{(2)})$ isometrisch , so muß außer den Bedingungen (8) noch die Bedingung:

$$\sum_1^3 \bar{a}_i'^2(u) = \sum_1^3 a_i'^2(u)$$

llt sein, die ja $\bar{E}_2 = E_2$ zur Folge hat. Fügen wir noch die Gleichung:

$$\sum_1^3 \bar{a}_i'(u)\,\bar{\alpha}_i'(v) = \sum_1^3 a_i'(u)\,\alpha_i'(v)$$

u, die ebenfalls aus der ersten Gleichung (8) durch Differentiation , so können wir auf Grund der vier Gleichungen (8), (37) und (38) Transformation sehr einfach beschreiben, die die Fläche (ξ_i) bei dieser ung erfährt. Die drei letzten Gleichungen sagen dann offenbar, daß beiden Flächen (ξ_i) und $(\bar{\xi}_i)$:

$$\bar{\xi}_i = \bar{a}_i(u) + \bar{\alpha}_i(v) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

nander isometrisch sind, während die erste fordert, daß bei dieser netrie die Radienvektoren entsprechender Punkte ungeändert bleiben n, jeder Punkt also auf einer Kugel bleibt.

Wir wollen nun eine spezielle Klasse von Isometrien zwischen ebflächen betrachten, die auch schon auf Peterson [7]) zurückgeht, und

[7]) Peterson, a. a. O. § 33.

zeigen, daß diese Isometrien enthält, die obiger Forderung genügen. W
setzen:

$$(40) \qquad \bar{a}_i(u) = \lambda_i a_i(u), \qquad \bar{\alpha}_i(v) = \frac{1}{\lambda_i}\alpha_i(v) \qquad (i = 1, 2,$$

mit konstanten Werten λ_i. Dann ist (38) identisch erfüllt, (37) und d
zweite Gleichung (8) liefern:

$$(41) \qquad \sum_1^3 (\lambda_i^2 - 1) a_i'^2(u) = 0, \qquad \sum_1^3 \frac{\lambda_i^2 - 1}{\lambda_i^2}\alpha_i'^2(v) = 0,$$

endlich die erste Gleichung (8):

$$(42) \qquad \sum_1^3 (\lambda_i^2 - 1) a_i^2(u) + \sum_1^3 \frac{1 - \lambda_i^2}{\lambda_i^2}\alpha_i^2(v) = 0.$$

Diese wollen wir nun aufspalten in die zwei:

$$(43) \qquad \sum_1^3 (\lambda_i^2 - 1) a_i^2(u) = 0, \qquad \sum_1^3 \frac{\lambda_i^2 - 1}{\lambda_i^2}\alpha_i^2(v) = 0,$$

wodurch wir natürlich weiter spezialisieren.

Nun können wir die beiden ersten (41) und (43) als zwei linea
homogene Gleichungen für die drei Konstanten $\lambda_i^2 - 1$, die beiden zweite
als lineare homogene Gleichungen für die drei Konstanten $\frac{\lambda_i^2 - 1}{\lambda_i^2}$ auffass
und kommen so zu dem Ansatz:

$$(44) \quad \begin{cases} (\lambda_i^2 - 1) f(u) = \begin{vmatrix} a_k'^2(u), & a_l'^2(u) \\ a_k^2(u), & a_l^2(u) \end{vmatrix}, \quad \frac{\lambda_i^2 - 1}{\lambda_i^2}\varphi(v) = \begin{vmatrix} \alpha_k'^2(v), & \alpha_l'^2(v \\ \alpha_k^2(v), & \alpha_l^2(v) \end{vmatrix} \\ (i, k, l = 1, 2, 3; \ i \neq k \neq l), \end{cases}$$

wo $f(u)$ und $\varphi(v)$ zwei willkürliche Funktionen ihrer Argumente sin

Man kann nun leicht durch Integration mit Reihen einsehen, daß z
jeder Wahl der drei Konstanten λ_i und der beiden Funktionen $f(u)$ un
$\varphi(v)$ im wesentlichen eine Schiebfläche bestimmt ist. An Willkü
lichkeiten bleibt noch für alle sechs Funktionen $a_i(u)$, $\alpha_i(v)$ das absolu
Glied und das Vorzeichen des linearen, alle weiteren Koeffizienten sin
eindeutig bestimmt.

Wir haben also hier eine allen Bedingungen unseres Problems g
nügende Klasse von Schiebflächen gefunden, die von zwei willkü
lichen Funktionen abhängt, und sind damit in der Lage, unendlich vie
Flächenkonfigurationen (ξ_i), (η_i), $(y_i^{(1)})$, $(y_i^{(2)})$ anzugeben, die eine simu
tane Biegung gestatten, also auch Strahlensysteme, deren beide Bren
flächen simultan verbogen werden können.

Endlich können wir nun auch die Abbildung von (ξ_i) auf $(\bar{\xi}_i)$ leicht hreiben, die der allgemeineren Biegung nur einer Brennfläche $(y_i^{(1)})$ pricht. Dann bestehen ja die Gleichungen (8) und (38), aus denen :

$$\left\{\begin{array}{l} R = \bar{R}, \quad F = \bar{F}, \quad G = \bar{G}, \\ \sqrt{E}\cos\omega\, du = \dfrac{F}{\sqrt{G}}\, du = \dfrac{\bar{F}}{\sqrt{\bar{G}}}\, du = \sqrt{\bar{E}}\cos\bar{\omega}\, du. \end{array}\right.$$

erste fordert wieder die Erhaltung der Abstände von einem Punkte, dritte zeigt die längentreue Abbildung der Kurven $u =$ konst., endlich vierte, eine Folge der zweiten und dritten, daß die senkrechte Pro- ion des Linienelements der Kurve $v =$ konst. auf die Kurve $u =$ konst. lten bleibt. Durch diese Eigenschaften ist also die Abbildung von auf $(\bar{\xi}_i)$ ausgezeichnet, die der allgemeinsten Biegung einer Fläche r Erhaltung einer Schar von ausgezeichneten Lichtgrenzen entspricht.

§ 7.

Allgemeine Lichtgrenztangentensysteme.

Wir wollen nun untersuchen, wie weit sich unsere bisherigen Unter- ungen über Flächen mit ausgezeichneten Lichtgrenzen, auf beliebige hen bezogen auf ein konjugiertes Netz mit einer Schar allgemeiner tgrenzen ausdehnen lassen, und werden dabei weitreichende Analogien, auch weitere charakterisierende Eigenschaften für die speziellen Flächen innen. Wir wollen dabei zunächst einmal die allgemeinen Lichtgrenz- entensysteme betrachten und werden für sie eine ganz ähnliche Er- ung finden wie bei den ausgezeichneten. Von dieser aus werden wir auf eine allgemeine Transformation der auf ein konjugiertes Netz einer Schar von Lichtgrenzen bezogenen Flächen geführt, die gestattet, zwei solchen Flächen, deren Lichtgrenzen zu denselben Lichtrichtungen ren, beliebig viele abzuleiten.

Eine Fläche, bezogen auf eine beliebige Schar von Lichtgrenzen konst. und die konjugierte Schar der Lichtrichtungskurven $u =$ konst., die Darstellung:

$$z_i = b_i(u) + \int \Phi(u, v)\beta_i(v)\, dv.$$

n wie die Gleichungen

$$\frac{\partial z_i}{\partial v} = \Phi(u, v)\beta_i(v)$$

en, sind die Tangenten an die Kurven $u =$ konst. längs einer Kurve v_0 alle parallel zu der festen Richtung $(\beta_1(v_0) : \beta_2(v_0) : \beta_3(v_0))$. Die

Kurven $v =$ konst. sind also Lichtgrenzen und die Kurven $u =$ konst. di zugehörigen Lichtrichtungskurven, und diese bilden, wie die Beziehunge

$$\frac{\partial^2 z_i}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial \Phi(u,v)}{\partial u}\beta_i(v) = \frac{1}{\Phi(u,v)}\frac{\partial \Phi(u,v)}{\partial u}\frac{\partial z_i}{\partial v} \tag{51}$$

ergeben, ein konjugiertes Netz.

Wollen wir nun das System der Tangenten der Kurven $v =$ kons finden, so wissen wir, daß dieses parallel ist zu den Radienvektoren d Fläche:

$$\frac{\partial z_i}{\partial u} = b_i'(u) + \int \frac{\partial \Phi(u,v)}{\partial u}\beta_i(v)\,dv. \tag{52}$$

Diese ist aber selbst wieder auf Lichtgrenzen $v =$ konst. bezogen, so da die Lichtrichtungen in entsprechenden Punkten zu denen von (z_i) paralle sind. Man ersieht das unmittelbar aus den Formeln (51). Ziehen wir al durch die Punkte von (z_i) die Parallelen zu den Radienvektoren v $\left(\frac{\partial z_i}{\partial u}\right)$, so bilden diese das gesuchte Lichtgrenztangentensystem:

$$\begin{aligned} X_i = b_i(u) &+ \int \Phi(u,v)\,\beta_i(v)\,dv \\ &+ w(u,v)\left[b_i'(u) + \int \frac{\partial \Phi(u,v)}{\partial u}\beta_i(v)\,dv\right]. \end{aligned} \tag{53}$$

Dies ist nun in ganz analoger Weise durch zwei Flächen erzeugt, die a Scharen von Lichtgrenzen bezogen sind, die zu denselben Lichtrichtunge gehören, wie wir das bei den ausgezeichneten Lichtgrenzen schon sahe Wir haben hier als Leitfläche des Strahlensystems die eine Brennfläche (selbst benutzt und als Richtfläche die Ableitungsfläche $\left(\frac{\partial z_i}{\partial u}\right)$, die in en sprechenden Punkten parallele Tangenten an die Kurven $u =$ konst. habe die ihrerseits längs jeder Kurve $v =$ konst. parallele Zylinder bilden.

Es ist nun leicht zu sehen, daß das Lichtgrenztangentensystem no weitere Flächen als Leitflächen zuläßt, die in derselben Beziehung z Brennfläche (z_i) stehen. Führen wir nämlich in (53)

$$w = w(u) \tag{54}$$

ein, so erhalten wir:

$$Y_i = [b_i(u) + w(u)\,b_i'(u)] + \int \left[\Phi(u,v) + w(u)\frac{\partial \Phi(u,v)}{\partial u}\right]\beta_i(v)\,dv \tag{55}$$

und dies ist für jede feste Wahl der willkürlichen Funktion $w(u)$ e Fläche, bezogen auf ein konjugiertes Netz mit einer Schar von Lic grenzen, deren Lichtrichtungen zu denen auf der Fläche (z_i) parallel si Wir können also durch unser Lichtgrenztangentensystem unendlich vi Flächen dieser Art legen, die alle als Leitflächen des Strahlensyste dienen können, da durch jeden ihrer Punkte ein und nur ein Strahl h

hgeht. Alle diese Flächen werden durch die abwickelbaren Flächen Strahlensystems nach dem konjugierten Netz der Lichtgrenzen und trichtungskurven geschnitten, da dies auf der Fläche (z_i) der Fall ist diese Netze einander auf sämtlichen Flächen entsprechen. Geht man der Brennfläche (z_i) längs der Strahlen um Stücke fort, die pro- ional zu den Radienvektoren von $\left(\frac{\partial z_i}{\partial u}\right)$ in derselben Richtung sind wobei die Proportionalitätsfaktoren längs jeder Lichtrichtungskurve konst. konstant sind, so erhält man stets eine Fläche (Y_i).

Wenden wir diese letzten Überlegungen auf die Lichtgrenztangenten- eme an, die zu ausgezeichneten Lichtgrenzen gehören, so ergibt zu- st der Vergleich von (49) und (51) mit (21) und (29), daß die- en für

$$\left\{\begin{array}{c} \Phi(u,v) = A(u) - \mathsf{A}(v), \\ b_i(u) = A(u)\,a_i(u) - \int A(u)\,a_i'(u) = \int A'(u)\,a_i(u)\,du, \\ \beta_i(v) = \alpha_i'(v) \end{array}\right.$$

lten werden. Die analytische Charakterisierung unserer Flächenklasse (y_i) n die allgemeine (z_i) geschieht also durch die Annahmen (56), von en ja nur die erste wesentlich ist. Weiterhin erkennen wir, daß die he (η_i) der Flächenfamilie $(Y_i^{(1)})$ für die Fläche $(y_i^{(1)})$ angehört, und für den Wert $w^{(1)}(u) = -\frac{A(u)}{A'(u)}$. Denn wir haben:

$$\left\{\begin{array}{l} Y_i^{(1)} = A(u)[a_i(u) + \alpha_i(v)] - [\int A(u)\,a_i'(u)\,du + \int \mathsf{A}(v)\,\alpha_i'(v)\,dv] \\ \qquad + w^{(1)}(u)\,A'(u)[a_i(u) + \alpha_i(v)]. \end{array}\right.$$

wurde bei dem ausgezeichneten Lichtgrenztangentensystem die zweite nfläche $(y_i^{(2)})$ ebenfalls längs Lichtgrenzen berührt. Wir können also von dieser aus eine Schar von Flächen (Y_i) konstruieren:

$$Y_i^{(2)} = \mathsf{A}(v)[a_i(u) + \alpha_i(v)] - [\int A(u)\,a_i'(u)\,du + \int \mathsf{A}(v)\,\alpha_i'(v)\,dv] + w^{(2)}(v)\,\mathsf{A}'(v)[a_i(u) + \alpha_i(v)],$$

in dieser ist die Fläche (η_i) ebenfalls enthalten, und zwar für $(v) = -\frac{\mathsf{A}(v)}{\mathsf{A}'(v)}$. Diese ist also Durchschnitt der beiden Flächenscharen ') und $(Y_i^{(2)})$, die auf die beiden Brennflächen $(y_i^{(1)})$ und $(y_i^{(2)})$ nach llelen Lichtrichtungen bezogen sind.

Wir haben im vorigen die Eigenschaft der ausgezeichneten Licht- ztangentensysteme benutzt, daß sie beide Brennflächen längs Licht- zen berühren, und werden nun zu untersuchen haben, ob diese nschaft noch für allgemeinere Lichtgrenztangentensysteme gilt. Zu

diesem Zweck stellen wir wieder nach den Gleichungen (28) die Koord
naten der zweiten Brennfläche auf und finden:

$$z_i^{(2)} = b_i(u) + \int \Phi(u,v)\beta_i(v)\,dv - \frac{\Phi(u,v)}{\frac{\partial \Phi(u,v)}{\partial u}}\left(b_i'(u) + \int \frac{\partial \Phi(u,v)}{\partial u}\beta_i(v)\,dv\right), \tag{59}$$

da nach (51)

$$m_2 = \frac{1}{\Phi(u,v)}\frac{\partial \Phi(u,v)}{\partial u} \tag{60}$$

ist.

Sollen nun auf der zweiten Brennfläche $(z_i^{(2)})$ die Kurven $u = \text{konst}$ die auf ihr liegenden Rückkehrkanten der abwickelbaren Flächen d Strahlensystems, Lichtgrenzen sein, so müssen die Koordinaten $z_i^{(2)}$ v der Form

$$z_i^{(2)} = \gamma_i(v) + \int \Psi(u,v)\,c_i(u)\,du \tag{61}$$

sein, und das ist für eine beliebige Funktion $\Phi(u,v)$ in den Formeln (5 nicht möglich. Wir können vielmehr umgekehrt leicht zeigen, daß di nur für die Flächen (y_i), also für $\Phi(u,v) = A(u) - A(v)$ eintreten kan

Zunächst ergibt sich unmittelbar, daß ein Strahlensystem, welch seine beiden Brennflächen nach Lichtgrenzen berühren soll, als Richtfläch eine Schiebfläche haben muß, so zwar, daß die Richtkegel der a wickelbaren Flächen aus ihr die beiden Scharen erzeugender Kurven au schneiden. Denn auf der Richtfläche (52) des Strahlensystems entsprech ja der Schar von abwickelbaren Flächen, deren Rückkehrkanten Lich grenzen auf (z_i) waren, wieder Lichtgrenzen, und der zweiten Schar d konjugierte Schar der Lichtrichtungskurven. Soll also die zweite Sch auch Lichtgrenzen zu Rückkehrkanten haben, so müssen ihre Bilder a der Richtfläche ebenfalls Lichtgrenzen sein, und wir müssen für uns Strahlensystem eine Richtfläche (ξ_i) angeben können, auf der ein ko jugiertes Netz von Lichtgrenzen liegt, also eine Schiebfläche:

$$\xi_i = a_i(u) + \alpha_i(v). \tag{62}$$

Jede andere Richtfläche, d. h. jede Fläche, deren Radienvektoren in e sprechenden Punkten parallel zu den Strahlen des Systems sind, hat da die Form:

$$\zeta_i = \varrho(u,v)\,\zeta_i = \varrho(u,v)[a_i(u) + \alpha_i(v)]. \tag{63}$$

Wir finden also insbesondere, wenn wir das System auf zweifache We als Lichtgrenztangentensystem nach den Formeln (50) bis (53) erzeug

$$\frac{\partial z_i^{(1)}}{\partial u} = \lambda(u,v)[a_i(u) + \alpha_i(v)], \quad \frac{\partial z_i^{(2)}}{\partial v} = \mu(u,v)[a_i(u) + \alpha_i(v \tag{64}$$

Grund der Beziehung (51) und der analogen, aus (61) sich ergeben- für die $z_i^{(2)}$ folgt dann weiter:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z_i^{(1)}}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{\partial \lambda(u,v)}{\partial v}[a_i(u)+\alpha_i(v)] + \lambda(u,v)\alpha_i'(v) = \dfrac{\partial \Phi(u,v)}{\partial u}\beta_i(v), \\ \dfrac{\partial^2 z_i^{(2)}}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{\partial \mu(u,v)}{\partial u}[a_i(u)+\alpha_i(v)] + \mu(u,v)a_i'(u) = \dfrac{\partial \Psi(u,v)}{\partial v}c_i(u), \end{cases}$$

diese Gleichungen können nur bestehen für $\frac{\partial \lambda}{\partial v}=0$, $\frac{\partial \mu}{\partial u}=0$, also:

$$\lambda = \frac{\partial \Phi(u,v)}{\partial u} = A'(u), \qquad \mu = \frac{\partial \Psi(u,v)}{\partial v} = \mathsf{A}'(v)$$

$$\frac{\partial z_i^{(1)}}{\partial u} = A'(u)[a_i(u)+\alpha_i(v)], \qquad \frac{\partial z_i^{(2)}}{\partial v} = \mathsf{A}'(v)[a_i(u)+\alpha_i(v)].$$

sind aber nach (57) und (58) gerade die Ableitungsflächen der Brenn-en eines ausgezeichneten Lichtgrenztangentensystems, die als Richt-en nach (52) und (53) gewählt werden können. Wir erhalten also einzige Lichtgrenztangentensysteme, die beide Brennflächen nach Licht-zen berühren, die ausgezeichneten Lichtgrenztangentensysteme. Wir n hiermit eine charakterisierende Eigenschaft der ausgezeichneten Licht-ztangentensysteme und der ausgezeichneten Scharen von Lichtgrenzen nnen, die wir ja ursprünglich durch die Forderung festlegten, daß sie Lichtgrenztangentensystemen parallel sein sollten, die eine Schar von eln als abwickelbare Flächen enthalten, so daß die eine Brennfläche ine Kurve ausartet. Wir können dann das Ergebnis aussprechen:

Die ausgezeichneten Lichtgrenztangentensysteme sind die einzigen tgrenztangentensysteme, welche beide Brennflächen nach Lichtgrenzen hren.

§ 8.

Eine allgemeine Transformation der auf Lichtgrenzen und ihre konjugierten bezogenen Flächen.

Wir wollen nun noch einen Schritt weiter gehen und ein Strahlen-m ganz allgemein dadurch erzeugen, daß wir als Richtfläche (r_i) und läche (l_i) zwei beliebige Flächen nehmen, die auf ein Netz von Licht-zen und Lichtrichtungskurven bezogen sind so, daß die letzteren in rechenden Punkten parallele Tangenten haben. Durch diese Forderung ann zunächst nur jeder Lichtgrenze eine Lichtgrenze als Ganzes zu-dnet, während wir die Zuordnung der Lichtrichtungskurven oder aber, auf dasselbe hinauskommt, die punktweise Zuordnung der Lichtgrenzen in der Hand haben. Wir können also die Darstellung noch in weitem

Maße willkürlich wählen, haben aber natürlich durch eine bestimmte Wa der 10 willkürlichen Funktionen, indem wir die Koordinaten in der For

$$(68) \quad l_i = e_i(u) + \int \Phi(u, v)\, \varepsilon_i(v)\, dv, \qquad r_i = g_i(u) + \int \Psi(u, v)\, \varepsilon_i(v)\, d$$

voraussetzen, eine ganz bestimmte punktweise Abbildung der beiden Fläche vor uns. Auch dies allgemeine Strahlensystem, welches nun die Da stellung

$$(69) \quad X_i = e_i(u) + \int \Phi(u, v)\, \varepsilon_i(v)\, dv + w(u, v)\,[g_i(u) + \int \Psi(u, v)\, \varepsilon_i(v)\, d$$

hat, besitzt noch gewisse Eigenschaften, die den Lichtgrenztangente systemen eigen sind, nämlich diejenigen, die darauf beruhen, daß die Lich richtungskurven auf Leit- und Richtfläche alle dasselbe Tangentenbil haben. Und das sind die beiden folgenden, daß man erstens stets wied Flächen desselben Charakters erhält, wenn man längs jeder Lichtrichtung kurve die mit beliebigen, von Kurve zu Kurve wechselnden Konstante multiplizierten Radienvektoren der entsprechenden Punkte der Richtfläch abträgt, und zweitens, daß auf allen diesen Flächen der einen Schar vo abwickelbaren Flächen des Strahlensystems die Lichtrichtungskurven en sprechen. Man kann diese beiden Ergebnisse leicht aus (69) ableite Doch erscheint es, um ihren wahren Charakter zu erkennen, zweckmäßige sie als Sätze über Kurven mit demselben Tangentenbild zu beweisen. Ma ersieht eben auf diesem Wege unmittelbar, daß sie tatsächlich von d speziellen Zuordnung der Lichtrichtungskurven oder also der punktweise Zuordnung der Lichtgrenzen unabhängig sind.

Gehen wir also jetzt in den Bereich der Parallelkurven, so könn wir die beiden zu beweisenden Sätze so aussprechen:

Hat man irgend zwei Parallelkurven (Kurven mit demselben Tangente bild) und zieht durch die Punkte der einen Parallele zu den Erzeugend eines die andere Kurve projizierenden Kegels, so bilden diese stets ei abwickelbare Fläche.

Geht man längs der Erzeugenden dieser Fläche um Stücke fort, d proportional zu den auf den entsprechenden Erzeugenden des Kegels dur die Kurvenpunkte ausgeschnittenen Strecken sind, so bilden die Endpunk dieser Strecken stets wieder eine Parallelkurve.

Der zweite Satz ist in dieser Form sowohl anschaulich wie analyti eine Selbstverständlichkeit. Betrachten wir, um zunächst einmal anschauli heuristisch vorzugehen, das Dreieck, welches die Tangente in einem Punk der projizierten Kurve und zwei nach auf ihr gelegenen Kurvenpunkt führende Erzeugende des Kegels zu Seiten hat. Dann fordert unser Sa daß wir die beiden auf dem Kegel gelegenen Seiten unseres Dreiecks parallel zu sich verschieben sollen, daß die vorher zusammenfallend

punkte nun auf einer Parallelen zur dritten Seite, der Tangente an Leitkurve, liegen sollen. Dann liegen aber auch die beiden Ecken, die er auf der Tangente der Richtkurve lagen, wieder auf einer Parallelen dieser, und dies ist die Tangente an den so erzeugten Punktort, der eine Parallelkurve zu den beiden gegebenen ist. Die ganzen Betungen bleiben gültig, wenn wir die Dreiecksseiten bei der Verschiebung selben Verhältnis dehnen. Analytisch stellen sich zwei Parallelkurven er Form

$$x_i = \alpha_i(t), \qquad y_i = \int f(t)\,\alpha_i'(t)\,dt$$

und durch die geforderte Zusammensetzung erhalten wir die Kurve:

$$z_i = y_i + c\,x_i = \int (f(t) + c)\,\alpha_i'(t)\,dt,$$

wieder eine Parallelkurve ist.

Die Richtigkeit des ersten Satzes erkennt man ebenso leicht. Betten wir wieder das Dreieck aus Tangente und den Radienvektoren den auf ihr liegenden benachbarten Kurvenpunkten, so werden ja beiden Seiten, welche zunächst durch den Anfangspunkt gingen, durch eben betrachtete Transformation in die Seiten eines Paralleltrapezes geführt, liegen also in einer Ebene und schneiden sich. Diese beiden pezseiten sind aber aufeinanderfolgende Erzeugende der durch die eine ve gelegten geradlinigen Fläche, die folglich abwickelbar ist. Man das auch leicht analytisch beweisen, wenn man die Krümmung der dlinigen Fläche

$$z_i(t, u) = y_i + u\,\frac{x_i}{\sqrt{\sum x_i^2}} = \int f(t)\,\alpha_i'(t)\,dt + u\,\frac{\alpha_i(t)}{\sqrt{\sum \alpha_i^2(t)}}$$

chnet, auf die unsere Konstruktion führt. Der Zähler des Krümmungsdrucks ist ja gleich dem Quadrat der Determinante[8]):

$$\left| f(t)\,\alpha_i'(t),\ \frac{\alpha_i(t)}{\sqrt{\sum \alpha_i^2(t)}},\ \frac{\alpha_i'(t)}{\sqrt{\sum \alpha_i^2(t)}} - \frac{\alpha_i(t)\sum \alpha_i(t)\,\alpha_i'(t)}{\left(\sqrt{\sum \alpha_i^2(t)}\right)^3} \right|,$$

wie man sofort sieht, identisch verschwindet, so daß unser Satz in em Umfange bewiesen ist.

Um nun unsere Aussagen von den Parallelkurven auf Flächen mit allelkurvenscharen auszudehnen, fehlt noch der Nachweis, daß eine ar von Kurven (z_i) von der Gleichung (71) stets dann wieder auf r Fläche liegt, wenn die erzeugenden Kurvenscharen (x_i) und (y_i)

[8]) Siehe etwa Bianchi-Lukat, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Leipzig , S. 227, da $K = -\dfrac{D'^2}{EG - F^2}$.

nach Gleichung (70) je für sich eine Fläche erfüllen. Diesen Nachwe knüpfen wir am besten an Gleichung (69) an, in der nun u der Scha parameter und v der Parameter der Einzelkurve ist, den wir vorher m t bezeichneten. Dann findet unser Satz seinen Ausdruck in der Forme

$$(74)\quad Y_i = e_i(u) + \int \Phi(u,v)\,\varepsilon_i(v)\,dv + w(u)\left[g_i(u) + \int \Psi(u,v)\,\varepsilon_i(v)\,dv\right]$$
$$= \left[e_i(u) + w(u)\,g_i(u)\right] + \int \left[\Phi(u,v) + w(u)\,\Psi(u,v)\right]\varepsilon_i(v)\,dv,$$

der Verallgemeinerung von (53), die aussagt, daß man durch die a gegebene Konstruktion stets Flächen bezogen auf Lichtgrenzen erhält, dere Lichtrichtungen zu denen auf Richt- und Leitfläche in entsprechende Punkten parallel sind.

Endlich zeigt eine einfache Überlegung, wann die zweite Schar vo abwickelbaren Flächen unserer allgemeinsten Strahlensysteme auf alle Leitflächen (Y_i) die Lichtgrenzen ausschneidet. Dann müssen ja die Tan genten an die Lichtgrenzen längs jedes Strahles in einer festen Eben der einen Brennebene des Strahles, liegen, und diese Ebene ist paralle zu der Ebene durch die Lichtgrenztangente und den Radiusvektor de Richtfläche im entsprechenden Punkte, da der Kegel, welcher die Licht grenze der Richtfläche aus dem Anfangspunkt projiziert, Richtkegel de durch die zugeordnete Lichtgrenze der Leitflächen (Y_i) gehenden ab wickelbaren Fläche ist. Auch findet man sofort dies Ergebnis, wenn ma wieder die Krümmung der durch die Lichtgrenze $v = v^0$ gehenden gerad linigen Fläche berechnet. Man erhält bis auf nicht verschwindende Fak toren für den Zähler wieder das Quadrat der Determinante:

$$(75)\qquad \left|\frac{\partial l_i}{\partial u},\ r_i,\ \frac{\partial r_i}{\partial u}\right|,$$

deren Verschwinden eben die von uns schon gefundene Forderung aus spricht. Es ist dann also:

$$(76)\qquad \frac{\partial l_i}{\partial u} = \lambda(u,v)\,r_i + \mu(u,v)\frac{\partial r_i}{\partial u}$$

und

$$(77)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 l_i}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{\partial \Phi(u,v)}{\partial u}\,\varepsilon_i(v) \\ \quad = \dfrac{\partial \lambda(u,v)}{\partial v}\,r_i + \lambda(u,v)\dfrac{\partial r_i}{\partial v} + \dfrac{\partial \mu(u,v)}{\partial v}\dfrac{\partial r_i}{\partial u} + \mu(u,v)\dfrac{\partial^2 r_i}{\partial u\,\partial v} \\ \quad = \left(\lambda(u,v)\,\Psi(u,v) + \mu(u,v)\dfrac{\partial \Psi(u,v)}{\partial u}\right)\varepsilon_i(v) \\ \quad + \dfrac{\partial \lambda(u,v)}{\partial v}\left[g_i(u) + \int \Psi(u,v)\,\varepsilon_i(v)\,dv\right] \\ \quad + \dfrac{\partial \mu(u,v)}{\partial v}\left[g_i'(u) + \int \dfrac{\partial \Psi(u,v)}{\partial u}\,\varepsilon_i(v)\,dv\right]. \end{cases}$$

diese Gleichungen sind nur zu erfüllen für $\frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \mu}{\partial v} = 0$. Wir haben also:

$$\frac{\partial l_i}{\partial u} = \lambda(u)\, r_i + \mu(u) \frac{\partial r_i}{\partial u}.$$

ist leicht zu finden, daß das Strahlensystem ein Lichtgrenztangenten
em ist, daß also unter den Flächen (Y_i) die eine Brennfläche vor-
mt. Für die Flächen (Y_i) ergibt sich ja:

$$Y_i = l_i + w(u)\, r_i,$$

$$\frac{\partial Y_i}{\partial u} = \frac{\partial l_i}{\partial u} + w'(u)\, r_i + w(u) \frac{\partial r_i}{\partial u} = (\lambda(u) + w'(u))\, r_i + (\mu(u) + w(u)) \frac{\partial r_i}{\partial u}$$

hieraus folgt für $w(u) = -\mu(u)$:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial u} = (\lambda(u) - \mu'(u))\, r_i,$$

der Systemstrahl berührt die durch den Wert $w(u) = -\mu(u)$ charak-
ierte Leitfläche längs der Lichtgrenze $v = v_0$, und diese ist die eine
nfläche unseres Strahlensystems.

Die Formel (80) gestattet nun noch einen weiteren interessanten Schluß.
$w'(u) = -\lambda(u)$, $w(u) = -\int \lambda(u)\, du + c$ geht sie über in:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial u} = (\mu(u) - \int \lambda(u)\, du + c) \frac{\partial r_i}{\partial u}$$

besagt, daß für die Schar von ∞^1 Flächen (Y_i), welche durch die
te $w(u) = -\int \lambda(u)\, du + c$ erhalten werden, auch die Tangenten an
Lichtgrenzen parallel zu den entsprechenden an die Lichtgrenzen der
tfläche sind, so daß diese auf die Peterson-Guichardsche Weise
parallelen Tangenten an die Parameterlinien auf die Richtfläche be-
n sind. Jedes Lichtgrenztangentensystem besitzt also ∞^1 Leitflächen,
uf die Richtfläche nach parallelen Tangenten an die Parameterlinien
gen sind. Dieser Satz erleidet, wie Formel (81) zeigt, nur dann eine
nahme, wenn die Fläche (Y_i) Brennfläche ist. Denn unter den Flächen
befindet sich keine weitere, deren Lichtgrenztangenten mit den System-
len zusammenfallen. Wir können dann jedes Lichtgrenztangenten-
m durch zwei auf Lichtgrenzen und Lichtrichtungskurven bezogene
hen erzeugen, die nach parallelen Tangenten der Parameterlinien ein-
r zugeordnet sind, indem wir die eine als Leit-, die andere als Richt-
e wählen. Denn die Formeln (78) und (80) zeigen, daß die Be-
ng (78) für alle Flächen (Y_i) besteht, sobald sie für eine erfüllt ist.
lso für eine der Flächen (Y_i) die Tangente an die Lichtgrenze stets
llel zu der Ebene durch die Tangente an die Lichtgrenze und den

Radiusvektor im entsprechenden Punkte der Richtfläche, so besteht die Eigenschaft für alle Flächen der Familie und dies gilt insbesondere, wen die Tangenten an die Lichtgrenzen auf der Fläche (Y_i) parallel sind den entsprechenden Tangenten an die Richtfläche (r_i).

Es ist also für ein Lichtgrenztangentensystem charakteristisch, da es zu einer Richtfläche (r_i), aus der die Richtkegel der abwickelbare Flächen ein Netz von Lichtgrenzen und Lichtrichtungskurven ausschneide stets ∞^1 Leitflächen (Y_i) gibt, die nach parallelen Tangenten an die Lich grenzen und Lichtrichtungskurven auf die Fläche (r_i) bezogen sind. Nu besitzt aber ein Lichtgrenztangentensystem unendlich viele Richtfläche

$$R_i = \varrho(u) r_i = \varrho(u)\, g_i(u) + \int \varrho(u)\, \Psi(u, v)\, \varepsilon_i(v)\, dv, \tag{83}$$

die der obigen Forderung genügen, und unter diesen gibt es zu jed Fläche (Y_i) ∞^1 parallelgestellte im eben erwähnten Sinne. Um dies nac zuweisen, brauchen wir nur zu zeigen, daß man zu jeder Fläche (Y_i) Fl chen (R_i) so bestimmen kann, daß $\frac{\partial Y_i}{\partial u} = \sigma(u) \frac{\partial R_i}{\partial u}$ wird. Nun ist nach (8 für eine beliebige Fläche (Y_i):

$$\frac{\partial Y_i}{\partial u} = (\lambda(u) + w'(u)) r_i + (\mu(u) + w(u)) \frac{\partial r_i}{\partial u}, \tag{84}$$

andererseits nach (83):

$$\frac{\partial R_i}{\partial u} = \varrho'(u) r_i + \varrho(u) \frac{\partial r_i}{\partial u}, \tag{85}$$

und man findet die Bedingungen:

$$\sigma(u)\, \varrho'(u) = \lambda(u) + w'(u), \qquad \sigma(u)\, \varrho(u) = \mu(u) + w(u), \tag{86}$$

also:

$$\frac{\varrho'(u)}{\varrho(u)} = \frac{\lambda(u) + w'(u)}{\mu(u) + w(u)}, \qquad \varrho(u) = c\, e^{\int \frac{\lambda(u) + w'(u)}{\mu(u) + w(u)} du}. \tag{87}$$

Für die durch (87) bestimmten ∞^1 Werte von $\varrho(u)$ und die aus (86) si ergebenden Funktionen $\sigma(u)$ erhalten wir also ∞^1 Richtflächen (R_i), d in entsprechenden Punkten die Tangenten an die Lichtgrenzen und d Lichtrichtungen parallel zu denen auf der Fläche (Y_i) haben, die dur die bestimmte Funktion $w(u)$ festgelegt ist. Alle diese Flächen sind na (87) und (83) zueinander ähnlich und ähnlich gelegen, können also i wesentlichen als eine Fläche aufgefaßt werden.

Unsere letzten Ergebnisse können wir folgendermaßen zusammenfasse

Erzeugt man ein Strahlensystem dadurch, daß man zwei Flächen, d auf Lichtgrenzen und Lichtrichtungskurven bezogen und beliebig so punk weise einander zugeordnet sind, daß die Lichtrichtungen in entsprech den Punkten parallel sind, als Leit- und Richtfläche wählt, so entspric

Lichtrichtungskurven auf beiden Flächen die eine Schar von abwickel-
n Flächen des Strahlensystems. Dann lassen sich unendlich viele von
r willkürlichen Funktion einer Variablen abhängende Flächen angeben,
untereinander und zu den Ausgangsflächen in derselben Beziehung
en und von derselben Schar von abwickelbaren Flächen längs ihrer
trichtungskurven geschnitten werden.

Schneidet die zweite Schar von abwickelbaren Flächen eine dieser
ndlich vielen Leitflächen nach den Lichtgrenzen, so ist dies für alle
Fall und eine von ihnen wird durch die Systemstrahlen längs ihrer
tgrenzen berührt. Das Strahlensystem ist also ein Lichtgrenztangenten-
em. Die Leitflächen, welche von den abwickelbaren Flächen nach den
tgrenzen und Lichtrichtungskurven geschnitten werden, lassen sich
n in Scharen von ∞^1 Flächen anordnen, die unter sich und auf eine
r von ∞^1 ähnlichen Richtflächen nach parallelen Tangenten an die
tgrenzen und Lichtrichtungskurven bezogen sind. Man erhält also ein
tgrenztangentensystem, sobald man als Leitfläche und Richtfläche zwei
hen wählt, die nach parallelen Lichtrichtungen und Lichtgrenzen auf-
nder bezogen werden können, und sie in dieser Weise bezieht.

§ 9.

Anwendung der allgemeinen Ergebnisse auf ausgezeichnete Lichtgrenztangentensysteme und die mit ihnen verknüpften Flächenbiegungen.

Wir wollen nun unsere letzten Ergebnisse auf ausgezeichnete Lichtztangentensysteme anwenden und finden da zunächst, daß die beiden henfamilien $(Y_i^{(1)})$ und $(Y_i^{(2)})$ nach Gleichung (57) und (58) nicht nur eine Schiebfläche:

$$\eta_i = -\left[\int A(u)\, a_i'(u)\, du + \int \mathsf{A}(v)\, \alpha_i'(v)\, dv\right]$$

ein haben, sondern die ∞^1 Schiebflächen:

$$\psi_i = -\left[\int (A(u)+c)\, a_i'(u)\, du + \int (\mathsf{A}(v)+c)\, \alpha_i'(v)\, dv\right],$$

ür $w^{(1)}(u) = -\frac{A(u)+c}{A'(u)}$, $w^{(2)}(v) = -\frac{\mathsf{A}(v)+c}{\mathsf{A}'(v)}$ erhalten werden. Denn uß in jeder der beiden Flächenfamilien ∞^1 Flächen geben, die auf Richtschiebfläche:

$$\xi_i = a_i(u) + \alpha_i(v)$$

parallelen Tangenten an die Schubkurven bezogen sind, und das en nur Schiebflächen sein.

Betrachten wir ferner die Familie der Richtflächen (R_i), die von den tkegeln der abwickelbaren Flächen nach Lichtgrenzen und Lichtrich-

tungskurven geschnitten werden, so finden wir nach (83) und (90) d
zwei Familien:

$$(91) \qquad R_i^{(1)} = s(u)\,[a_i(u) + \alpha_i(v)], \qquad R_i^{(2)} = \sigma(v)\,[a_i(u) + \alpha_i(v)],$$

die Flächen von der in § 1 betrachteten Art sind und auf ein konjugiert
Netz bezogen sind, längs dessen Scharen die Tangentialebenen Kegel u
Zylinder umhüllen. Da nun jede Leitfläche $(Y_i^{(1)})$ bzw. $(Y_i^{(2)})$, die von d
abwickelbaren Flächen des Strahlensystems nach Lichtgrenzen und Lich
richtungskurven geschnitten wird, auf eine Fläche $(R_i^{(1)})$ bzw. $(R_i^{(2)})$ na
parallelen Tangenten an die Lichtgrenzen und Lichtrichtungskurven b
zogen ist, so folgt, daß jede Fläche (Y_i) von der einen Schar von a
wickelbaren Flächen nach ausgezeichneten Lichtgrenzen geschnitten wir
Denn die Flächen mit einer Schar ausgezeichneter Lichtgrenzen fanden w
ja durch die obige Beziehung zu den Flächen des § 1, den konisch-zyli
drischen Flächen. Wir erhalten also ein ausgezeichnetes Lichtgrenztangente
system und damit, wie sich eben ergab, gleich unendlich viele, wenn w
als Richtfläche eine beliebige konisch-zylindrische Fläche und als Leitfläch
eine ihr nach parallelen Tangenten an das konisch-zylindrische Netz z
geordnete Fläche wählen.

Die unendlich vielen Flächen $(Y_i^{(1)})$ bzw. $(Y_i^{(2)})$ lassen sich nun
Scharen von je ∞^1 Flächen anordnen, die aufeinander und auf diesel
Fläche $(R_i^{(1)})$ bzw. $(R_i^{(2)})$ nach parallelen Lichtrichtungen und Lichtgrenz
bezogen sind, für die also nach den allgemeinen Untersuchungen von §
das Biegungsproblem des § 5 auf dieselben Bedingungen führt. Au
genommen sind hier wieder die Brennflächen, die ja auf keine andere Le
fläche nach parallelen Lichtgrenzen bezogen werden können, so daß wir m
der Lösung des Biegungsproblems für sie zunächst keine weitere Lösu
gewinnen.

Eine Fläche $(Y_i^{(1)})$ hat ja die Darstellung:

$$\begin{aligned} Y_i^{(1)} &= [A(u) + w(u)A'(u)]\,[a_i(u) + \alpha_i(v)] \\ &\qquad - [\int A(u)a_i'(u)\,du + \int \mathsf{A}(v)\alpha_i'(v)\,dv] \\ &= B(u)\,[a_i(u_i) + \alpha_i(v)] \\ &\qquad - [\int A(u)a_i'(u)\,du + \int \mathsf{A}(v)\alpha_i'(v)\,dv]. \end{aligned}$$

Wir finden dann:

$$\frac{\partial Y_i^{(1)}}{\partial u} = B'(u)\,[a_i(u) + \alpha_i(v)] + (B(u) - A(u))\,a_i'(u)$$

und können dieses wieder in die Form:

$$\frac{\partial Y_i^{(1)}}{\partial u} = B'(u)\,[b_i(u) + \alpha_i(v)]$$

gen, wenn wir den Vektor $(b_i(u))$ durch:

$$b_i(u) = a_i(u) + \frac{B(u)+A(u)}{B'(u)} a_i'(u) = a_i(u) + C(u)\, a_i'(u)$$

mmen. Dann wird das Biegungsproblem für alle Flächen mit dem- n Vektor $(b_i(u))$, also demselben Koeffizienten $C(u)$ identisch. Dies rt aber für $w(u)$ die Bedingung:

$$w'(u) = w(u)\left[\frac{1}{C(u)} - \frac{A''(u)}{A'(u)}\right] - 1,$$

∞^1 Werte von $w(u)$, für die das Biegungsproblem auf dieselben Be- ungen führt.

Endlich wollen wir noch untersuchen, ob es möglich ist, das Biegungs- lem für alle Flächen $(Y_i^{(1)})$ bzw. $(Y_i^{(2)})$ gleichzeitig zu lösen. Zu diesem k müssen wir die Fundamentalgrößen von $(Y_i^{(1)})$ berechnen und n aus:

$$\frac{\partial Y_i^{(1)}}{\partial u} = B'(u)[a_i(u) + \alpha_i(v)] + (B(u) - A(u))\, a_i'(u),$$

$$\frac{\partial Y_i^{(1)}}{\partial v} = (B(u) - A(v))\, \alpha_i'(v)$$

Ausdrücke:

$$B'(u)^2 \sum [a_i(u) + \alpha_i(v)]^2 + (B(u) - A(u))^2 \sum a_i'^2(u) + 2B'(u)(B(u) - A(u)) \sum [a_i(u) + \alpha_i(v)]\, a_i'(u),$$

$$(B(u) - A(v))\{B'(u) \sum [a_i(u) + \alpha_i(v)]\, \alpha_i'(v) + (B(u) - A(u)) \sum a_i'(u)\, \alpha_i'(v)\},$$

$$(B(u) - A(v))^2 \sum \alpha_i'^2(v).$$

e Gleichungen zeigen uns, daß die Biegungsbedingungen (8) für die nfläche $(y_i^{(1)})$ sofort auch die Gleichheit von F und G für je zwei hen $(Y_i^{(1)})$ und $(\overline{Y_i^{(1)}})$, die gleichen Werten von $w(u)$ entsprechen, Folge haben. Soll dann auch $E = \overline{E}$ werden, so müssen wir noch die ngung (37) hinzunehmen, die aussagt, daß auch $(y_i^{(2)})$ dieselbe Biegung ttet. Wir finden also das Ergebnis:

Gestatten die beiden Brennflächen eines ausgezeichneten Lichtgrenz- ntensystems eine simultane Biegung, so gestatten alle Leitflächen) und $(Y_i^{(2)})$ die von den abwickelbaren Flächen des Systems nach ezeichneten Lichtgrenzen und Lichtrichtungskurven geschnitten werden, gleichzeitige Biegung.

Wir sind also schließlich wieder durch systematische Verschärfu der Fragestellungen von den ganz allgemeinen Betrachtungen am Anfan des § 8 zu den ganz speziellen Fragestellungen des § 6 zurückgelangt u haben so die Einordnung der in den ersten sechs Paragraphen entwickelt speziellen Untersuchungen in einen großen Rahmen gewonnen. Auf ve schiedene Einzeluntersuchungen, die sich an die hier behandelten allg meinen Fragen noch anschließen, behalte ich mir vor, später zurüc zukommen.

(Eingegangen am 21. Februar 1925.)

lementarer Beweis einiger asymptotischer Formeln der additiven Zahlentheorie.

Von

K. Knopp in Königsberg und I. Schur in Berlin.

Die Herren G. H. Hardy und S. Ramanujan[1]) haben zum ersten e die Frage nach dem asymptotischen Verhalten der in den Elementen additiven Zahlentheorie auftretenden Funktionen aufgeworfen. Die ressantesten dieser Funktionen sind mit den Entwicklungskoeffizienten isser elliptischer Modulfunktionen identisch oder stehen in sehr naher ehung zu solchen. So liefert die Entwicklung

$$P(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

len Koeffizienten p_n für $n > 0$ die Anzahl der verschiedenen Zerngen von n in gleiche oder ungleiche positive ganzzahlige Summanden, Entwicklung

$$\overline{P}(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{p}_n x^n$$

len Koeffizienten $\overline{p}_n$ für $n > 0$ die Anzahl der verschiedenen Zerngen von n in lauter *ungleiche* ganzzahlige positive Summanden, usw. Die von den genannten Autoren gewonnenen Ergebnisse sind von r staunenswerten Reichweite: In erster Annäherung ergab sich — wir olgen zunächst nur die Zerlegungszahlen p_n — die Formel

$$\log p_n \simeq 2\sqrt{\alpha n} \qquad \left(\alpha = \frac{\pi^2}{6}\right)$$

$$p_n = e^{2\sqrt{\alpha n}(1+o(1))}.$$

[1]) G. H. Hardy and S. Ramanujan, *Asymptotic formulae for the distribution tegers of various types*, Proceedings of the London Mathematical Society **16** (1916), 2—132. — G. H. Hardy and S. Ramanujan, *Asymptotic formulae in combory aualysis*, ebenda **17** (1917), S. 75—115.

Doch gehen sie in den genannten Arbeiten sehr erheblich über dies E gebnis hinaus. Sie zeigen, als zweiten Schritt, daß

$$p_n \cong \frac{1}{4n\sqrt{3}}\, e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}} \tag{4}$$

ist, und geben damit eine erste, im eigentlichen Sinne asymptotisch Formel für p_n selbst. Endlich aber geben sie eine asymptotische *Entwicklung* für p_n, bei der das Fehlerglied die Größenordnung $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ hat, die also für alle hinreichend großen Werte von n den *genauen* We von p_n liefert!

Die Beweise aller dieser Formeln sind von großer Schönheit, ab recht schwierig. Die zuletzt genannten Entwicklungen erfordern zu ihr Beweisen den ganzen gewaltigen analytischen Apparat, mit dessen Hil seitdem in der analytischen Behandlung der Probleme der additiven Zahle theorie so bedeutende Fortschritte gemacht worden sind[2]). Der Bewe von (4) ist im Prinzip nicht wesentlich einfacher; aber selbst der Bewe von (3), der in der ersten der beiden unter [1]) genannten Arbeiten geliefe wird und auf ganz anderen Gedanken beruht, setzt die Kenntnis ein Mittelungs-Umkehrsatzes („Tauberian theorem") für den Funktionenty

$$e^{\frac{\gamma}{1-x}}$$

voraus. Sind die Umkehrsätze bei den Funktionentypen

$$\frac{\gamma}{1-x} \quad \text{und} \quad \frac{\gamma}{(1-x)^{\nu}}$$

schon „difficult and delicate", so gilt dies von den hier erforderliche Sätzen in noch höherem Maße. Die einzigen bisher bekannten Bewei der Formel (3) müssen daher als recht kompliziert bezeichnet werde

In Anbetracht der Schönheit dieser Formel wird es daher von Inte esse sein, wenn wir im folgenden einen im guten Sinne elementaren B weis dafür mitteilen (§ 1). Er läßt sich kurz dahin charakterisieren, d es auf Grund eines sehr leicht zu beweisenden Satzes über Majorant gewisser Potenzreihen (Hilfssatz 1) nicht nötig ist, die nicht ganz ei fachen Umkehrsätze für den genannten Funktionentyp heranzuziehen, so dern lediglich das Verhalten der Entwicklungskoeffizienten der speziell Funktion

$$e^{\gamma\frac{x}{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

[2]) Vgl. etwa E. Landau, *Über die Hardy-Littlewoodschen Arbeiten zur additiv Zahlentheorie*. Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **30** (192 S. 179–185. besonders S. 184–185.

st asymptotisch abzuschätzen. Das ist bereits von Herrn O. Perron[3] Hilfe des Residuensatzes durchgeführt worden. Die von uns zu be-ende Abschätzungsformel läßt sich aber auch auf ganz elementarem e ableiten (Hilfssatz 2).

Die damit eingeschlagene Methode erweist sich dann auch als stark g, eine ganze Reihe ähnlicher Formeln zu beweisen (§ 2), die sich die Anzahl der additiven Zerlegungen von n in andere Klassen von manden — etwa in *verschiedene* positive, gleiche oder ungleiche *un-de* Summanden usw. — beziehen[3a]).

§ 1.

Satz 1. *Wird*

$$P(x) = \prod_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

zt, so daß p_n für $n > 0$ die Anzahl der verschiedenen Zerlegungen n in gleiche oder ungleiche positive ganzzahlige Summanden angibt, t

$$\log p_n \cong 2\sqrt{\frac{\pi^2}{6} n}\,.$$

Es ist zunächst

$$\frac{x P'(x)}{P(x)} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\lambda x^{\lambda}}{1-x^{\lambda}} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sigma_{\lambda} x^{\lambda} = (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n,$$

σ_{λ} die Summe aller Teiler von λ bedeutet,

$$\sigma_{\lambda} = \sum_{d/\lambda} d,$$

$$s_n = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n$$

t wird. Mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n x^{n-1} = S(x)$$

) O. Perron, *Über das infinitäre Verhalten der Koeffizienten einer gewissen reihe*, Archiv der Mathematik und Physik 22 (1914), S. 329—340.

[3a]) Ein weiterer Ausbau der Methode findet sich in der Arbeit: Konrad Knopp, totische *Formeln der additiven Zahlentheorie*, Schriften der Königsberger Ge-Gesellschaft, Naturwissenschaftliche Klasse, 2. Jahr, Heft 3 (1925). Es wer-er additive Zerlegungen von n in Summanden betrachtet, die einer beliebig hriebenen Folge von natürlichen Zahlen $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{\nu} < \ldots$ angehören, wo-ese Folge nur die Eigenschaft hat, daß die *Anzahl* $L(n)$ der unterhalb n ge-n Zahlen λ_{ν} eine Bedingung der Form

$$L(n) \cong \beta n^{\varrho}, \qquad (\beta > 0,\ \varrho > 0),$$

ist also

$$P(x) = \exp \int_0^x (1-x) S(x)\, dx\,.^{4}) \tag{6}$$

Aus dieser Formel läßt sich nun die Behauptung (3) fast unmittelbar ablesen, wenn man erstlich das bekannte asymptotische Verhalten der Koeffizienten s_n in Betracht zieht:

$$s_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\left[\frac{n}{k}\right]^2 + \left[\frac{n}{k}\right] \right) \cong \frac{\pi^2}{12} n^2\,,^{5}) \tag{7}$$

sodann den Einfluß einer geringen Änderung der s_n untersucht und schließlich die Koeffizienten der Entwicklung der Funktion

$$e^{\gamma \frac{x}{1-x}}$$

abzuschätzen sucht. Das soll in den folgenden Hilfssätzen geschehen.

Hilfssatz 1. *Es sei*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$$

eine für $|x| < 1$ *konvergente Potenzreihe mit reellen Koeffizienten, und es sei, wenn*

$$\exp \int_0^x (1-x) f(x)\, dx = F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n, \tag{8}$$

insbesondere also $A_0 = 1$ *gesetzt wird, für* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *stets*

$$A_n \leqq A_{n+1}\,. \tag{9}$$

Hat dann

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1}$$

positive, monoton wachsende Koeffizienten, die nicht kleiner sind als die entsprechenden von $f(x)$,

$$a_n \leqq b_n \qquad (n = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

so hat auch

$$\exp \int_0^x (1-x) g(x)\, dx = G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n \tag{11}$$

nicht kleinere Koeffizienten als $F(x)$:

$$A_n \leqq B_n, \qquad (n = 0, 1, \ldots \tag{12}$$

---

[4]) Wir schreiben gelegentlich $\exp w$ statt e^w.

[5]) Vgl. Dirichlet, Werke 2, S. 59.

Ist bei sonst gleichen Voraussetzungen stets

$$a_n \geqq b_n,$$

st auch stets

$$A_n \geqq B_n.$$

Beweis. Nach (8) ist

$$F'(x) = [(1-x)f(x)] \cdot F(x) = f(x) \cdot [(1-x)F(x)]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) x^{n-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (A_n - A_{n-1}) x^n,$$

$a_0 = A_{-1} = 0$ gesetzt wird.

Hiernach ist für $n \geqq 1$ einerseits

$$n A_n = (a_n - a_{n-1}) A_0 + \ldots + (a_2 - a_1) A_{n-2} + a_1 A_{n-1},$$

erseits

$$n A_n = a_n A_0 + a_{n-1}(A_1 - A_0) + \ldots + a_1 (A_{n-1} - A_{n-2}).$$

Die rechte Seite von (13) setzen wir zur Abkürzung $= (a, A)$, die e Seite von (14) gleich $[a, A]$, so daß

$$n A_n = (a, A) = [a, A].$$

analog ist dann

$$n B_n = (b, B) = [b, B].$$

un stets $a_n \leqq b_n$, so ist zunächst

$$A_0 = 1 = B_0 \quad \text{und} \quad A_1 = a_1 \leqq b_1 = B_1,$$

damit die Behauptung (12) für $n = 0$ und 1 als richtig erkannt. t man $A_\nu \leqq B_\nu$ schon für $\nu = 0, \ldots, n-1$ als bewiesen an, so folgt, e Koeffizienten der a_ν in (14) sämtlich $\geqq 0$ sind,

$$n A_n = [a, A] \leqq [b, A] = (b, A).$$

da nun, wenn in (13) die a_ν durch die b_ν ersetzt werden, die Koten der A_ν dort wieder alle $\geqq 0$ sind, so ist weiter

$$n A_n \leqq (b, B) = n B_n.$$

also auch $A_n \leqq B_n$ und damit (12) allgemein bewiesen. — Genau ergibt sich (12′) unter der Voraussetzung (10′).

Hilfssatz 2. *Ist* $\gamma > 0$ *und wird*

$$e^{\gamma \frac{x}{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

gesetzt, so ist

$$\log c_n \simeq 2\sqrt{\gamma n}. \tag{16}$$

Beweis. Es ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma^m}{m!} \left(\frac{x}{1-x}\right)^m = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\gamma^m}{m!} \binom{m+\nu-1}{\nu} x^{m+\nu}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{\gamma^k}{k!} \right\} x^n,$$

also $c_0 = 1$, und für $n \geqq 1$

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{\gamma^k}{k!}. \tag{17}$$

Die Glieder dieser Summe wachsen, solange

$$\binom{n-1}{k-1} \frac{\gamma^k}{k!} \leqq \binom{n-1}{k} \frac{\gamma^{k+1}}{(k+1)!},$$

d. h.

$$k(k+1) \leqq (n-k)\gamma$$

oder

$$k^2 + (\gamma+1)k - \gamma n \leqq 0$$

ist. Die positive Wurzel dieser quadratischen Funktion von k ist

$$\xi = -\frac{\gamma+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^2 + \gamma n},$$

und das größte Glied der Summe (17) wird für $k = [\xi]$ oder $[\xi+1]$ erhalten. Bezeichnen wir dieses mit μ_n, und mit p den Wert von k, für den es erhalten wird, so ist einerseits

$$\mu_n \leqq c_n \leqq n\,\mu_n$$

und also

$$\log c_n = \log \mu_n + O(\log n), \tag{18}$$

andererseits

$$p = \sqrt{\gamma n} + O(1). \tag{19}$$

Nun ist

$$\log \mu_n = \log \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!} \frac{\gamma^p}{p!},$$

also, wenn wir das Anfangsglied der Stirlingschen Formel

$$\log q! = q \log q - q + O(\log q)$$

benutzen[6]),

[6]) Dieses erhält man bekanntlich unmittelbar, wenn man die Beziehungen

$$\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} < e < \left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1} \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots, q$$

miteinander multipliziert.

$$\log c_n = \log \mu_n + O(\log n)$$
$$= n\log n - n - p\log p + p - (n-p)\log(n-p) + n - p$$
$$+ p\log\gamma - p\log p + p + O(\log n)$$
$$= n\log n - p\log\frac{p^2}{\gamma} + p - (n-p)\left[\log n + \log\left(1 - \frac{p}{n}\right)\right]$$
$$+ O(\log n).$$

cksichtigt man nun (19), so erhält man

$$\log c_n = 2p + O(\log n) = 2\sqrt{\gamma n} + O(\log n).$$

it ist (16) bewiesen.

Hilfssatz 3. *Es seien* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ *reelle Größen, die alle größer als* 2 *und gegen* 2 *konvergieren. Setzt man dann*

$$\begin{cases} \gamma_0 = 0, \quad \gamma_1 = 1, \\ \gamma_{n+1} + \gamma_{n-1} = \alpha_n \gamma_n \quad \text{für } n \geqq 1, \end{cases}$$

ird

$$\begin{cases} \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots \quad \text{und} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = 1.^{7}) \end{cases}$$

Beweis. Daß die γ_n monoton wachsen, folgt wegen $\alpha_n > 2$, $\gamma_0 < \gamma_1$ den Schluß von n auf $n+1$ aus

$$(\gamma_{n+1} - \gamma_n) = (\gamma_n - \gamma_{n-1}) + (\alpha_n - 2)\gamma_n.$$

r liefert (20)

$$\gamma_{n+1} \leqq \alpha_n \gamma_n, \quad \text{also auch} \quad \frac{\gamma_n}{\alpha_{n-1}} \leqq \gamma_{n-1};$$

liefert daher weiter

$$\gamma_{n+1} + \frac{\gamma_n}{\alpha_{n-1}} \leqq \alpha_n \gamma_n \quad \text{oder} \quad \gamma_{n+1} \leqq \left(\alpha_n - \frac{1}{\alpha_{n-1}}\right)\gamma_n$$

also auch

$$\frac{\gamma_n}{\alpha_{n-1} - \frac{1}{\alpha_{n-2}}} \leqq \gamma_{n-1}.$$

r folgt jetzt weiter aus (20)

$$\gamma_{n+1} \leqq \left(\alpha_n - \frac{1}{\alpha_{n-1} - \frac{1}{\alpha_{n-2}}}\right)\gamma_n$$

) Dieser Satz ist als Spezialfall in einem allgemeineren Satze enthalten, den O. Perron im § 4 seiner Arbeit: *Über lineare Differenzengleichungen zweiter ng, deren charakteristische Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat*, Sitzungsberichte eidelberger Akademie der Wissenschaften 1917, bewiesen hat. Unser Beweis, ch auf den allgemeinen Fall anwendbar ist, weist an einer Stelle eine nicht nwesentliche Abweichung von der Perronschen Schlußweise auf.

usw. Nach m Schritten ergibt sich, wenn der Kettenbruch

$$\alpha_n - \cfrac{1}{|\alpha_{n-1}} - \cfrac{1}{|\alpha_{n-2}} - \cdots - \cfrac{1}{|\alpha_{n-m}}$$

mit $(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{n-m})$ bezeichnet wird, für $n > m$

$$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \leqq (\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{n-m}).$$

Hält man hier m fest und läßt n über alle Grenzen wachsen, so erhält man wegen $\alpha_\nu \to 2$

$$\overline{\lim}\, \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \leqq (2, 2, \ldots, 2) = \frac{m+2}{m+1},$$

also auch, da m beliebig,

$$\overline{\lim}\, \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \leqq 1.$$

Da die γ_n monoton wachsen und also notwendig

$$\underline{\lim}\, \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \geqq 1$$

ist, so folgt aus beiden die zweite der Behauptungen (21).

Hilfssatz 4. *Ist wieder*

$$f(x) = e^{\gamma \frac{x}{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

so strebt

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} \to 1.$$

Beweis. Aus $(1-x)^2 f'(x) = \gamma f(x)$ folgt, wenn

$$\frac{n c_n}{\gamma} = \gamma_n$$

gesetzt wird, $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = 1$, und für $n \geqq 1$

$$\gamma_{n+1} + \gamma_{n-1} = \left(2 + \frac{\gamma}{n}\right) \gamma_n.$$

Daher ist nach Hilfssatz 3

$$\lim \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \lim \frac{c_{n+1}}{c_n} = 1,$$

w. z. b. w.

Hilfssatz 5. *Ist $Q(x)$ irgendein Polynom, ist $\gamma > 0$ und wir*

$$e^{\gamma \frac{x}{1-x} + Q(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

gesetzt, so ist

$$\log C_n \simeq 2\sqrt{\gamma n}.$$

Beweis. Es gilt allgemein der auf ganz elementarem Wege zu beweisende Satz: Ist $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $r > 0$, ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = \beta \quad \text{und} \quad |\beta| < r,$$

so wird

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0}{b_n} = F(\beta).$$ [8])

In unserem Falle setze man $F(x) = e^{Q(x)}$ und $b_n = c_n$, letztere in derselben Bedeutung wie im Hilfssatz 2 und 4. Dann wird $r = \infty$ und nach dem vorigen Hilfssatze $\beta = 1$. Also ist

$$\lim \frac{C_n}{c_n} = F(1) = e^{Q(1)}$$

und demnach

$$\log C_n \simeq \log c_n \simeq 2\sqrt{\gamma n}.$$

Beweis des Satzes 1. Wir greifen nun auf (6) zurück. Die hier auftretenden Funktionen $S(x)$ und $P(x)$ erfüllen offenbar die Voraussetzungen der Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ des Hilfssatzes 2. Eine passende Majorante bzw. Minorante zu $S(x)$ liefert uns die Beziehung (7) oder

$$s_n \simeq \frac{\pi^2}{6}\binom{n+1}{2}.$$

Wir setzen $\frac{\pi^2}{6} = \alpha$, wählen ein ε in $0 < \varepsilon < \alpha$ und bestimmen ein m so, daß für $n > m$ stets

$$(\alpha - \varepsilon)\binom{n+1}{2} < s_n < (\alpha + \varepsilon)\binom{n+1}{2}$$

ist. Nunmehr wählen wir

$$t_n = \begin{cases} s_n & \text{für } 1 \leqq n \leqq m, \\ (\alpha+\varepsilon)\binom{n+1}{2} & \text{für } n > m, \end{cases} \tag{22}$$

so daß die t_n monoton wachsen und stets $\geqq 0$ sowie $\geqq s_n$ bleiben. Setzen wir also

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x^{n-1}$$

und

$$\exp \int_0^x (1-x)\,T(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n,$$

[8]) Vgl. die von I. Schur im Archiv der Mathematik und Physik 27 (1918), S. 162, gestellte Aufgabe und den Beweis bei O. Szász, *Ein Grenzwertsatz über Potenzreihen*, Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, Jahrgang XXI (1922), S. 25–29.

so ist nach Hilfssatz 1 für alle n

$$p_n \leqq q_n. \tag{23}$$

Wählen wir dagegen

$$t_n = \begin{cases} 0 & \text{für } 1 \leqq n \leqq m, \\ (\alpha - \varepsilon)\binom{n+1}{2} & \text{für } n > m, \end{cases} \tag{24}$$

so wird stets

$$p_n \geqq q_n. \tag{25}$$

Über die q_n gibt uns aber der Hilfssatz 5 Auskunft, denn es ist den beiden Fällen

$$T(x) = (\alpha \pm \varepsilon)\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n+1}{2}x^{n-1} + Q_1(x) = \frac{\alpha \pm \varepsilon}{(1-x)^3} + Q_1(x),$$

wenn mit $Q_1(x)$ ebenso wie nachher mit $Q_2(x)$ je ein geeignetes Polyno bezeichnet wird. Daher ist

$$\int_0^x (1-x)\,T(x)\,dx = (\alpha \pm \varepsilon)\frac{x}{1-x} + Q_2(x)$$

und also

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n = e^{(\alpha \pm \varepsilon)\frac{x}{1-x} + Q_2(x)}.$$

Nach Hilfssatz 5 strebt nun

$$\frac{\log q_n}{\sqrt{n}} \to 2\sqrt{\alpha \pm \varepsilon},$$

je nachdem die t_n gemäß (22) oder (24) festgelegt sind. Da im erst Falle (23) gilt, so folgt, daß

$$\overline{\lim}\,\frac{\log p_n}{\sqrt{n}} \leqq 2\sqrt{\alpha + \varepsilon}$$

ist; und da im zweiten Falle (25) gilt, so ist

$$\underline{\lim}\,\frac{\log p_n}{\sqrt{n}} \geqq 2\sqrt{\alpha - \varepsilon}.$$

Da nun $\varepsilon > 0$ beliebig war, so ist notwendig

$$\lim \frac{\log p_n}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{\alpha}, \tag{26}$$

was die Behauptung (3) beweist.

§ 2.

Man wird bemerkt haben, daß die Beziehung (26) des vorigen Paragraphen aus (6) lediglich auf Grund der Voraussetzung erschlossen worden ist, daß die Entwicklungskoeffizienten p_n und s_n von $P(x)$ und $S(x)$ den Bedingungen

$$1 \leqq p_n \leqq p_{n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

bzw.

$$s_n \cong \alpha \binom{n+1}{2} \cong \frac{\alpha}{2} n^2$$

genügen. Man kann also den folgenden allgemeineren Satz aussprechen:

Satz 2. *Hat* $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ *positive monoton wachsende Koeffizienten, ist*

$$P(x) = \exp \int_0^x (1-x) S(x)\, dx$$

und gilt hierin für die Koeffizienten von $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n x^{n-1}$ *eine Abschätzung der Form*

27) $$s_n \cong \frac{\alpha}{2} n^2 \qquad (\alpha > 0),$$

so ist

$$\log p_n \cong 2 \sqrt{\alpha n}.$$

Auf Grund dieses Satzes wird man in ganz ähnlicher Weise, wie soeben die Entwicklungskoeffizienten p_n des Produktes (1), auch die Koeffizienten $\bar{p}_n$ des Produktes (2) und ähnlich auch die Entwicklungskoeffizienten aller derjenigen Produkte abschätzen können, die aus (1) oder (2) entstehen, wenn man dort nur solche Faktoren $(1 \pm x^\lambda)$ auftreten läßt, bei denen λ einer bestimmten Zahlklasse — z. B. der Klasse der ungeraden Zahlen oder der zu einer festen Zahl m teilerfremden Zahlen — angehört. Doch wird das bisherige Verfahren nur dann zum Ziele führen, falls die Entwicklungskoeffizienten des betreffenden Produktes *monoton* wachsen und falls das bei der Entwicklung der logarithmischen Ableitung des Produktes auftretende Teilerproblem (vgl. (5) und (7)) auf eine Abschätzung der Form (27) führt. Im einzelnen lassen sich so die folgenden Sätze beweisen.

Satz 3. *Wird*

2) $$\bar{P}(x) = \prod_{\lambda=1}^{\infty} (1 + x^\lambda) = \prod_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x)^{2\lambda-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}_n x^n$$

gesetzt, so daß $\bar{p}_n$ *für* $n > 0$ *die Anzahl der verschiedenen Zerlegungen*

von n in ungleiche positive Summanden oder — was nach (2) dasse ist — in gleiche oder ungleiche ungerade Summanden angibt, so ist

$$\log \bar{p}_n \simeq 2\sqrt{\frac{\pi^2}{12}n}. \tag{3a}$$

Beweis. Jetzt ist

$$\frac{x\bar{P}'(x)}{\bar{P}(x)} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(2\lambda-1)x^{2\lambda-1}}{1-x^{2\lambda-1}} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \bar{\sigma}_\lambda x^\lambda = (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} \bar{s}_n x^n,$$

wenn $\bar{\sigma}_\lambda$ die Summe der ungeraden Teiler von λ bedeutet und

$$\bar{s}_n = \bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 + \ldots + \bar{\sigma}_n$$

gesetzt wird. Mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{s}_n x^{n-1} = \bar{S}(x)$$

ist also

$$\bar{P}(x) = \exp \int_0^x (1-x)\bar{S}(x)\,dx. \tag{6a}$$

Für $\bar{s}_n$ gilt nun entsprechend (7) die Formel

$$\bar{s}_n \simeq \frac{\pi^2}{24} n^2. \tag{7a}$$

Zu ihrem Beweise hat man nur zu beachten, daß, wenn σ_ϱ für ni ganzzahliges ϱ gleich 0 gesetzt wird,

$$\sigma_n = \bar{\sigma}_n + 2\sigma_{\frac{n}{2}}$$

ist. Dies liefert aber

$$s_n = \bar{s}_n + 2s_{\left[\frac{n}{2}\right]},$$

woraus (7a) unmittelbar auf Grund von (7) folgt.

Nunmehr ist Satz 3 lediglich eine Anwendung von Satz 2; denn $\bar{p}_n$ wachsen, wie sich aus ihrer an zweiter Stelle genannten Bedeut ergibt, monoton, und die $\bar{s}_n$ gestatten eine Abschätzung der Form (mit $\alpha = \frac{\pi^2}{12}$. Also gilt (3a).

Einer späteren Anwendung zuliebe fügen wir noch den folgen Satz an, obwohl die in ihm auftretenden Koeffizienten keine so einf arithmetische Bedeutung haben:

Satz 4. *Wird für ein ganzzahliges $r > 0$*

$$(\bar{P}(x))^r = \prod_{\lambda=1}^{\infty}(1+x^\lambda)^r = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(r)} x^n$$

gesetzt, so ist

$$\log p_n^{(r)} \simeq 2\sqrt{\frac{\pi^2}{12} rn}.$$

Der Beweis ist unmittelbar, denn die $\bar{\sigma}_\lambda$ und $\bar{s}_n$ und folglich auch das α im vorigen Beweise multiplizieren sich nur alle mit dem Faktor r. — Aus diesem Satze ergibt sich noch sofort der folgende

Zusatz. *Bei festen ganzzahligen $r > 0$, $r' > r$ und festem ganzzahligem $q \geqq 0$ strebt*

$$\frac{p_{n-q}^{(r)}}{p_n^{(r')}} \to 0.$$

In der Tat strebt ja dann

$$\sqrt{r(n-q)} - \sqrt{r'n} \to -\infty.$$

Eine fast ebenso unmittelbare Anwendung von Satz 2 ist die folgende Erweiterung von Satz 3:

Satz 5. *Wird für eine gegebene ganze Zahl $m \geqq 2$*

$$P(x) = \prod_{(\lambda, m)=1} \frac{1}{1-x^\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}_n x^n \tag{1b}$$

gesetzt, so daß $\bar{p}_n$ für $n > 0$ die Anzahl der verschiedenen Zerlegungen von n in gleiche oder ungleiche zu der gegebenen Zahl m teilerfremde Summanden angibt, so ist

$$\log \bar{p}_n \cong 2\sqrt{\frac{\varphi(m)}{m}\frac{\pi^2}{6}n}. \tag{3b}$$

Da auch hier die $\bar{p}_n$ monoton wachsen, so haben wir nur zu zeigen, daß jetzt — entsprechend (7) —

$$\bar{s}_n \cong \frac{1}{2}\frac{\varphi(m)}{m}\frac{\pi^2}{6}n^2 \tag{7b}$$

ist. Hierbei ist wieder $\bar{s}_n = \bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 + \ldots + \bar{\sigma}_n$, und $\bar{\sigma}_n$ bedeutet die Summe der zu m teilerfremden Teiler von n.

Enthält nun m zunächst nur eine Primzahl π_1, so ist, genau wie beim Beweise von (7a) für $\pi_1 = 2$,

$$\sigma_n = \bar{\sigma}_n + \pi_1 \sigma_{\frac{n}{\pi_1}},$$

also

$$s_n = \bar{s}_n + \pi_1 s_{\left[\frac{n}{\pi_1}\right]}.$$

Wegen (7) ist also

$$\bar{s}_n \cong \left(1 - \frac{1}{\pi_1}\right)\frac{\pi^2}{12}n^2.$$

Ein zweiter Schritt dieser Art lehrt, daß, wenn m zwei verschiedene Primzahlen π_1 und π_2 enthält,

$$\bar{s}_n \cong \left(1 - \frac{1}{\pi_1}\right)\left(1 - \frac{1}{\pi_2}\right)\frac{\pi^2}{12}n^2$$

ist. Bei beliebigem m ergibt sich so die behauptete Formel (7b). — Dan ist auch (3b) auf Grund des Satzes 2 vollständig bewiesen.

Will man auch die Anzahl der Zerlegungen von n in *ungleiche* u gerade Summanden abschätzen, so muß man etwas anders vorgehen. Do gilt auch hier der zu Satz 3 bzw. 5 ganz analoge

Satz 6. *Wird*

$$p(x) = \prod_{\lambda=1}^{\infty}(1+x^{2\lambda-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n' x^n \tag{1c}$$

gesetzt, so daß p_n' für $n \geqq 1$ die Anzahl der Zerlegungen von n ungleiche ungerade Summanden angibt, so ist

$$\log p_n' \simeq 2\sqrt{\frac{\pi^2}{24}n}. \tag{3c}$$

Beweis. Eine unmittelbare Anwendung von Satz 2 ist hier nic möglich, weil die p_n' nicht durchweg monoton wachsen; denn es $p_0' = p_1' = 1$, $p_2' = 0$. Dagegen hat natürlich

$$\frac{1}{1-x}p(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(p_0' + p_1' + \ldots + p_n')x^n$$

monoton wachsende Koeffizienten. Machen wir bei *dieser* Funktion d gleichen Ansatz wie bisher, so erhalten wir

$$\frac{x}{1-x} + \frac{xp'(x)}{p(x)} = \frac{x}{1-x} + \sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{(2\lambda-1)x^{2\lambda-1}}{1+x^{2\lambda-1}}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty}(1+\sigma_\nu')x^\nu = (1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(n+s_n')x^n$$

und somit

$$\frac{1}{1-x}p(x) = \exp\int_0^x (1-x)s(x)\,dx. \tag{6c}$$

Hierbei bedeutet σ_ν' die Summe der *ungeraden* Teiler d von ν, ein je mit positivem oder negativem Zeichen versehen, je nachdem der komp mentäre Teiler ungerade oder gerade ist, also

$$\sigma_\nu' = \sum_{d|\nu}(-1)^{\frac{\nu}{d}-1}d \qquad (d \text{ ungerad}$$

und es ist dann

$$s_n' = \sigma_1' + \sigma_2' + \ldots + \sigma_n'$$

und

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(n+s_n')x^{n-1}$$

esetzt. Sammelt man, um zu einer Abschätzung der Form (7) bzw. (27) u gelangen, in

$$s_n' = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{d \mid \nu} (-1)^{\frac{\nu}{d}-1} d \qquad (d \text{ ungerade})$$

lie Glieder d mit gleichem Komplementärteiler $\frac{\nu}{d} = k$, so findet man

$$s_n' = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum u,$$

venn in der letzten Summe u die ungeraden Zahlen $\leqq \frac{n}{k}$ durchläuft. Daher ist

$$s_n' = \sum_{n=1}^{n} (-1)^{k-1} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{n}{k}+1\right)\right]^2 \cong \frac{n^2}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi^2}{24}\,n^2.$$

Dann ist aber auch entsprechend (7)

(7 c) $$n + s_n' \cong \frac{1}{2}\,\frac{\pi^2}{24}\,n^2.$$

Auf Grund dieser Abschätzung liefert uns Satz 2 nun wenigstens

$$\log (p_0' + p_1' + \ldots + p_n') \cong 2\sqrt{\frac{\pi^2}{24}\,n}.$$

etzt überzeugt man sich aber leicht, daß die p_n' wenigstens für $n \geqq 3$ monoton wachsen. Aus jeder Zerlegung Z von $n \geqq 3$ in ungleiche ungerade Summanden erhält man nämlich sofort eine solche für $n+1$. Denn wenn Z den Summanden 1 nicht enthält, so braucht man nur eine 1 als Summanden hinzuzufügen; enthält aber Z eine 1, so streiche man diese und erhöhe den größten Summanden in Z um 2. Da sich auf diese Weise aus je zwei verschiedenen Zerlegungen von n auch zwei verschiedene Zerlegungen von $n+1$ ergeben, so muß p_n' mit n monoton wachsen. Daher ist für $n \geqq 3$

$$p_n' \geqq \frac{p_0' + p_1' + \ldots + p_n'}{n};$$

nd da selbstverständlich

$$p_n' \leqq p_0' + p_1' + \ldots + p_n'$$

st, so ist, wie behauptet,

$$\log p_n' \cong \log (p_0' + p_1' + \ldots + p_n') \cong 2\sqrt{\frac{\pi^2}{24}\,n}.$$

Wir schließen mit der Behandlung der Entwicklungskoeffizienten der klassischen Modulfunktion

$$J(\tau) = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27\,g_3^2}.$$

Ihre Entwicklung nach Potenzen von

$$x = h^2 = e^{2\pi i \tau} \qquad \left(\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1},\ \Re\left(\frac{\tau}{i}\right) >\right.$$

lautet (vgl. z. B. C. Jordan, Cours d'Analyse 2 (1894), S. 427):

$$J(\tau) = \frac{1}{12^3 \cdot x}\left[\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-x^{2\nu-1})^8 + 256\,x\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+x^{\nu})^{16}\right]^3$$

oder

$$12^3 \cdot x \cdot J(\tau) = \prod_{\nu=1}^{\infty}(1-x^{2\nu-1})^{24} + 3\cdot 256\cdot x + 3\cdot 256^2\cdot x^2\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+x^{\nu})^{24}$$
$$+ 256^3\cdot x^3\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+x^{\nu})^{48}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^2\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + x^3\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + 3\cdot 256\cdot x$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

mit

$$C_n = a_n + b_{n-2} + c_{n-3} \quad \text{für } n \geqq 3.$$

Da nun offenbar $|a_n| \leqq b_n$, so liefert uns Satz 4 und sein Zusatz, d

$$C_n \cong c_{n-3},$$

also

$$\log C_n \cong 2\sqrt{\frac{\pi^2}{12}\cdot 48(n-3)}$$

oder

$$\log C_n \cong 4\pi\sqrt{n}$$

ist.

Berlin und Königsberg, April 1925.

(Eingegangen am 8. April 1925.)

On the representation of functions by trigonometrical integrals.

By

Norbert Wiener, of Cambridge, Massachusetts.

Table of Contents.

page

Introduction 575

§ 1. The representation of a nearly bounded function by a trigonometrical integral 584

§ 2. The mean of the square of a nearly bounded function . 590

§ 3. Well-behaved functions 593

§ 4. The operator $\overset{T}{\underset{-T}{Q}}\{\varphi(\alpha)\}$ 598

§ 5. Pseudoperiodic functions 605

Appendix 615

Introduction.

At present the mathematical literature contains a number of distinct classes of functions capable of being represented by a trigonometric sum or integral. For example, if $f(x)$ is of period 2π, and is summable and of summable square over a period, we may write

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\,d\xi$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\cos nx\int_0^{2\pi} f(\xi)\cos n\xi\,d\xi + \sin nx\int_0^{2\pi} f(\xi)\sin n\xi\,d\xi\right\}.$$

Here the sign $\sim$ is used to convey the fact that the series converges in the mean to $f(x)$ over the interval $(0, 2\pi)$ — that is, that

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^{2\pi}\left\{f(x) - \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\,d\xi\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{m}\left\{\cos nx\int_0^{2\pi} f(\xi)\cos n\xi\,d\xi + \sin nx\int_0^{2\pi} f(\xi)\sin n\xi\,d\xi\right\}\right]\right\}^2 dx = 0.$$

Again, if $f(x)$ is summable and of summable square over the entire inte
val $(-\infty, \infty)$, it may be proved[1]) that

$$\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{A} f(\xi)\cos\lambda\xi\, d\xi \quad \text{and} \quad \frac{1}{\pi}\int_{-A}^{A} f(\xi)\sin\lambda\xi\, d\xi$$

converge in the mean over the interval $(-\infty, \infty)$ to functions of λ whi
may be termed, respectively,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\cos\lambda\xi\, d\xi \quad \text{and} \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\sin\lambda\xi\, d\xi,$$

as A becomes infinite. It may then be demonstrated that

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{A}\cos\lambda x\, d\lambda\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\cos\lambda\xi\, d\xi + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{A}\sin\lambda x\, d\lambda\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\sin\lambda\xi\, d\xi$$

converges in the mean to $f(x)$ over the interval $(-\infty, \infty)$ as A becom
infinite.

We have thus determined two classes of functions, the one consisti
of periodic functions, and the other of functions summable and of su
mable square over an infinite range, both of which, in very differe
senses, consist of functions with a representation of the form

$$\int_{0}^{\infty}[\cos\alpha x\, d\gamma(\alpha) + \sin\alpha x\, d\delta(\alpha)]$$

over the whole infinite X-axis. To these we must adjoin the almo
periodic functions of H. Bohr[2]). It will be useful to recall his definitio
and some of his cardinal theorems. His definitions read as follows: *
$f(x)$ *be a function of the real variable* x, *which is well-defined and co
tinuous over the entire interval* $(-\infty < x < \infty)$. [For the sake of co
venience in formulating his theorems, Bohr allows $f(x)$ to be of t
form $u(x) + iv(x)$, where u and v are separately continuous real fu
tions of the real variable x.] *If for a given* $\varepsilon > 0$, *the real numb*
$\tau = \tau(f, \varepsilon)$ *satisfies the equation*

$$|f(x+\tau) - f(x)| \leqq \varepsilon$$

---

[1]) This theorem may be deduced without difficulty from one proved
M. Plancherel, *Contribution à l'étude da la représentation d'une fonction arbitr
par des intégrales définies, Rendiconti di Palermo* **30** (1910), p. 330.

[2]) H. Bohr, *Zur Theorie der fast periodischen Funktionen. I. Eine Verallgemei
rung der Fourierreihen. Acta Mathematica* **45** (1924), pp. 29–127. Cf. W. L. Ha
On trigonometric series, Annals of Mathematics (2), **18** (1916), pp. 99–104.

or all x, τ is termed a translation number (Verschiebungszahl) of the unction $f(x)$, pertaining to the given number ε. A function $f(x)$ con-inuous for every real x is termed almost periodic if to every positive ε here corresponds a length $l = l(\varepsilon) > 0$ such that every interval $\alpha < x < \beta$ f length $\beta - \alpha = l$ contains at least one translation number $\tau = \tau(f, \varepsilon)$.

Bohr's fundamental theorem reads as follows: *To every almost eriodic function $f(x)$ there belongs a uniquely determined sequence of eal numbers $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ and a series of the form $\sum a_n e^{i\lambda_n x}$, the Fourier series" of the function $f(x)$. This Fourier series determines he function $f(x)$ uniquely, and converges in the mean to $f(x)$, in the ense that the expression*

$$S_N = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n e^{i\lambda_n x} \right|^2 dx$$

onverges to 0 as N becomes infinite.

We shall devote this paper to the study of the representation of a unction $f(x)$ by an integral of the form

$$\int_0^\infty [\cos \alpha x \, d\gamma(\alpha) + \sin \alpha x \, d\delta(\alpha)]$$

nder hypotheses of a very general nature. We shall obtain a generali-ation of periodicity, which does not involve continuity, as that of Bohr oes. We shall obtain a theorem from which Bohr's fundamental heorem follows as an immediate corollary. In the proof of this theorem, nlike Bohr, we shall not employ arithmetical methods. To express more recisely what we intend to do, we shall have need of a few definitions. 'hese are given below.

Definition I. *We shall say that $f(x)$ is nearly bounded if*

$$\int_\xi^{\xi+h} [f(x)]^2 dx$$

s bounded for all ξ, h remaining fixed. It is manifest that the parti-ular value of h chosen is of no moment in this definition, for if a func-on is nearly bounded for one value of h, it is nearly bounded for any ther value of h.

Definition II. *We shall say that $\varphi(x, y)$ converges almost in the iean to $f(x)$ over the interval (a, b) if*

$$\lim_{\xi \to \infty} \int_\xi^{\xi+h} dy \int_a^b [\varphi(x, y) - f(x)]^2 dx = 0.$$

We shall represent this fact by the equation

$$\underset{y\to\infty}{\text{l. a. m.}}\,\varphi(x,y)=f(x).$$

If $\varphi(x,y)$ converges in the mean to $f(x)$ as $y\to\infty$, we shall write

$$\underset{y\to\infty}{\text{l. i. m.}}\,\varphi(x,y)=f(x).$$

Definition III. *We shall write*

$$\overset{b}{\underset{a}{Q}}\{f(x)\}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_a^b[f(x+h)-f(x-h)]^2\,dx$$

if this latter limit exists. In any case, we shall write

$$\overset{b}{\underset{a}{\overline{Q}}}\{f(x)\}=\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{1}{2h}\int_a^b[f(x+h)-f(x-h)]^2\,dx.$$

$\underline{Q}$ receives a like definition.

Definition IV. *We shall write*

$$M\{f(x)\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(x)\,dx$$

if this latter limit exists.

Definition V. *If $f(x)$ is nearly bounded and*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{\xi-T}^{\xi+T}f(x)f(x+h)\,dx$$

exists uniformly in ξ and h as T becomes infinite, we shall say that f is well-behaved.

Definition VI. *We shall write*

$$C(f;h)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f\left(x-\frac{h}{2}\right)f\left(x+\frac{h}{2}\right)dx.$$

Definition VII. *We shall understand by*

$$\overset{A}{\underset{0}{I}}\varphi(x)\,d\psi(x)$$

the expression

$$\varphi(A)\psi(A)-\int_0^A\psi(x)\varphi'(x)\,dx.$$

Definition VIII. *If $f(x)$ is a summable function with summable square, we shall call $\tau = \tau(f, \varepsilon)$ a displacement number pertaining to the positive number ε if for all ξ,*

$$\int_{\xi}^{\xi+1} [f(x+\tau) - f(x)]^2 dx \leqq \varepsilon.$$

The summable function $f(x)$ with square summable over any finite range will then be termed pseudoperiodic if to every positive ε there corresponds a length $l = l(\varepsilon) > 0$ such that every interval $\alpha < x < \beta$ of length $\beta - \alpha = l$ contains at least one displacement number $\tau = \tau(f, \varepsilon)$.

The main theorems which we shall prove are the following.

Theorem I. *If $f(x)$ is nearly bounded,*

$$\gamma(\alpha) = \underset{T\to\infty}{\text{l. i. m.}} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} f(\lambda) \frac{\sin \alpha\lambda}{\lambda} d\lambda$$

and

$$\delta(\alpha) = \underset{T\to\infty}{\text{l. i. m.}} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} f(\lambda) \frac{e^{-\lambda^2} - \cos \alpha\lambda}{\lambda} d\lambda$$

exist over any bounded interval of α whatever[3]).

Theorem II. *If we define $\gamma(\alpha)$ and $\delta(\alpha)$ as in Theorem I, we shall have*

$$f(x) = \underset{T\to\infty}{\text{l. a. m.}} \left[\int_{0}^{T} \cos \alpha x \, d\gamma(\alpha) + \int_{0}^{T} \sin \alpha x \, d\delta(\alpha)\right]$$

over any finite range of x whatever.

Theorem III. *If $f(x)$ is nearly bounded, $\gamma(\alpha)$ and $\delta(\alpha)$ being interpreted as above,*

$$\frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} \{[\gamma(\alpha+h) - \gamma(\alpha-h)]^2 + [\delta(\alpha+h) - \delta(\alpha-h)]^2\} d\alpha.$$

exists for every h, and equals

$$\frac{2}{\pi h} \int_{-\infty}^{\infty} [f(\lambda)]^2 \frac{\sin^2 h\lambda}{\lambda^2} d\lambda.$$

It follows that if $M\{[f(x)]^2\}$ exists, so do $\underset{-\infty}{\overset{\infty}{Q}} \{\gamma(\alpha)\}$ and $\underset{-\infty}{\overset{\infty}{Q}} \{\delta(\alpha)\}$, while

$$\underset{-\infty}{\overset{\infty}{Q}} \{\gamma(\alpha)\} + \underset{-\infty}{\overset{\infty}{Q}} \{\delta(\alpha)\} = 2M\{[f(x)]^2\}.$$

---

[3]) Cf. H. Hahn: *Über Fouriersche Reihen und Integrale, Bericht über die Jahresversammlung zu Innsbruck, Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung,* **33** (1925), S. 107.

Theorem IV. *If $f(x)$ is well-behaved, $C(f;h)$ is a continuous even function of h which assumes its maximum value for $h=0$.*

Theorem V. *If $f(x)$ is well-behaved, and*

$$f_k(x)=\frac{1}{\pi k}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\left(\frac{\sin k\frac{x-\xi}{2}}{x-\xi}\right)^2 d\xi,$$

then $M\{[f_k(x)]^2\}$ exists for every positive K, and

$$M\{[f(x)]^2\}=\lim_{k\to\infty} M\{[f_k(x)]^2\}.$$

Moreover,

$$M\{[Af_k(x)+Bf_l(x)]^2\}$$

always exists.

Theorem VI. *If $f(x)$ is well-behaved, if $f_k(x)$ is defined as above and if $\gamma_k(\alpha)$ and $\delta_k(\alpha)$ are defined in terms of $f_k(x)$ in the same way in which $\gamma(\alpha)$ and $\delta(\alpha)$ were defined in terms of $f(x)$, then*

$$\gamma_k(\alpha)=\int_0^{\alpha}\left(1-\frac{\alpha}{k}\right)d\gamma(\alpha) \qquad [k>\alpha\geqq 0]$$

$$\gamma_k(\alpha)=\int_0^{k}\left(1-\frac{\alpha}{k}\right)d\gamma(\alpha) \qquad [\alpha\geqq k]$$

and

$$\delta_k(\alpha)=\int_0^{\alpha}\left(1-\frac{\alpha}{k}\right)d\delta(\alpha)+C \qquad [k>\alpha\geqq 0]$$

$$\delta_k(\alpha)=\int_0^{k}\left(1-\frac{\alpha}{k}\right)d\delta(\alpha)+C \qquad [\alpha\geqq k].$$

Theorem VII. *If*

$$\psi(\alpha)=\int_0^{\alpha} F(\alpha)\,d\varphi(\alpha) \qquad [-\tau-\varepsilon<\alpha<\tau+\varepsilon$$

where $F(\alpha)$ is a bounded summable function satisfying the Lipschitz condition

$$|F(\alpha+h)-F(\alpha)|<M|h|$$

for all α and h, if φ is summable and of summable square, and $\underset{-T}{\overset{T}{Q}}\{\varphi(\alpha)\}$ and $\underset{-T}{\overset{T}{Q}}\{\psi(\alpha)\}$ exist [T finite], then

$$\underset{-T}{\overset{T}{Q}}\{\psi(\alpha)\}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{-T}^{T}\{F(\alpha)[\varphi(\alpha+h)-\varphi(\alpha-h)]\}^2 d\alpha.$$

Theorem VIII. *Let $f(x)$ be a well-behaved function, and let $\gamma_k(\alpha)$ and $\delta_k(\alpha)$ be defined as above. We shall write*

$$R\{f(x);k\} = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\overset{\infty}{\underset{-\infty}{Q}}\left\{\frac{k\gamma_k(\alpha)-(k-\varepsilon)\gamma_{k-\varepsilon}(\alpha)}{\varepsilon}\right\}+\overset{\infty}{\underset{-\infty}{Q}}\left\{\frac{k\delta_k(\alpha)-(k-\varepsilon)\delta_{k-\varepsilon}(\alpha)}{\varepsilon}\right\}\right];$$

$$[k>0]$$

$$R\{f(x);0\}=0.$$

Then $R\{f;\alpha\}$ is an increasing bounded non-negative function of α, such that

$$C(f;h)=\frac{1}{2}\int_0^\infty \cos\alpha h\, d\,R\{f;\alpha\}.$$

Theorem IX. *Let $f(x)$ be a well-behaved function. Then we may write $C(f;h)=F(h)+G(h)$, where $F(h)$ is almost periodic, and*

$$M\{[G(h)]^2\}=0.$$

We shall be able to write

$$F(h)=\int_0^\infty \cos\alpha h\, d\,\Phi(\alpha)$$

and

$$G(h)=\int_0^\infty \cos\alpha h\, d\,\Psi(\alpha),$$

where $\Psi(\alpha)$ is a bounded continuous increasing function such that $\Psi(0)=0$, while $\Phi(\alpha)$ is a bounded increasing function which has zero derivative except at a denumerable set of points. If $f(x)$, besides being well-behaved, is pseudoperiodic, $G(h)$ vanishes, and $C(f;h)$ is almost periodic.

Theorem X. *Let $f_1(x),\ldots,f_n(x)$ be a finite set of pseudoperiodic functions. Then given any positive ε, there is a number L such that in any interval $(a,a+L)$ there is a displacement number τ pertaining to ε and common to all the functions $f_1,\ldots,f_n$.*

Theorem XI. *If every function of the sequence $\{f_n(x)\}$ is pseudoperiodic, and if $f(x)$ is a nearly bounded function such that*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\xi}^{\xi+1}[f_n(x)-f(x)]^2\,dx=0$$

uniformly in ξ, then $f(x)$ is itself pseudoperiodic.

Theorem XII. *If $f(x)$ and $g(x)$ are pseudoperiodic, so are $c_1 f(x)+c_2 g(x)$, $f(x)\cos kx$, and $f(x)\sin kx$.*

Theorem XIII. *If $f(x)$ is pseudoperiodic, it is well-behaved.*

Theorem XIV. *If $f(x)$ is pseudoperiodic, the expression*

$$\frac{1}{T}\int_{\xi}^{\xi+T} f(x)\,dx$$

approaches a definite limit uniformly in ξ as $T \to \infty$.

Theorem XV. *Let $f(x)$ be a pseudoperiodic function. Let $\lambda_1, \ldots, \lambda$ be an arbitrary finite set of distinct positive numbers, and let $a_0, \ldots, a$ $b_1, \ldots, b_N$ be an arbitrary set of real numbers. We then have*

$$M\left\{\left[f(x) - \sum_1^N (a_n \cos \lambda_n x + b_n \sin \lambda_n x) - a_0\right]^2\right\}$$

$$= M\{[f(x)]^2\} - 2\sum_1^N \left\{[M\{f(x)\cos\lambda_n x\}]^2 + [M\{f(x)\sin\lambda_n x\}]^2\right\}$$

$$- [M\{f(x)\}]^2 + 2\sum_1^N \left\{\left[\frac{a_n}{2} - M\{f(x)\cos\lambda_n x\}\right]^2\right\}$$

$$+ \left[\frac{b_n}{2} - M\{f(x)\sin\lambda_n x\}\right]^2 + [a_0 - M\{f(x)\}]^2.$$

Theorem XVI. *If $f(x)$ is a pseudoperiodic function, we have*

$$[M\{f(x)\}]^2 = \frac{1}{2}R\{f; +0\}.$$

Theorem XVII. *If $f(x)$ is a pseudoperiodic function, we have*

$$2\left\{[M\{f(x)\sin\lambda x\}]^2 + [M\{f(x)\cos\lambda x\}]^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}R\{f; \lambda+0\} - \frac{1}{2}R\{f; \lambda-0\}.$$

Theorem XVIII. *If $f(x)$ is a pseudoperiodic function, there only a denumerable or finite set of values $\Lambda_n > 0$ of λ for which eit*

$$M\{f(x)\sin\lambda x\} \neq 0$$

or

$$M\{f(x)\cos\lambda x\} \neq 0.$$

We have

$$M\{[f(x)]^2\} = [M\{f(x)\}]^2 + 2\sum_1^\infty \left\{[M\{f(x)\cos\Lambda_n x\}]^2 + [M\{f(x)\sin\Lambda_n x\}]^2\right.$$

Theorem XIX. *Using the notation of the last theorem, we have*

$$\lim_{N\to\infty} M\left\{\left[f(x) - M\{f(x)\} - 2\sum_1^N M\{f(\xi)\cos\Lambda_n(\xi - x)\}\right]^2\right\} = 0,$$

whenever $f(x)$ is pseudoperiodic.

Theorem XX. *Let $f(x)$ be pseudoperiodic. If a and $b > a$ are any two finite numbers, and if $\Lambda_1', \Lambda_2', \ldots, \Lambda_n', \ldots$ are the complete set of Λ_n's over the interval $a < \lambda < b$, let*

$$\Sigma \left| M\{f(x) \cos \Lambda_n' x\} \right|$$

and

$$\Sigma \left| M\{f(x) \sin \Lambda_n' x\} \right|$$

be finite. Then

$$\left.\begin{aligned} \gamma(\alpha) &= M\{f(x)\} + 2\Sigma M\{f(x) \cos \Lambda_n'' x\}; \\ \delta(\alpha) &= \qquad C + 2\Sigma M\{f(x) \sin \Lambda_n'' x\}; \end{aligned}\right\} \qquad [\alpha > 0]$$

where the set $\{\Lambda_n''\}$ consists of those positive Λ_n's not exceeding α.

Theorem XXI. *If $f(x)$ is pseudoperiodic, and the Λ_n's are distributed in the manner indicated by the hypothesis of Theorem* XX, *then over any interval (a, b) we have*

$$\lim_{\beta \to \infty} \int_{\beta}^{\beta+1} d\alpha \int_a^b \left\{ f(x) - M\{f(\xi)\} - 2\Sigma M\{f(\xi) \cos \Lambda_n''(\xi - x)\} \right\}^2 dx = 0.$$

In particular, if the Λ_n's form a discrete set over any finite range, and are arranged in order of magnitude, we can pick out a sequence of values of N for which

$$\lim_{N \to \infty} \int_a^b \left\{ f(x) - M\{f(\xi)\} - 2\sum_1^N M\{f(\xi) \cos \Lambda_n(\xi - x)\} \right\}^2 dx = 0.$$

Theorem XXII. *Let $\gamma(\alpha)$ and $\delta(\alpha)$ be any two functions of limited total variation over every finite range, assuming only a denumerable set of values, defined for all positive arguments, and vanishing at the origin. Furthermore, let*

$$\sum_0^\infty \left\{ \left[\int_n^{n+1} |d\gamma(\alpha)| \right]^2 + \left[\int_n^{n+1} |d\delta(\alpha)| \right]^2 \right\}$$

converge, where $\int_a^b |d\varphi(\alpha)|$ stands for the total variation of $\varphi(\alpha)$ over the interval (a, b). Then

$$\text{l. i. m.}_{T \to \infty} \left[\int_0^T \cos \alpha x \, d\gamma(\alpha) + \int_0^T \sin \alpha x \, d\delta(\alpha) \right]$$

exists, and is pseudoperiodic.

Theorem XXII is a generalization of the Riesz-Fischer theorem. It is intimately connected with the fact that every periodic function which is summable and of summable square is pseudoperiodic. It is manifest

that not all such periodic functions are almost periodic in the sense Bohr, for Bohr's functions are of necessity continuous. The author the present paper has not yet proved that the condition for pseudoperi dicity in this theorem is necessary as well as sufficient, and indeed do not believe that such is the case. It seems to him, however, to poi definitely in the direction in which we must proceed if we ever are obtain such a necessary and sufficient condition. It also seems to hi that the prospects of obtaining such a condition are much better in t case of pseudoperiodicity than in that of almost-periodicity, where t purely adventitious notion of continuity plays such a prominent role.

The cardinal notion in this paper is that of $\overset{b}{\underset{a}{Q}}\{f(x)\}$, and the ca dinal theorem is Theorem III. This notion and a like theorem have ready been used by the author in the discussion of Fourier series[4]).

Another notion which merits especial mention is that of $C(f; h)$ The expression $C(f; h)/C(f; 0)$ represents the coefficient of correlati of $f(x)$ with the function which is obtained from it by a translation of This notion has already been employed by Mr. G. I. Taylor in a ve important paper on *Diffusion by continuous movements*[5]). It is t opinion of the author of the present paper that this notion, together wi the allied notion of well-behaved function, is destined to have importa applications in fields remote from that of pseudoperiodic functions[6]).

§ 1.

The representation of a nearly bounded function by a trigonometric integral

Let $f(x)$ be a nearly bounded function. Let T be any number larg than 2. Then

$$\int_{-T}^{T} f(\lambda)\frac{\sin\alpha\lambda}{\lambda}d\lambda = \int_{-T}^{-2} f(\lambda)\frac{\sin\alpha\lambda}{\lambda}d\lambda + \int_{-2}^{2} f(\lambda)\frac{\sin\alpha\lambda}{\lambda}d\lambda + \int_{2}^{T} f(\lambda)\frac{\sin\alpha\lambda}{\lambda}d\lambda$$

$$= \int_{-T}^{T} g(\lambda)\sin\alpha\lambda\, d\lambda + \int_{-2}^{2} f(\lambda)\frac{\sin\alpha\lambda}{\lambda}d\lambda,$$

---

[4]) *The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients*, *Journal Mathematics and Physics of the Massachusetts Institute of Technology* **3**, pp. 72–94.

[5]) *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), **20** (1920), pp. 196–212.

[6]) The author has recently received a note from Professor Bohr, to the ef that pseudoperiodicity together with certain allied notions have been treated Stefanoff in a paper soon to appear in the *Annalen* (July 21, 1925).

where $g(x) = 0$ $(-2 < x < 2)$ and $g(x) = f(x)/x$ otherwise. If N is any integer greater than 2, we shall have

$$\int_{-N}^{N} [g(\lambda)]^2 d\lambda = \int_{2}^{3} \frac{[f(\lambda)]^2}{\lambda^2} d\lambda + \int_{3}^{4} \frac{[f(\lambda)]^2}{\lambda^2} d\lambda + \ldots + \int_{N-1}^{N} \frac{[f(\lambda)]^2}{\lambda^2} d\lambda$$
$$+ \int_{-3}^{-2} \frac{[f(\lambda)]^2}{\lambda^2} d\lambda + \ldots + \int_{-N}^{1-N} \frac{[f(\lambda)]^2}{\lambda^2} d\lambda$$
$$\leqq \left[\frac{2}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{2}{(N-1)^2}\right] \max \int_{\xi}^{\xi+1} [f(\lambda)]^2 d\lambda \leqq 2 \max \int_{\xi}^{\xi+1} [f(\lambda)]^2 d\lambda.$$

Hence $\int_{-\infty}^{\infty} [g(\lambda)]^2 d\lambda$ is finite. Now, Plancherel has substantially proved in the paper which we have cited that if $\int_{-\infty}^{\infty} [g(\lambda)]^2 d\lambda$ is finite,

$$\int_{-T}^{T} g(\lambda) \sin \alpha\lambda \, d\lambda$$

converges in the mean over $(-\infty, \infty)$ to a limit which is defined except for a set of values of α of zero measure. Hence

$$\gamma(\alpha) = \text{l. i. m.}_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} \frac{f(\lambda) \sin \alpha\lambda}{\lambda} d\lambda$$

exists, where the l. i. m. is taken over any finite range of α. A similar proof applies in the case of the existence of

$$\delta(\alpha) = \text{l. i. m.}_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} f(\lambda) \frac{e^{-\lambda^2} - \cos \alpha\lambda}{\lambda} d\lambda.$$

We have thus established Theorem I. As to Theorem II. what we wish to prove is that

$$\lim_{\xi \to \infty} \int_{\xi}^{\xi+1} dy \int_{a}^{b} \left[f(x) - \cos yx\,\gamma(y) - \sin yx\,\delta(y)\right.$$
$$\left. + x \int_{0}^{y} \sin \alpha x\,\gamma(\alpha)\,d\alpha - x \int_{0}^{y} \cos \alpha x\,\delta(\alpha)\,d\alpha\right]^2 dx = 0.$$

Now,

$$x) - \cos yx\,\gamma(y) - \sin yx\,\delta(y) + x \int_{0}^{y} \sin \alpha x\,\gamma(\alpha)\,d\alpha - x \int_{0}^{y} \cos \alpha x\,\delta(\alpha)\,d\alpha\Big]^2 dx$$

$$= \int_{-b}^{b} \Big\{ f(x) - \text{l. i. m.}_{T \to \infty} \Big[\cos yx \int_{-T}^{T} f(\lambda) \frac{\sin \lambda y}{\lambda} d\lambda + \sin yx \int_{-T}^{T} f(\lambda) \frac{e^{-\lambda^2} - \cos \lambda y}{\lambda} d\lambda\Big]$$

$$+ \frac{x}{\pi} \int_{0}^{y} \text{l. i. m.}_{T \to \infty} \Big[\sin \alpha x \int_{-T}^{T} f(\lambda) \frac{\sin \lambda\alpha}{\lambda} d\lambda - \cos \alpha x \int_{-T}^{T} f(\lambda) \frac{e^{-\lambda^2} - \cos \lambda\alpha}{\lambda} d\lambda\Big] d\alpha \Big\}^2 dx$$

$$= \int_{-b}^{b} \Big\{ f(x) - \text{l. i. m.}_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{f(\lambda)}{\lambda} [\sin y(\lambda - x) + e^{-\lambda^2} \sin yx]\, d\lambda$$

$$+ \frac{x}{\pi} \int_0^{\infty} \Big[\text{l. i. m.}_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{f(\lambda)}{\lambda} [\cos \alpha(\lambda - x) - e^{-\lambda^2} \cos \alpha x]\, d\lambda \Big]\, d\alpha \Big\}^2 dx$$

$$= \int_{-b}^{b} \Big\{ f(x) - \text{l. i. m.}_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{f(\lambda)}{\lambda} [\sin y(\lambda - x) + e^{-\lambda^2} \sin yx]\, d\lambda$$

$$+ \frac{x}{\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{f(\lambda)}{\lambda} \Big[\frac{\sin y(\lambda - x)}{\lambda - x} - \frac{e^{-\lambda^2} \sin yx}{x} \Big]\, d\lambda \Big\}^2 dx$$

$$= \int_{-b}^{b} \Big\{ f(x) - \text{l. i. m.}_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} f(\lambda) \frac{\sin y(\lambda - x)}{\lambda - x}\, d\lambda \Big\}^2 dx.$$

Hence Theorem II will be established if we can show that whenever $f($ is almost bounded,

$$\lim_{\xi\to\infty} \int_{\xi}^{\xi+1} dy \int_{-b}^{b} \Big\{ f(x) - \text{l. i. m.}_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} f(\lambda) \frac{\sin y(\lambda - x)}{\lambda - x}\, d\lambda \Big\}^2 dx = 0.$$

Now,

$$\int_{\xi}^{\xi+1} dy \int_{-b}^{b} \Big\{ f(x) - \text{l. i. m.}_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} f(\lambda) \frac{\sin y(\lambda - x)}{\lambda - x}\, d\lambda \Big\}^2 dx$$

$$\leqq 2 \int_{\xi}^{\xi+1} dy \int_{-b}^{b} \Big\{ f(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-T_1}^{T_1} f(\lambda) \frac{\sin y(\lambda - x)}{\lambda - x}\, d\lambda \Big\}^2 dx \qquad [T_1 >$$

$$+ 4 \int_{\xi}^{\xi+1} dy \int_{-b}^{b} \Big\{ \text{l. i. m.}_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T_1} f(\lambda) \frac{\sin y(\lambda - x)}{\lambda - x}\, d\lambda \Big\}^2 dx$$

$$+ 4 \int_{\xi}^{\xi+1} dy \int_{-b}^{b} \Big\{ \text{l. i. m.}_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{T_1}^{T} f(\lambda) \frac{\sin y(\lambda - x)}{\lambda - x}\, d\lambda \Big\}^2 dx$$

$$= 2 \int_{\xi}^{\xi+1} dy \int_{-b}^{b} \Big\{ f(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-T_1}^{T_1} f(\lambda) \frac{\sin y(\lambda - x)}{\lambda - x}\, d\lambda \Big\}^2 dx$$

$$+ \frac{4}{\pi^2} \int_{-b}^{b} \Big\{ \lim_{T\to\infty} \int_{\xi}^{\xi+1} dy \Big\{ \int_{-T}^{-T_1} f(\lambda) \frac{\sin y(\lambda - x)}{\lambda - x}\, d\lambda \Big\}^2 \Big\} dx$$

$$+ \frac{4}{\pi^2} \int_{-b}^{b} \Big\{ \lim_{T\to\infty} \int_{\xi}^{\xi+1} dy \Big\{ \int_{T_1}^{T} f(\lambda) \frac{\sin y(\lambda - x)}{\lambda - x}\, d\lambda \Big\}^2 \Big\} dx$$

$$= 2\int_{\xi}^{\xi+1} dy \int_{-b}^{b} \left\{ f(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-T_1}^{T_1} f(\lambda) \frac{\sin y(\lambda - x)}{\lambda - x} d\lambda \right\}^2 dx$$

$$+ \frac{4}{\pi^2} \int_{-b}^{b} dx \left\{ \int_{T_1}^{T} \frac{f(\lambda)}{\lambda - x} d\lambda \int_{T_1}^{T} \frac{f(\mu)}{\mu - x} d\mu \int_{\xi}^{\xi+1} \sin y(\lambda - x) \sin y(\mu - x) dy \right.$$

$$\left. + \int_{-T}^{-T_1} \frac{f(\lambda)}{\lambda - x} d\lambda \int_{-T}^{-T_1} \frac{f(\mu)}{\mu - x} d\mu \int_{\xi}^{\xi+1} \sin y(\lambda - x) \sin y(\mu - x) dy \right\}$$

$$= 2\int_{\xi}^{\xi+1} dy \left\{ \int_{-b}^{b} f(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-T_1}^{T_1} f(\lambda) \frac{\sin y(\lambda - x)}{\lambda - x} d\lambda \right\}^2 dx$$

$$+ \frac{4}{\pi^2} \int_{-b}^{b} dx \left\{ \int_{T_1}^{T} \frac{f(\lambda)}{\lambda - x} d\lambda \int_{T_1}^{T} \frac{f(\mu)}{\mu - x} d\mu \left\{ \frac{\cos\left(\xi + \frac{1}{2}\right)(\lambda - \mu) \sin \frac{\lambda - \mu}{2}}{\lambda - \mu} \right.\right.$$

$$\left. - \frac{\cos\left(\xi + \frac{1}{2}\right)(\lambda + \mu - 2x) \sin \frac{\lambda + \mu - 2x}{2}}{\lambda + \mu - 2x} \right\}$$

$$+ \int_{-T}^{-T_1} \frac{f(\lambda)}{\mu - \lambda} d\lambda \int_{-T}^{-T_1} \frac{f(\mu)}{\mu - x} d\mu \left\{ \frac{\cos\left(\xi + \frac{1}{2}\right)(\lambda - \mu) \sin \frac{\lambda - \mu}{2}}{\lambda - \mu} \right.$$

$$\left.\left. - \frac{\cos\left(\xi + \frac{1}{2}\right)(\lambda + \mu - 2x) \sin \frac{\lambda + \mu - 2x}{2}}{\lambda + \mu - 2x} \right\} \right\}$$

$$\leqq 2\int_{\xi}^{\xi+1} dy \int_{-b}^{b} \left\{ f(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-T_1}^{T_1} f(\lambda) \frac{\sin y(\lambda - x)}{\lambda - x} d\lambda \right\}^2 dx$$

$$+ \frac{8b}{\pi^2} \max_{x \leqq b} \int_{T_1}^{T} \frac{|f(\lambda)|}{\lambda - x} d\lambda \int_{T_1}^{T} \frac{|f(\mu)|}{\mu - x} d\mu \left\{ \frac{1}{1 + |\lambda - \mu|} + \frac{1}{1 + (\lambda + \mu - 2x)} \right\}$$

$$+ \frac{8b}{\pi^2} \max_{x \leqq b} \int_{T_1}^{T} \frac{|f(-\lambda)|}{\mu - x} d\mu \int_{T_1}^{T} \frac{|f(-\mu)|}{\mu - x} d\mu \left\{ \frac{1}{1 + |\lambda - \mu|} + \frac{1}{1 + (\lambda + \mu - 2x)} \right\}$$

$$\leqq 2\int_{\xi}^{\xi+1} dy \int_{-b}^{b} \left\{ f(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-T_1}^{T_1} f(\lambda) \frac{\sin y(\lambda - x)}{\lambda - x} d\lambda \right\}^2 dx$$

$$+ \frac{8b}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{T_1+j}^{T_1+j+1} \frac{|f(\lambda)|}{\lambda - b} d\lambda \int_{T_1+k}^{T_1+k+1} \frac{|f(\mu)|}{\mu - b} \left\{ \frac{1}{1 + |\lambda - \mu|} + \frac{1}{1 + (\lambda + \mu - 2b)} \right\}$$

$$+\frac{8b}{\pi^2}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{T_1+j}^{T_1+j+1}\frac{|f(-\lambda)|}{\lambda-b}\,d\lambda\int_{T_1+k}^{T_1+k+1}\frac{|f(-\mu)|}{\mu-b}\left\{\frac{1}{1+|\lambda-\mu|}+\frac{1}{1+(\lambda+\mu-2}\right.$$

$$\leqq 2\int_{\xi}^{\xi+1}dy\int_{-b}^{b}\left\{f(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-T_1}^{T_1}f(\lambda)\frac{\sin y(\lambda-x)}{\lambda-x}\,d\lambda\right\}^2dx$$

$$+\frac{16b}{\pi^2}\max\int_{\xi}^{\xi+1}[f(x)]^2\,dx\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{T_1+j-b}\cdot\frac{1}{T_1+k-b}\cdot\left\{\frac{1}{1+|j-k|}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1+2T_1+j+k-2b}\right\}$$

$$\leqq 2\int_{\xi}^{\xi+1}dy\int_{-b}^{b}\left\{f(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-T_1}^{T_1}f(\lambda)\frac{\sin y(\lambda-x)}{\lambda-x}\,d\lambda\right\}^2dx$$

$$+\frac{16b}{\pi^2}\max\int_{\xi}^{\xi+1}[f(x)]^2\,dx\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(T_1+j-b)(T_1+k-b)(1+j-k)}+\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{}{T_1}\right.\right.$$

$$\left.+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(T_1+j-b)(T_1+k-b)(1+2T_1+j+k-2b)}\right\}$$

$$\leqq 2\int_{\xi}^{\xi+1}dy\int_{-b}^{b}\left\{f(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-T_1}^{T_1}f(\lambda)\frac{\sin y(\lambda-x)}{\lambda-x}\,d\lambda\right\}^2dx$$

$$+\frac{16b}{\pi^2}\max\int_{\xi}^{\xi+1}[f(x)]^2dx\left\{2\int_{T_1-b}^{\infty}\frac{du}{u-1}\int_{T_1-b}^{v}\frac{dv}{(v-1)(1+u-v)}\right.$$

$$\left.+\int_{T_1-b}^{\infty}\frac{du}{(u-1)^2}+\int_{T_1-b}^{\infty}\frac{du}{u-1}\int_{T_1-b}^{\infty}\frac{dv}{(v-1)(u+v-1)}\right\}$$

$$\leqq 2\int_{\xi}^{\xi+1}dy\int_{-b}^{b}\left\{f(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-T_1}^{T_1}f(\lambda)\frac{\sin y(\lambda-x)}{\lambda-x}\,d\lambda\right\}^2dx$$

$$+\frac{16b}{\pi^2}\max\int_{\xi}^{\xi+1}[f(x)]^2\,dx\left\{4\int_{T_1-b-1}^{\infty}\frac{du}{u(u+1)}\log(u+1)+\frac{1}{T_1-b-1}\int_{T_1-b-1}^{\infty}\frac{du}{u^2}\log\right.$$

for all sufficiently large values of T_1. Since the infinite integrals obtained are convergent, we can choose T_1 so large that

$$\frac{16b}{\pi^2}\max\int_{\xi}^{\xi+1}[f(x)]^2\,dx\left\{4\int_{T_1-b-1}^{\infty}\frac{\log(u+1)\,du}{u(u+1)}+\frac{1}{T_1-b-1}\right.$$

$$\left.+\int_{T_1-b-1}^{\infty}\frac{\log(u+1)\,du}{u^2}\right\}<\varepsilon/2$$

or all values of ξ, f being nearly bounded. The expression

$$\frac{1}{\pi}\int_{-T_1}^{T_1} f(\lambda)\frac{\sin y(\lambda-x)}{\lambda-x}d\lambda$$

everywhere less in absolute value than some expression

$$\frac{A}{B+|\lambda|}$$

nd so is of summable square from $-\infty$ to ∞. Let

$$g(x)=f(x); \qquad [-T_1 \leqq x \leqq T_1]$$
$$g(x)=0. \qquad [|x|>T_1]$$

hen both $g(x)$ and

$$h(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-T_1}^{T_1} f(\lambda)\frac{\sin y(\lambda-x)}{\lambda-x}d\lambda$$

ıay be developed in Fourier integrals convergent in the mean, since ney are both summable and of summable square over the interval $-\infty, \infty)$. We shall have

$$\text{i. m.}\int_0^A h(x)\sin ux\,dx = \text{l. i. m.}\frac{1}{\pi}\int_0^A \sin ux\,dx\int_{-T_1}^{T_1} f(\lambda)\,d\lambda\frac{\sin y(\lambda-x)}{\lambda-x}\,d\lambda$$

$$\text{. m.}\frac{1}{\pi}\int_{-T_1}^{T_1} f(\lambda)\,d\lambda\int_0^A \frac{\sin ux\sin y(\lambda-x)}{\lambda-x}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-T_1}^{T_1} f(\lambda)\,d\lambda\int_0^\infty \frac{\sin ux\sin y(\lambda-x)}{\lambda-x}dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-T_1}^{T_1} f(\lambda)\,d\lambda\int_\lambda^{-\infty} \sin u(\lambda-v)\frac{\sin yv}{v}\,dv$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-T_1}^{T_1} f(\lambda)\,d\lambda\int_{-\infty}^{\lambda} (\sin u\lambda\cos uv-\cos u\lambda\sin uv)\frac{\sin yv}{v}\,dv$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-T_1}^{T_1} f(\lambda)\,d\lambda\left[\frac{\sin u\lambda}{2}\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{\sin(y+u)v+\sin(y+u)v}{v}dv\right.$$

$$\left.-\frac{\cos u\lambda}{2}\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{\cos(y-u)v-\cos(y+u)v}{v}dv\right]$$

$$\begin{cases} =\int_0^\infty g(x)\sin ux\,dx; & [u<y] \\ =\frac{1}{2}\int_0^\infty g(x)\sin ux\,dx; & [u=y] \\ =0. & [u>y[\end{cases}$$

Similarly

$$\text{l. i. m.}_{A\to\infty}\int_0^A h(x)\cos ux\,dx = \int_0^\infty g(x)\cos ux\,dx; \qquad [u<y]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty g(x)\cos ux\,dx; \qquad [u=y]$$

$$= 0. \qquad [u>y]$$

Is thus follows that as y increases indefinitely, the integrals of the squa of the sine and cosine Fourier transforms of $g(x)-h(x)$ tend to ze Since, however, the integral of the square of a function vanishes w those of its Fourier transforms, it follows that

$$\lim_{y\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{g(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-T_1}^{T_1}f(\lambda)\frac{\sin y(\lambda-x)}{\lambda-x}d\lambda\right\}^2 dx = 0.$$

Hence Ξ may be chosen so large that for $\xi \geqq \Xi$,

$$2\int_{\xi}^{\xi+1}dy\int_{-b}^{b}\left\{f(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-T_1}^{T_1}f(\lambda)\frac{\sin y(\lambda-x)}{\lambda-x}d\lambda\right\}^2 dx < \varepsilon/2.$$

We shall then have for $\xi \geqq \Xi$,

$$\int_{\xi}^{\xi+1}dy\int_{-b}^{b}\left\{f(x)-\text{l. i. m.}_{T\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}f(\lambda)\frac{\sin y(\lambda-x)}{\lambda-x}d\lambda\right\}^2 dx < \varepsilon.$$

This completes the proof of Theorem II.

§ 2.

The mean of the square of a nearly bounded function.

Let us now turn to Theorem III. We have

$$\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{[\gamma(\alpha+h)-\gamma(\alpha-h)]^2+[\delta(\alpha+h)-\delta(\alpha-h)]^2\right\}dh$$

$$= \frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left[\frac{2}{\pi}\,\text{l. i. m.}_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}f(\lambda)\frac{\sin\alpha\lambda\cos h\lambda}{\lambda}d\lambda\right]^2\right.$$

$$\left.+\left[\frac{2}{\pi}\,\text{l. i. m.}_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}f(\lambda)\frac{\sin\alpha\lambda\sin h\lambda}{\lambda}d\lambda\right]^2\right\}dh$$

$$= \frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left[\frac{2}{\pi}\,\mathrm{l.i.m.}_{T\to\infty}\int_0^T [f(\lambda)+f(-\lambda)]\frac{\sin\alpha\lambda\cos h\lambda}{\lambda}\,d\lambda\right]^2\right.$$

$$\left.+\left[\frac{2}{\pi}\,\mathrm{l.i.m.}_{T\to\infty}\int_0^T [f(\lambda)-f(-\lambda)]\frac{\sin\alpha\lambda\sin h\lambda}{\lambda}\,d\lambda\right]^2\right\}dh$$

$$= \frac{1}{2h}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^\infty [f(\lambda)+f(-\lambda)]^2\frac{\sin^2\alpha\lambda}{\lambda^2}\,d\lambda+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty [f(\lambda)-f(-\lambda)]^2\frac{\sin^2\alpha\lambda}{\lambda^2}\,d\lambda\right]$$

$$= \frac{2}{\pi h}\int_0^\infty\left\{[f(\lambda)]^2+[f(-\lambda)]^2\right\}\frac{\sin^2\alpha\lambda}{\lambda^2}\,d\lambda = \frac{2}{\pi h}\int_{-\infty}^{\infty}[f(\lambda)]^2\frac{\sin^2\alpha\lambda}{\lambda^2}\,d\lambda.$$

Moreover,

$$\frac{2}{\pi h}\int_{-\infty}^{\infty}[f(\lambda)]^2\frac{\sin^2 h\lambda}{\lambda^2}\,d\lambda = \frac{2}{\pi h}\int_{-\frac{N\pi}{h}}^{\frac{N\pi}{h}}[f(\lambda)]^2\frac{\sin^2 h\lambda}{\lambda^2}\,d\lambda$$

$$+\frac{2}{\pi h}\int_{-\infty}^{-\frac{N\pi}{h}}[f(\lambda)]^2\frac{\sin^2 h\lambda}{\lambda^2}+\frac{2}{\pi h}\int_{\frac{N\pi}{h}}^{\infty}[f(\lambda)]^2\frac{\sin^2 h\lambda}{\lambda^2}\,d\lambda$$

$$= \frac{2}{\pi h}\int_{-\frac{N\pi}{h}}^{\frac{N\pi}{h}}[f(\lambda)]^2\frac{\sin^2 h\lambda}{\lambda^2}\,d\lambda+\frac{4\vartheta}{\pi h}\int_{\frac{N\pi}{h}}^{\infty}\left\{[f(\lambda)]^2+[f(-\lambda)]^2\right\}\frac{d\lambda}{\lambda^2}\qquad[|\vartheta|\leqq 1]$$

$$= \frac{2}{\pi h}\int_{-\frac{N\pi}{h}}^{\frac{N\pi}{h}}[f(\lambda)]^2\frac{\sin^2 h\lambda}{\lambda^2}\,d\lambda+\frac{8\vartheta_1}{\pi h}\,\frac{\max\limits_{\xi}\int_{\xi}^{\xi+1}[f(\lambda)]^2}{\frac{N\pi}{h}-1}\,d\lambda\qquad[|\vartheta_1|\leqq 1]$$

$$= \frac{2}{\pi h}\int_{-\frac{N\pi}{h}}^{\frac{N\pi}{h}}[f(\lambda)]^2\frac{\sin^2 h\lambda}{\lambda^2}\,d\lambda+\frac{8\vartheta_2}{N\pi^2-1}\max_{\xi}\int_{\xi}^{\xi+1}[f(\lambda)]^2\,d\lambda\qquad[|\vartheta_2|\leqq 1]$$

for all sufficiently small values of h. Let it be noted that the second term of this sum vanishes with increasing N, irrespective of what happens to h. Furthermore,

$$\frac{2}{\pi h}\int_{-\frac{N\pi}{h}}^{\frac{N\pi}{h}}[f(\lambda)]^2\frac{\sin^2 h\lambda}{\lambda^2}\,d\lambda$$

$$=\int_0^{\frac{N\pi}{h}}\frac{8}{\pi h\xi^2}[\sin^2 h\xi - h\xi\sin h\xi\cos h\xi]\,d\xi\,\frac{1}{2\xi}\int_{-\xi}^{\xi}[f(\lambda)]^2\,d\lambda$$

$$=\int_0^{N\pi}\frac{8}{\pi u^2}[\sin^2 u - u\sin u\cos u]\,du\,\frac{h}{2u}\int_{-\frac{u}{h}}^{\frac{u}{h}}[f(\lambda)]^2\,d\lambda$$

$$=M\{[f(x)]^2\}\int_0^{N\pi}\frac{8}{\pi u^2}[\sin^2 u - u\sin u\cos u]\,du$$

$$+\int_0^{\varepsilon}\frac{8}{\pi u^2}[\sin^2 u - u\sin u\cos u]\,du\left\{\frac{h}{2u}\int_{-\frac{u}{h}}^{\frac{u}{h}}[f(\lambda)]^2\,d\lambda - M\{f^2\}\right.$$

$$+\int_{\varepsilon}^{N\pi}\frac{8}{\pi u^2}[\sin^2 u - u\sin u\cos u]\,du\left\{\frac{h}{2u}\int_{-\frac{u}{h}}^{\frac{u}{h}}[f(\lambda)]^2\,d\lambda - M\{f^2\}\right.$$

$$=M\{f^2\}\int_0^{N\pi}\frac{8}{\pi u^2}[\sin^2 u - u\sin u\cos u]\,du$$

$$+\frac{2}{\pi h}\int_{-\frac{\varepsilon}{h}}^{\frac{\varepsilon}{h}}[f(\lambda)]^2\frac{\sin^2 h\lambda}{\lambda^2}\,d\lambda + \frac{8\vartheta_3\varepsilon}{\pi}M\{f^2\} \qquad [|\vartheta_3|\leqq$$

$$+\int_{\varepsilon}^{N\pi}\frac{8}{\pi u^2}[\sin^2 u - u\sin u\cos u]\,du\left\{\frac{h}{2u}\int_{-\frac{u}{h}}^{\frac{u}{h}}[f(\lambda)]^2\,d\lambda - M\{f^2\}\right.$$

$$=M\{f^2\}\int_0^{N\pi}\frac{8}{\pi u^2}[\sin^2 u - u\sin u\cos u]\,du$$

$$+\frac{16\vartheta_4\varepsilon}{\pi}\max\int_{\xi}^{\xi+1}[f(\lambda)]^2\,d\lambda$$

$$+\int_{\varepsilon}^{N\pi}\frac{8}{\pi u^2}[\sin^2 u - u\sin u\cos u\,du]\left\{\frac{h}{2u}\int_{-\frac{u}{h}}^{\frac{u}{h}}[f(\lambda)]^2\,d\lambda - M\{f^2\}\right.$$

$$[|\vartheta_4|\leqq$$

for all sufficiently small h, in case $M\{f^2\}$ exists.

It may be demonstrated without difficulty that

$$\int_0^\infty \frac{8}{\pi u^2}[\sin^2 u - u \sin u \cos u]\, du = 2.$$

Let η be any positive quantity. Let N be any positive integer so large that

$$\left| M\{f^2\} \left[\int_0^{N\pi} \frac{8}{\pi u^2}[\sin^2 u - u \sin u \cos u]\, du - 2 \right] \right| < \frac{\eta}{4}$$

and

$$\frac{8}{N\pi^2 - 1} \max \int_0^{\xi+1} [f(\lambda)]^2\, d\lambda < \frac{\eta}{2}.$$

Let ε be a positive number so chosen that

$$\frac{16\,\varepsilon}{\pi} \max \int_{\xi}^{\xi+1} [f(\lambda)]^2\, d\lambda < \frac{\eta}{8}.$$

Finally, let H be chosen so that if $h \leqq H$,

$$\left| \frac{h}{2\varepsilon} \int_{-\frac{\varepsilon}{h}}^{\frac{\varepsilon}{h}} [f(\lambda)]^2\, d\lambda - M\{f^2\} \right| < \frac{\eta}{256\,N}.$$

For this and all smaller values of h, we shall have

$$\left| \frac{2}{\pi h} \int_{-\infty}^{\infty} [f(\lambda)]^2 \frac{\sin^2 h\lambda}{\lambda^2}\, d\lambda - 2\,M\{f^2\} \right| < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{4} + \frac{\eta}{8} + \frac{\eta}{16} < \eta.$$

Since η is arbitrary, this proves that

$$\overset{\infty}{Q}_{-\infty}\{\gamma(\alpha)\} + \overset{\infty}{Q}_{-\infty}\{\delta(\alpha)\} = 2\,M\{f^2\}.$$

§ 3.

Well-behaved functions.

Let us now turn to Theorems IV, V, and VI. To begin with

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f\left(\xi - \frac{h}{2}\right) f\left(\xi + \frac{h}{2}\right) d\xi$$

is a continuous function of h over any finite range if only $f(x)$ is summable and of summable square over every finite range. This may be seen by a consideration of the Fourier development of $f(x)$ over any interval containing $(-T, T)$. It will be seen that

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f\left(\xi - \frac{h}{2}\right) f\left(\xi + \frac{h}{2}\right) d\xi - \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f\left(\xi - \frac{h+\varepsilon}{2}\right) f\left(\xi + \frac{h+\varepsilon}{2}\right) d\xi$$

will be expressed by a series which will be uniformly dominated by convergent series in the squares of the Fourier coefficients of $f(x$ while the individual terms of the series will all tend toward 0 with Hence

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f\left(\xi - \frac{h+\varepsilon}{2}\right) f\left(\xi + \frac{h+\varepsilon}{2}\right) d\xi = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f\left(\xi - \frac{h}{2}\right) f\left(\xi + \frac{h}{2}\right) d\xi$$

which is what we wish to establish.

We also have

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f\left(\xi - \frac{h}{2}\right) f\left(\xi + \frac{h}{2}\right) d\xi \leqq \sqrt{\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left[f\left(\xi - \frac{h}{2}\right)\right]^2 d\xi \, \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left[f\left(\xi + \frac{h}{2}\right)\right]^2 d\xi}.$$

Hence $\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f\left(\xi - \frac{h}{2}\right) f\left(\xi + \frac{h}{2}\right) d\xi$ is bounded, if $f(x)$ is nearly bound

If $f(x)$ is well-behaved, $C(f; h)$ is a uniform limit of

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f\left(\xi - \frac{h}{2}\right) f\left(\xi + \frac{h}{2}\right) d\xi,$$

and being a uniform limit of continuous functions, is continuous. Moreo

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left[f\left(\xi - \frac{h}{2}\right)\right]^2 d\xi = \frac{1}{2T} \int_{-T-\frac{h}{2}}^{T-\frac{h}{2}} [f(\xi)]^2 d\xi$$

$$= \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [f(\xi)]^2 d\xi + \frac{1}{2T} \int_{-T-\frac{h}{2}}^{-T} [f(\xi)]^2 d\xi - \frac{1}{2T} \int_{T-\frac{h}{2}}^{T} [f(\xi)]^2 d\xi$$

$$= \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [f(\xi)]^2 d\xi + \frac{\vartheta}{2} \max \int_{\eta}^{\eta+\frac{h}{2}} [f(\xi)]^2 d\xi \qquad [|\vartheta| \leqq$$

A similar relation will hold for $\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left[f\left(\xi + \frac{h}{2}\right)\right]^2 d\xi$. Hence if $f(x$ well-behaved

$$C(f; 0) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left[f\left(\xi - \frac{h}{2}\right)\right]^2 d\xi = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left[f\left(\xi + \frac{h}{2}\right)\right] d\xi$$

t follows that

$$C(f;h) \leqq C(f;0).$$

An argument of the same type will prove that

$$C(f;-h) = C(f;h).$$

This completes the proof of Theorem IV.

As to Theorem V, we see that

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[f_k(x)]^2\,dx = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left\{\frac{1}{\pi k}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\left[\frac{\sin k\frac{x-\xi}{2}}{x-\xi}\right]^2 d\xi\right.$$

$$= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dx\left\{\frac{1}{2\pi k}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+2u)\frac{\sin^2 ku}{u^2}\,du\right\}\left\{\frac{1}{2\pi k}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+2v)\frac{\sin^2 kv}{v^2}\,dv\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 k^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 ku}{u^2}\,du\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 kv}{v^2}\,dv\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x+2u)f(x+2v)\,dx\right\}.$$

By an argument similar to that which we employed in the case of Theorem IV, it follows that $M\{f_k^2\}$ exists, and that

$$M\{f_k^2\} = \frac{1}{4\pi^2 k^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 ku}{u^2}\,du\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 kv}{v^2}\,dv\,C(f;2u-2v).$$

Hence

$$M\{f^2\} - M\{f_k^2\}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 k^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 ku}{u^2}\,du\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 kv}{v^2}\,dv\,[C(f;0) - C(f;2u-2v)]$$

$$\leqq \frac{1}{\pi k}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 ku}{u^2}\,du\,M\{f^2\}$$

$$- \frac{1}{4\pi^2 k^2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\sin^2 ku}{u^2}\,du\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\sin^2 kv}{v^2}\,dv\,[C(f;0) - C(f;2u-2v)].$$

In account of the continuity of C, the second term in this sum may be made less in absolute value than $\eta/2$ by making ε sufficiently small. The first term can then be made less than $\eta/2$ by taking k sufficiently large. Hence for sufficiently large values of k,

$$|M\{f^2\} - M\{f_k^2\}| < \eta,$$

and

$$\lim_{k\to\infty} M\{f_k^2\} = \{f^2\}.$$

The proof of the existence of

$$M\{[Af_k(x)+Bf_1(x)]^2\}$$

follows essentially similar lines.

We now come to Theorem VI. Let us put

$$\Gamma_k(\alpha)=\int_0^{\alpha}\left(1-\frac{\alpha}{k}\right)d\gamma(\alpha) \qquad [k>\alpha>$$

$$\Gamma_k(\alpha)=\int_0^{k}\left(1-\frac{\alpha}{k}\right)d\gamma(\alpha) \qquad [\alpha\geqq k]$$

and

$$\Delta_k(\alpha)=\int_0^{\alpha}\left(1-\frac{\alpha}{k}\right)d\delta(\alpha) \qquad [k>\alpha>$$

$$\Delta_k(\alpha)=\int_0^{k}\left(1-\frac{\alpha}{k}\right)d\delta(\alpha) \qquad [\alpha\geqq k].$$

We shall then have

$$\underset{T\to\infty}{\text{l. a. m.}}\left[\int_0^T\cos\alpha x\,d\Gamma_k(\alpha)+\int_0^T\sin\alpha x\,d\Delta_k(\alpha)\right]$$

$$=\int_0^k\cos\alpha x\,d\Gamma_k(\alpha)+\int_0^k\sin\alpha x\,d\Delta_k(\alpha)$$

$$=\cos kx\int_0^k\left(1-\frac{\alpha}{k}\right)d\gamma(\alpha)+\sin kx\int_0^k\left(1-\frac{\alpha}{k}\right)d\delta(\alpha)$$

$$+\lambda\int_0^k\sin\alpha x\,d\alpha\int_0^{\alpha}\left(1-\frac{\alpha}{k}\right)d\gamma(\alpha)-x\int_0^k\cos\alpha x\,d\alpha\int_0^{\alpha}\left(1-\frac{\alpha}{k}\right)d\delta$$

$$=\frac{\cos kx\int_0^k\gamma(\alpha)\,d\alpha+\sin kx\int_0^{\alpha}\delta(\alpha)\,d\alpha}{k}$$

$$+x\int_0^k\left\{\sin\alpha x\left[\left(\frac{1-\alpha}{k}\right)\gamma(\alpha)+\frac{1}{k}\int_0^{\alpha}\gamma(\alpha)\,d\alpha\right]\right.$$

$$\left.-\cos\alpha x\left[\left(1-\frac{\alpha}{k}\right)\delta(\alpha)+\frac{1}{k}\int_0^{\alpha}\delta(\alpha)\,d\alpha\right]\right\}d\alpha$$

$$=x\int_0^k\left\{\sin\alpha x\left(1-\frac{\alpha}{k}\right)\gamma(\alpha)-\cos\alpha x\left(1-\frac{\alpha}{k}\right)\delta(\alpha)\right\}d\alpha$$

$$-\frac{1}{k}\int_0^k[(\cos\alpha x\gamma(\alpha)+\sin\alpha x\,\delta(\alpha)]\,d\alpha$$

$$= \int_0^k \left\{ \left[x \sin \alpha x \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right) - \frac{\cos \alpha x}{k} \right] \text{l. i. m.}_{T \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} f(\lambda) \frac{\sin \alpha \lambda}{\lambda} d\lambda \right.$$

$$\left. - \left[x \cos \alpha x \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right) + \frac{\sin \alpha x}{k} \right] \text{l. i. m.}_{T \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} f(\lambda) \frac{e^{-\lambda^2} - \cos \alpha \lambda}{\lambda} d\lambda \right\} d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda)}{\lambda} d\lambda \int_0^k \left\{ \left[x \sin \alpha x \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right) - \frac{\cos \alpha x}{k} \right] \sin \alpha \lambda \right.$$

$$\left. - \left[x \cos \alpha x \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right) + \frac{\sin \alpha x}{k} \right] (e^{-\lambda^2} - \cos \alpha \lambda) \right\} d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda)}{\lambda} d\lambda \int_0^k \left\{ x \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right) \cos \alpha (x - \lambda) + \frac{\sin \alpha (x - \lambda)}{k} \right.$$

$$\left. - e^{-\lambda^2} \left[x \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right) \cos \alpha x + \frac{\sin \alpha x}{k} \right] \right\} d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi k} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \frac{1 - \cos k(x - \lambda)}{(x - \lambda)} d\lambda = f_k(x).$$

Since

$$f_k(x) = \overset{k}{I}_0 \cos \alpha x \, d\Gamma_k(\alpha) + \overset{k}{I}_0 \sin \alpha x \, d\Delta_k(\alpha),$$

e have

$$_k(\beta) = \text{l. i. m.}_{T \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \left[\overset{k}{I}_0 \cos \alpha \lambda \, d\Gamma_k(\alpha) + \overset{k}{I}_0 \sin \alpha \lambda \, d\Delta_k(\alpha) \right] \frac{\sin \beta \lambda}{\lambda} d\lambda$$

$$= \text{l. i. m.}_{T \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\sin \beta \lambda}{\lambda} d\lambda \left[\cos \lambda k \, \Gamma_k(k) + \lambda \int_0^k \Gamma_k(\alpha) \sin \alpha \lambda \, d\alpha \right]$$

$$= \frac{\Gamma_k(k)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \beta \lambda \cos \lambda k}{\lambda} d\lambda + \text{l. i. m.}_{T \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \sin \beta \lambda \, d\lambda \int_0^k \Gamma_k(\alpha) \sin \alpha \lambda \, d\alpha$$

$$\begin{cases} = \dfrac{\Gamma_k(k)}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin (\beta + k)\lambda + \sin (\beta - k)\lambda}{\lambda} d\lambda + \Gamma_k(\beta) & [\beta < k] \\ = \dfrac{\Gamma_k(k)}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin (\beta + k)\lambda + \sin (\beta - k)\lambda}{\lambda} d\lambda + \Gamma_k(\beta)/2 & [\beta = k] \\ = \dfrac{\Gamma_k(k)}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin (\beta + k)\lambda + \sin (\beta - k)\lambda}{\lambda} d\lambda & [\beta > k] \end{cases}$$

$$\begin{cases} = \Gamma_k(\beta) & [\beta < k] \\ = \Gamma_k(k)/2 + \Gamma_k(\beta)/2 & [\beta = k] \\ = \Gamma_k(k) & [\beta > k] \end{cases}$$

$$= \Gamma_k(\beta).$$

By a precisely similar proof, we can show that

$$\Delta_k(\beta) = \delta_k(\beta) + C,$$

thus completing the demonstration of Theorem VI.

§ 4.

The operator $\underset{-T}{\overset{T}{Q}}\{\varphi(\alpha)\}$.

Let us now devote our attention to Theorems VII, VIII, and IX.

$$\psi(\alpha) = \int_0^\alpha F(\alpha)\, d\varphi(\alpha)$$

we shall have

$$\underset{-T}{\overset{T}{Q}}\{\psi(\alpha)\} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{-T}^{T}\left[\int_0^{\alpha+h} F(\alpha)\,d\varphi(\alpha) - \int_0^{\alpha-h} F(\alpha)\,d\varphi(\alpha)\right]^2 d\alpha$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{-T}^{T}\left\{F(\alpha+h)\varphi(\alpha+h) - F(\alpha-h)\varphi(\alpha-h) - \int_{\alpha-h}^{\alpha+h} F'(\beta)\varphi(\beta)\,d\beta\right\}^2 d$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{-T}^{T}\left\{F(\alpha+h)[\varphi(\alpha+h) - \varphi(\alpha-h)] + \varphi(\alpha-h)[F(\alpha+h) - F(\right.$$

$$\left. - \int_{\alpha-h}^{\alpha+h} F'(\beta)\varphi(\beta)\,d\beta\right\}^2 d\alpha$$

in case F satisfies the Lipschitz condition in the hypothesis of Theorem V Hence under this hypothesis,

$$\frac{1}{2h}\int_{-T}^{T}\{\varphi(\alpha-h)[F(\alpha+h) - F(\alpha-h)]\}^2 d\alpha \leqq M^2 h\int_{-T}^{T}[\varphi(\alpha-h)]^2 d$$

and

$$\frac{1}{2h}\int_{-T}^{T}\left[\int_{\alpha-h}^{\alpha+h} F'(\beta)\varphi(\beta)\,d\beta\right]^2 d\alpha \leqq \frac{M^2 h}{2}\int_{-T}^{T}\left[\int_{\alpha-h}^{\alpha+h}\varphi(\beta)\,d\beta\right]^2 d\alpha$$

$$\leqq \frac{M^2}{2}\int_{-T}^{T}\left[\int_{-T-h}^{T+h}[\varphi(\beta)]^2 d\beta \int_{\alpha-h}^{\alpha+h} d\beta\right] d\alpha$$

$$\leqq 2M^2 h\, T\int_{-T-h}^{T+h}[\varphi(\beta)]^2 d\beta.$$

Thus by an elementary use of the Schwarz inequality, it results that under the hypothesis of Theorem VII,

$$\underset{-T}{\overset{T}{Q}}\{\psi(\alpha)\} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{-T}^{T}\{F(\alpha)[\varphi(\alpha+h)-\varphi(\alpha-h)]\}^2 d\alpha.$$

Let us apply this in particular to the case where

$$F(\alpha)=1 \qquad [0\leqq|\alpha|\leqq k-\varepsilon];$$
$$F(\alpha)=(k-\alpha)/\varepsilon \qquad [k-\varepsilon\leqq|\alpha|\leqq k];$$
$$F(\alpha)=0 \qquad [k\leqq\alpha].$$

We shall then have

$$\underset{-\infty}{\overset{\infty}{Q}}\left\{\frac{k\gamma_k(\alpha)-(k-\varepsilon)\gamma_{k-\varepsilon}(\alpha)}{\varepsilon}\right\}+\underset{-\infty}{\overset{\infty}{Q}}\left\{\frac{k\delta_k(\alpha)-(k-\varepsilon)\delta_{k-\varepsilon}(\alpha)}{\varepsilon}\right\}$$
$$=\underset{-k-0}{\overset{k+0}{Q}}\left\{\int_0^a F(\alpha)\,d\gamma(\alpha)\right\}+\underset{-k-0}{\overset{k+0}{Q}}\left\{\int_0^a F(\alpha)\,d\delta(\alpha)\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{-k-0}^{k+0}\{F(\alpha)\}^2\{[\gamma(\alpha+h)-\gamma(\alpha-h)]^2+[\delta(\alpha+h)-\delta(\alpha-h)]^2\}\,d\alpha.$$

Hence

$$\underset{-k+\varepsilon}{\overset{\overline{k-\varepsilon}}{Q}}\{\gamma(\alpha)\}+\underset{-k+\varepsilon}{\overset{\overline{k-\varepsilon}}{Q}}\{\delta(\alpha)\}\leqq R\{f(x);k\}\leqq\underset{-k-\varepsilon}{\overset{k+\varepsilon}{Q}}\{\gamma(\alpha)\}+\underset{-k-\varepsilon}{\overset{k+\varepsilon}{Q}}\{\delta(\alpha)\}.$$

Since $R\{f(x);k\}$ and

$$\frac{1}{2h}\int_{-k}^{k}\{[\gamma(\alpha+h)-\gamma(\alpha-h)]^2+[\delta(\alpha+h)-\delta(\alpha-h)]^2\}\,d\alpha$$

are both increasing functions of k, we may conclude from this that

$$R\{f(x);k\}=$$
$$\text{l.i.m.}_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{-k}^{k}\{[\gamma(\alpha+h)-\gamma(\alpha-h)]^2+[\delta(\alpha+h)-\delta(\alpha-h)]^2\}\,d\alpha.$$

Furthermore, since

$$\lim_{k\to\infty}\underset{-\infty}{\overset{\infty}{Q}}\{\gamma_k(\alpha)\}=\underset{-\infty}{\overset{\infty}{Q}}\{\gamma(\alpha)\};\qquad \lim_{k\to\infty}\underset{-\infty}{\overset{\infty}{Q}}\{\delta_k(\alpha)\}=\underset{-\infty}{\overset{\infty}{Q}}\{\delta(\alpha)\}$$

we may conclude that

$$\lim_{k\to\infty}R\{f(x);k\}=\underset{-\infty}{\overset{\infty}{Q}}\{\gamma(\alpha)\}+\underset{-\infty}{\overset{\infty}{Q}}\{\delta(\alpha)\}.$$

We have

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \cos\alpha h\, dR\{f;\alpha\} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\cos\alpha h\, dR\{f;\alpha\} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{h}{2}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} R\{f;\alpha\}\sin\alpha h\, d\alpha = \lim_{n\to\infty}\frac{h}{2}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\sin kh$$

$$\Big\{\text{l.i.m.}_{j\to 0}\frac{1}{2j}\int_{-k}^{k}\{[\gamma(\beta+j)-\gamma(\beta-j)]^2+[\delta(\beta+j)-\delta(\beta-j)]^2\}d\beta\Big\}dk =$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{j\to 0}\frac{h}{4j}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\sin kh$$

$$\Big\{\int_{-k}^{k}\{[\gamma(\beta+j)-\gamma(\beta-j)]^2+[\delta(\beta+j)-\delta(\beta-j)]^2\}d\beta\Big\}dk$$

$$= \lim_{n\to\infty}\lim_{j\to 0}\frac{h}{4j}\int_{-(n+\frac{1}{2})\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi}\cos\alpha h$$

$$\{[\gamma(\alpha+j)-\gamma(\alpha-j)]^2+[\delta(\alpha+j)-\delta(\alpha-j)]^2\}d$$

$$= \lim_{n\to\infty}\lim_{j\to 0}\frac{1}{4j}\int_{-(n+\frac{1}{2})\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi}\Big[\cos^2\frac{\alpha h}{2}-\sin^2\frac{\alpha h}{2}\Big]$$

$$\{[\gamma(\alpha+j)-\gamma(\alpha-j)]^2+[\delta(\alpha+j)-\delta(\alpha-j)]^2\}d$$

$$= \lim_{j\to 0}\frac{1}{4j}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\cos^2\frac{\alpha h}{2}-\sin^2\frac{\alpha h}{2}\Big]$$

$$\{\gamma(\alpha+j)-\gamma(\alpha-j)]^2+[\delta(\alpha+j)-\delta(\alpha-j)]^2\}d$$

On the other hand

$$C(f;h) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f\Big(x-\frac{h}{2}\Big)f\Big(x+\frac{h}{2}\Big)dx$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{8T}\int_{-T}^{T}\Big\{\Big[f\Big(x+\frac{h}{2}\Big)+f\Big(x-\frac{h}{2}\Big)\Big]^2-\Big[f\Big(x+\frac{h}{2}\Big)-f\Big(x-\frac{h}{2}\Big)\Big]^2\Big\}d$$

$$= \frac{1}{4}\Big\{M\Big\{\Big[f\Big(x+\frac{h}{2}\Big)+f\Big(x-\frac{h}{2}\Big)\Big]^2\Big\}-M\Big\{\Big[f\Big(x+\frac{h}{2}\Big)-f\Big(x-\frac{h}{2}\Big)\Big]^2\Big\}\Big\}$$

If we take

$$f(x) = \text{l.a.m.}_{T\to\infty}\Big[\int_0^T\cos\alpha x\, d\gamma(\alpha)+\int_0^T\sin\alpha x\, d\delta(\alpha)\Big],$$

e see that

$$\frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right)+f\left(x-\frac{h}{2}\right)}{2} = \underset{T\to\infty}{\text{l. a. m.}} \left| \int_0^T \left[\frac{\cos\alpha\left(x+\frac{h}{2}\right)+\cos\alpha\left(x-\frac{h}{2}\right)}{2}\right] d\gamma(\alpha) \right.$$

$$\left. + \int_0^T \left[\frac{\sin\alpha\left(x+\frac{h}{2}\right)+\sin\alpha\left(x-\frac{h}{2}\right)}{2}\right] d\delta(\alpha) \right|$$

$$= \underset{T\to\infty}{\text{l. a. m.}} \left[\int_0^T \cos\alpha x \cos\frac{\alpha h}{2}\, d\gamma(\alpha) + \int_0^T \sin\alpha x \cos\frac{\alpha h}{2}\, d\delta(\alpha) \right].$$

his leads us to suspect that

$$\overline{\text{l. i. m.}}\ \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T} \frac{f\left(\lambda+\frac{h}{2}\right)+f\left(\lambda-\frac{h}{2}\right)}{2}\,\frac{\sin\alpha\lambda}{\lambda}\,d\lambda = \int_0^{\alpha} \cos\frac{\alpha h}{2}\, d\gamma(\alpha)$$

$$= \cos\frac{\alpha h}{2}\,\gamma(\alpha) + \frac{h}{2}\int_0^{\alpha} \gamma(\beta)\sin\frac{\beta h}{2}\, d\beta$$

$$= \underset{T\to\infty}{\text{l. i. m.}}\ \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T} f(\lambda)\,\frac{\sin\alpha\lambda\cos\frac{\alpha h}{2}}{\lambda}\,d\lambda + \lim_{T\to\infty}\frac{h}{2\pi}\int_0^{\alpha}\sin\frac{\beta h}{2}\,d\beta\int_{-T}^{T} f(\lambda)\frac{\sin\alpha\lambda}{\lambda}\,d\lambda$$

$$= \underset{T\to\infty}{\text{l. i. m.}}\ \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{f(\lambda)}{\lambda}\,d\lambda\left[\sin\alpha\lambda\cos\frac{\alpha h}{2} + \frac{h}{2}\int_0^{\alpha}\sin\frac{\beta h}{2}\sin\beta\lambda\, d\beta\right]$$

$$= \underset{T\to\infty}{\text{l. i. m.}}\ \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{f(\lambda)}{\lambda}\,d\lambda\left\{\sin\alpha\lambda\cos\frac{\alpha h}{2} + \frac{h}{4}\left[\frac{\sin\alpha\left(\lambda-\frac{h}{2}\right)}{\lambda-\frac{h}{2}} - \frac{\sin\alpha\left(\lambda+\frac{h}{2}\right)}{\lambda+\frac{h}{2}}\right]\right\}.$$

is may be put in the form

$$\underset{\infty}{\text{m.}}\ \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{f(\lambda)}{\lambda}\,d\lambda\left\{\sin\alpha\left(\lambda-\frac{h}{2}\right)\left[1+\frac{\frac{h}{2}}{\lambda-\frac{h}{2}}\right] + \sin\alpha\left(\lambda+\frac{h}{2}\right)\left[1-\frac{\frac{h}{2}}{\lambda+\frac{h}{2}}\right]\right\}$$

$$= \underset{T\to\infty}{\text{l. i. m.}}\ \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} f(\lambda)\,d\lambda\left[\frac{\sin\alpha\left(\lambda-\frac{h}{2}\right)}{\lambda-\frac{h}{2}} + \frac{\sin\alpha\left(\lambda+\frac{h}{2}\right)}{\lambda+\frac{h}{2}}\right]$$

$$= \underset{T\to\infty}{\text{l. i. m.}}\ \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left[f\left(\lambda+\frac{h}{2}\right)+f\left(\lambda-\frac{h}{2}\right)\right]\frac{\sin\alpha\lambda}{\lambda}\,d\lambda.$$

This proves our conjecture. Similarly,

$$\text{l. i. m.}_{T\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{f\left(\lambda+\frac{h}{2}\right)+f\left(\lambda-\frac{h}{2}\right)}{2}\,\frac{e^{-\lambda^2}-\cos\alpha\lambda}{\lambda}\,d\lambda=\int_0^{\alpha}\cos\frac{\alpha h}{2}\,d\delta(\alpha)+C;$$

$$\text{l. i. m.}_{T\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{f\left(\lambda+\frac{h}{2}\right)-f\left(\lambda-\frac{h}{2}\right)}{2}\,\frac{\sin\alpha\lambda}{\lambda}\,d\lambda=-\int_0^{\alpha}\sin\frac{\alpha h}{2}\,d\gamma(\alpha);$$

$$\text{l. i. m.}_{T\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{f\left(\lambda+\frac{h}{2}\right)-f\left(\lambda-\frac{h}{2}\right)}{2}\,\frac{e^{-\lambda^2}-\cos\alpha\lambda}{\lambda}\,d\lambda=\int_0^{\alpha}\sin\frac{\alpha h}{2}\,d\delta(\alpha)+C_1.$$

Combining these with Theorem III, we may conclude that

$$C(f;h)=\frac{1}{2}\left\{\underset{-\infty}{\overset{\infty}{Q}}\left\{\int_0^{\alpha}\cos\frac{\alpha h}{2}\,d\gamma(\alpha)\right\}+\underset{-\infty}{\overset{\infty}{Q}}\left\{\int_0^{\alpha}\cos\frac{\alpha h}{2}\,d\delta(\alpha)\right\}\right\}$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\underset{-\infty}{\overset{\infty}{Q}}\left\{\int_0^{\alpha}\sin\frac{\alpha h}{2}\,d\gamma(\alpha)\right\}+\underset{-\infty}{\overset{\infty}{Q}}\left\{\int_0^{\alpha}\sin\frac{\alpha h}{2}\,d\delta(\alpha)\right\}\right\}$$

$$=\lim_{j\to 0}\frac{1}{4j}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left\{\int_0^{\alpha+j}\cos\frac{\alpha h}{2}\,d\gamma(\alpha)-\int_0^{\alpha-j}\cos\frac{\alpha h}{2}\,d\gamma(\alpha)\right\}^2\right.$$

$$\left.+\left\{\int_0^{\alpha+j}\cos\frac{\alpha h}{2}\,d\delta(\alpha)-\int_0^{\alpha-j}\cos\frac{\alpha h}{2}\,d\delta(\alpha)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left\{\int_0^{\alpha+j}\sin\frac{\alpha h}{2}\,d\gamma(\alpha)-\int_0^{\alpha-j}\sin\frac{\alpha h}{2}\,d\gamma(\alpha)\right\}^2-\left\{\int_0^{\alpha+j}\sin\frac{\alpha h}{2}\,d\delta(\alpha)-\int_0^{\alpha-j}\sin\frac{\alpha h}{2}\,d\delta(\right.\right.\right.$$

$$=\lim_{j\to 0}\frac{1}{4j}\left\{\int_{-T}^{T}\left[\cos^2\frac{\alpha h}{2}-\sin^2\frac{\alpha h}{2}\right]\right.$$

$$\{[\gamma(\alpha+j)-\gamma(\alpha-j)]^2+[\delta(\alpha+j)-\delta(\alpha-j)]^2\}$$

$$\left.+\vartheta\left[\int_{-\infty}^{-T}+\int_{T}^{\infty}\right]\{[\gamma(\alpha+j)-\gamma(\alpha-j)]^2+[\delta(\alpha+j)-\delta(\alpha-j)]^2\}d\right.$$

ϑ being less in absolute value than 2. The proof of this is in ev essential respect similar to the proof of Theorem VII. Furthermore, can deduce from the fact that

$$\lim_{k\to\infty}\underset{-\infty}{\overset{\infty}{Q}}\{\gamma_k(\alpha)\}=\underset{-\infty}{\overset{\infty}{Q}}\{\gamma(\alpha)\};\qquad\lim\underset{-\infty}{\overset{\infty}{Q}}\{\delta_k(\alpha)\}=\underset{-\infty}{\overset{\infty}{Q}}\{\delta(\alpha)\},$$

that T can be chosen so large that for all sufficiently small values

$$2\left[\int_{-\infty}^{-T}+\int_{T}^{\infty}\right]\{[\gamma(\alpha+j)-\gamma(\alpha-j)]^2+[\delta(\alpha+j)-\delta(\alpha-j)]^2\}d\alpha<$$

ence

$$(f;h) = \lim_{j\to 0} \frac{1}{4j} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\cos^2 \frac{\alpha h}{2} - \sin^2 \frac{\alpha h}{2}\right] \{[\gamma(\alpha+j) - \gamma(\alpha-j)]^2$$

$$+ [\delta(\alpha+j) - \delta(\alpha-j)]^2\}\, d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \cos \alpha h\, d R\{f;\alpha)\}.$$

We have already verified the boundedness of R. Its increasing haracter is obvious from Theorem VII. Thus Theorem VIII is established. ince R is increasing and bounded, it is continuous except for a denume- able set of finite jumps with finite sum. We may thus put

$$R\{f;\alpha\} = 2\,\Phi(\alpha) + 2\,\Psi(\alpha),$$

in the statement of Theorem IX, where Ψ will be continuous, and Φ ill be constant except at the jumps of R. Let us now consider

$$F(h) = \int_0^{\infty} \cos \alpha h\, d\Phi(\alpha).$$

he integral here may be taken as a Stieltjes integral in the classical nse, so that $F(h)$ reduces to an expression of the type

$$\sum A_j \cos B_j h,$$

here ΣA_j converges, and all the A's are positive. As Bohr has shown, (h) will then be almost periodic.

On the other hand, let us consider

$$G(h) = \int_0^{\infty} \cos \alpha h\, d\Psi(\alpha).$$

may be verified without difficulty that

$$\overset{\infty}{Q}_{-\infty} \{\Psi(\alpha)\} = 0.$$

may also be verified that

$$\text{l.i.m.}_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} G(\lambda) \frac{\sin \alpha\lambda}{\lambda} d\lambda = \Psi(\alpha); \qquad \text{l.i.m.}_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} G(\lambda) \frac{e^{-\lambda^2} - \cos \alpha\lambda}{\lambda} d\lambda = 0.$$

o begin with,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} G(\lambda) \frac{\sin \alpha\lambda}{\lambda} d\lambda = \frac{1}{\pi} \lim_{H\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{\sin \alpha\lambda}{\lambda} d\lambda \int_0^{H} \cos \beta\lambda\, d\Psi(\beta)$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{H\to\infty} \int_0^{H} d\Psi(\beta) \int_{-T}^{T} \frac{\sin \alpha\lambda \cos \beta\lambda}{\lambda} d\lambda$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{H \to \infty} \left[\Psi(H) \int_{-T}^{T} \frac{\sin \alpha\lambda \cos H\lambda}{\lambda} d\lambda + \int_{0}^{H} \Psi(\beta)\, d\beta \int_{-T}^{T} \sin \alpha\lambda \sin \beta\lambda\, d\lambda \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{H \to \infty} \left[\Psi(H) \int_{-T}^{T} \frac{\sin \alpha\lambda \cos H\lambda}{\lambda} d\lambda + \int_{0}^{H} \Psi(\beta) \left[\frac{\sin(\alpha-\beta)T}{\alpha-\beta} - \frac{\sin(\alpha+\beta)T}{\alpha+\beta} \right.\right.$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\Psi(\infty) \lim_{H \to \infty} \int_{-T}^{T} \frac{\sin \alpha\lambda \cos H\lambda}{\lambda} d\lambda + \int_{0}^{\infty} [\Psi(u+\alpha) - \Psi(u-\alpha)] \frac{\sin uT}{u} d \right.$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} [\Psi(u+\alpha) - \Psi(u-\alpha)] \frac{\sin uT}{u} du.$$

Hence

$$\text{l. i. m.}_{T \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} G(\lambda) \frac{\sin \alpha\lambda}{\lambda} d\lambda = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} [\Psi(u+\alpha) - \Psi(u-\alpha)] \frac{\sin uT}{u} du$$

$$= \frac{\Psi(\alpha) - \Psi(-\alpha)}{2} = \Psi(\alpha).$$

The rest of the proof results from the oddness of Ψ.

The thus see that

$$M\{[G(h)]^2\} = 0.$$

Moreover,

$$C(f; h) = F(h) + G(h).$$

Hence if $C(f; h)$ is almost periodic, G is almost periodic and vanis identically, and

$$C(f; h) = F(h) = \sum A_j \cos B_j h.$$

Now, if τ is a displacement number pertaining to ε for $f(x)$, we have

$$\left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f\left(x+\tau-\frac{h}{2}\right) f\left(x+\tau+\frac{h}{2}\right) dx - \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f\left(x-\frac{h}{2}\right) f\left(x+\frac{h}{2}\right) dx \right|$$

$$\leqq \frac{1}{8T} \left\{ \left| \int_{-T}^{T} \left[\left(f\left(x+\tau+\frac{h}{2}\right) + f\left(x+\tau-\frac{h}{2}\right) \right)^2 - \left(f\left(x+\frac{h}{2}\right) + f\left(x-\frac{h}{2}\right) \right)^2 \right] d \right.\right.$$

$$+ \left| \int_{-T}^{T} \left[\left(f\left(x+\tau+\frac{h}{2}\right) - f\left(x+\tau-\frac{h}{2}\right) \right)^2 - \left(f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right) \right)^2 \right] d \right.$$

$$\leqq \frac{1}{8T} \left\{ \sqrt{\int_{-T}^{T} \left[f\left(x+\tau+\frac{h}{2}\right) + f\left(x+\tau-\frac{h}{2}\right) - f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right) \right]^2 dx} \right.$$

$$\sqrt{\int_{-T}^{T} \left[f\left(x+\tau+\frac{h}{2}\right) + f\left(x+\tau-\frac{h}{2}\right) + f\left(x+\frac{h}{2}\right) + f\left(x-\frac{h}{2}\right) \right.}$$

$$+\sqrt{\int_{-T}^{T}\left[f\left(x+\tau+\frac{h}{2}\right)-f\left(x+\tau-\frac{h}{2}\right)-f\left(x+\frac{h}{2}\right)+f\left(x-\frac{h}{2}\right)\right]^2 dx}$$

$$\sqrt{\int_{-T}^{T}\left[f\left(x+\tau+\frac{h}{2}\right)-f\left(x+\tau-\frac{h}{2}\right)+f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f\left(x-\frac{h}{2}\right)\right]^2 dx}\Bigg\}$$

$$\leqq \frac{4N}{T}\sqrt{\varepsilon \max \int_{\xi}^{\xi+1}[f(x)]^2 dx},$$

where N is the integer next greater than $2T$. Thus τ is a translation number of

$$C_T(f;h)=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f\left(x-\frac{h}{2}\right)f\left(x+\frac{h}{2}\right)dx$$

pertaining to

$$\frac{4N}{T}\sqrt{\varepsilon \max \int_{\xi}^{\xi+1}[f(x)]^2 dx}.$$

It results that if $f(x)$ is pseudoperiodic, $C_T(f;h)$ is almost periodic. However, if f is well-behaved, we have

$$C(f;h)=\lim_{T\to\infty} C_T(f;h)$$

uniformly. Hence by a theorem of Bohr, $C(f;h)$ is almost periodic, and reduces to $F(h)$. That is, $R\{f;\alpha\}$ is an increasing function of α which is constant except in the neighborhood of its denumerable set of discontinuities.

§ 5.

Pseudoperiodic functions.

Let us now turn to the study of pseudoperiodic functions. Our work here will parallel closely the work of Bohr on almost periodic functions. To begin with, we wish to prove the lemma that if τ is a displacement number of $f(x)$ pertaining to ε, then there is a quantity A depending only on f and ε, such that if $|\sigma-\tau|\leqq A$, then σ is a displacement number of $f(x)$ pertaining to 2ε. As may be seen without difficulty, it is enough to prove that

$$\int_{\xi}^{\xi+1}[f(x+\lambda)-f(x-\lambda)]^2 dx$$

tends to 0 uniformly in ξ as λ tends to 0. Now, express $f(x)$ over the interval (a,b) $[a>\xi+\lambda+1>\xi-\lambda>b]$ by the Fourier series

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}\left[\alpha_n \cos n\left(\frac{a-b}{\pi}\right)x+\beta_n \sin n\left(\frac{a-b}{\pi}\right)x\right].$$

We have

$$\int_{\xi}^{\xi+1} [f(x+\lambda) - f(x-\lambda)]^2 \, dx \leqq \frac{4}{a-b} \sum_{1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \sin^2 n\left(\frac{\alpha-\beta}{\pi}\right)\lambda .$$

Hence $\int_{\xi}^{\xi+1} [f(x+\lambda) - f(x-\lambda)]^2 dx$ tends uniformly to 0 over the int
val (a, b).

I now wish to prove that if η is any positive number, there is a po
tive number ε such that if $0 < \lambda < \varepsilon$, then whatever ξ_1 may be, we ha

$$\int_{\xi_1}^{\xi_1+1} [f(x+\lambda) - f(x-\lambda)]^2 dx < \eta$$

provided $f(x)$ is pseudoperiodic. To begin with, let

$$L = l\left(\frac{\eta^2}{32 \max \int_{\eta}^{\eta+1} [f(x)]^2 dx}\right)$$

in accordance with Definition VIII. There will then be a value of ξ
the interval $(0, L)$ such that

$$\int_{\xi_1}^{\xi_1+1} [f(x+\lambda) - f(x-\lambda)]^2 dx - \int_{\xi}^{\xi+1} [f(x+\lambda) - f(x-\lambda)]^2 dx$$

$$= \int_{\xi}^{\xi+1} \{[f(x+\lambda+\xi_1-\xi) - f(x-\lambda+\xi_1-\xi)]^2 - [f(x+\lambda) - f(x-\lambda)]^2\}$$

$$\leqq 4 \sqrt{\int_{\xi}^{\xi+1} [f(x+\lambda+\xi_1-\xi) - f(x-\lambda+\xi_1-\xi) - f(x+\lambda) + f(x-\lambda)]^2 dx \max \int_{\eta}^{\eta+1} [f}$$

$$\leqq 8 \sqrt{\frac{\eta^2}{32 \max \int_{\eta}^{\eta+1} [f(x)]^2 dx} \max \int_{\eta}^{\eta+1} [f(x)]^2 dx} = \eta/2 .$$

We may then choose ε so small that if $0 < \lambda < \varepsilon$,

$$\int_{\xi}^{\xi+1} [f(x+\lambda) - f(x+\lambda)]^2 dx < \eta/2$$

uniformly over the interval $(0, L)$. We shall thus have

$$\int_{\xi_1}^{\xi_1+1} [f(x+\lambda) - f(x-\lambda)]^2 dx < \eta .$$

We are now in a position to prove Theorem X. Let $l_1(u)$, $l_2(u)$,
be expressions bearing to $f_1, f_2, \ldots$ the same relation which $l(u)$ d
to $f(u)$ in Definition VIII. Let A_n be a quantity such that if τ i

splacement number of $f_n(x)$ pertaining to ε, and $|\sigma - \tau| < A_n$, then σ a displacement number of $f_n(x)$ pertaining to 2ε. Let Λ be any quanty greater than $l_1(\varepsilon), \ldots, l_n(\varepsilon)$, and let B be any positive quantity ss than each $A_k/3$. Consider space of n dimensions divided up into ıbes of side Λ, and also into smaller cubes with the same orientation ıd with side less than B and a proper part of Λ. Let some vertex of cube coincide in the two systems of subdivision. Each large cube will ıen contain at least one small cube consisting entirely of points whose ıordinates are respectively displacement numbers for $f_1, f_2, \ldots$ pertaining ε. It is manifest that if we consider the infinite array of large cubes ossessing as their vertex with least coordinates a point of the form $\Lambda, h\Lambda, \ldots, h\Lambda)$, some two of then will have their small cube in the ıme position. Let the two cubes correspond in the manner indicated to $\Lambda, \ldots, h\Lambda)$ and $(H\Lambda, \ldots, H\Lambda)$ respectively. Then $(H-h)\Lambda$, being ıe difference between two displacement numbers pertaining to 2ε for ıch f_n, is itself a displacement number corresponding to 8ε.

We now come to Theorem XI. Let the number ε be given arbitraly. We choose the number $N = N(\varepsilon)$ so large that the inequality

$$\int_{\xi}^{\xi+1} [f(x) - f_n(x)]^2 dx \leqq \varepsilon/12$$

olds for all ξ and all $n \geqq N$. We then have for every τ the obvious equality,

$$\int_{\xi}^{\xi+1} [f(x+\tau) - f(x)]^2 dx \leqq 3 \int_{\xi}^{\xi+1} [f_n(x+\tau) - f_n(x)]^2 dx + \varepsilon/2 .$$

ence every displacement number of $f_n(x)$ pertaining to $\varepsilon/6$ is manifestly displacement number of $f(n)$ pertaining to ε. From this fact the proof llows at once.

Theorem XII is an immediate corollary of Theorem I. Theorems XIII ıd XIV are proved in essentially the same way, which we shall exemify only in the case of Theorem XIII. That a pseudoperiodic function nearly bounded is obvious. Let L be a number so large that every terval $(a, a+L)$ contains at least one displacement number of $f(x)$ ertaining to ε. We can of course find such a number if f is pseudoeriodic. Let τ be a displacement number of $f(x)$ exceeding L. Then ven any interval $(n\tau, (n+1)\tau)$, it may be divided into two parts $\tau, n\tau + \alpha)$ and $(n\tau + \alpha, (n+1)\tau)$, in such a way that the first of ese may be put into correspondence with the interval $(\tau - \alpha, \tau)$ by a anslation with displacement number σ belonging to ε, while the second

may be put into correspondence with the interval $(0, \tau - \alpha)$ by the placement number $\tau + \sigma$ pertaining to 4ε. Hence

$$\int_{n\tau}^{(n+1)\tau} [f(x)]^2\,dx - \int_0^{\tau} [f(x)]^2\,dx$$

$$= \int_{\tau-\alpha}^{\tau} \{[f(x+\sigma)]^2 - [f(x)]^2\}\,dx + \int_0^{\tau-\alpha} \{[f(x+\sigma+\tau)]^2 - [f(x)]^2\}$$

$$\leqq \sqrt{\int_{\tau-\alpha}^{\tau} [f(x+\sigma) - f(x)]^2\,dx \int_{\tau-\alpha}^{\tau} [f(x+\sigma) + f(x)]^2\,dx}$$

$$+ \sqrt{\int_0^{\tau-\alpha} [f(x+\sigma+\tau) - f(x)]^2\,dx \int_0^{\tau-\alpha} [f(x+\sigma+\tau) + f(x)]^2\,dx}$$

$$\leqq 8T \sqrt{\varepsilon \max \int_{\xi}^{\xi+1} [f(x)]^2\,dx},$$

where T is the integer next larger than τ. Remembering that if a displacement number pertaining to ε for f, it pertains to 4ε $f(x+h) + f(x-h)$, we see that

$$\left| \frac{1}{(n-m)\tau} \int_{m\tau}^{n\tau} [f(x+h) + f(x-h)]^2\,dx - \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} [f(x+h) + f(x-h)]^2 \right.$$

$$\leqq \frac{32T}{\tau} \sqrt{\varepsilon \max \int_{\xi}^{\xi+1} [f(x)]^2\,dx}$$

Therefore

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x+h) + f(x-h)]^2\,dx - \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} [f(x+h) + f(x-h)]^2\,dx \right.$$

$$\leqq \frac{8}{b-a} \max \int_{\xi}^{\xi+1} [f(x)]^2\,dx + \frac{32T}{\tau} \sqrt{\varepsilon \max \int_{\xi}^{\xi+1} [f(x)]^2}$$

Hence for all sufficiently large values of τ and $b - a$, we have

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x+h) + f(x-h)]^2\,dx - \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} [f(x+h) + f(x-h)]^2\,d \right.$$

$$\leqq 100 \sqrt{\varepsilon \max \int_{\xi}^{\xi+1} [f(x)]^2\,dx}.$$

imilarly,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x+h)-f(x-h)]^2\,dx - \frac{1}{\tau}\int_0^\tau [f(x+h)-f(x-h)]^2\,dx \Big|$$

$$\leqq 100\sqrt{\varepsilon \max \int_\xi^{\xi+1} [f(x)]^2\,dx}\,.$$

Hence

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x+h)\,f(x-h)\,dx - \frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(x+h)\,f(x-h)\,dx \Big|$$

$$\leqq 50\sqrt{\varepsilon \max \int_\xi^{\xi+1} [f(x)]^2\,dx}\,.$$

ince ε can be made arbitrarily small by taking τ sufficiently large, we ee that

$$\lim_{\xi\to\infty}\frac{1}{\xi}\int_a^{a+\xi} f(x+h)\,f(x-h)\,dx$$

xists uniformly in h and ξ. Thus f is well-behaved.

Theorem XV is Bohr's Satz IX, with his almost periodic functions placed by pseudoperiodic functions, and all statements made in terms reals rather than of complex numbers. It is essentially a form of ating the Bessel's inequality, and may be proved without difficulty by quaring out and taking the mean as indicated.

Theorem XVI is one of the key theorems of the present paper. We have

$$R\{f;+0\} = \lim_{k\to 0}\frac{1}{2}\int_0^k \left(1-\frac{\alpha}{k}\right)^2 dR\{f;\alpha\}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\int_0^k \left(1-\frac{\alpha}{k}\right) R\{f;\alpha\}\,d\alpha$$

$$= \lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{1}{k}\int_0^k \left(1-\frac{\alpha}{k}\right)\frac{d\alpha}{2h}\int_{-\alpha}^{\alpha}\{[\gamma(u+h)-\gamma(u-h)]^2 + [\delta(u+h)-\delta(u-h)]^2\}\,du$$

$$= \lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_0^k \left(1-\frac{\alpha}{k}\right)^2\{[\gamma(\alpha+h)-\gamma(\alpha-h)]^2 + [\delta(\alpha+h)-\delta(\alpha-h)]^2\}\,d\alpha$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{1}{2}\left[\overset{k}{\underset{-k}{Q}}\{\gamma_k(\alpha)\} + \overset{k}{\underset{-k}{Q}}\{\delta_k(\alpha)\}\right] = \lim_{k\to 0} \frac{1}{2}\left[\overset{\infty}{\underset{-\infty}{Q}}\{\gamma_k(\alpha)\} + \overset{\infty}{\underset{-\infty}{Q}}\{\delta_k(\alpha)\}\right]$$

$$= \lim_{k\to 0} M\{[f_k(x)]^2\} = \lim_{k\to 0} M\left\{\left[\frac{1}{\pi k}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\left(\frac{\sin k\frac{x-\xi}{2}}{x-\xi}\right)^2 d\xi\right]^2\right\}.$$

Since

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{\xi}^{\xi+T} f(x)\,dx = M\{f(x)\}$$

uniformly in ξ, an argument essentially like that used in the demonstrati of Theorem III will show that

$$\lim_{k\to 0} \frac{1}{\pi k}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\left(\frac{\sin k\frac{x-\xi}{2}}{x-\xi}\right)^2 d\xi = M\{f(x)\}$$

uniformly in x. Hence

$$[M\{f(x)\}]^2 = \frac{1}{2}R\{f;+0\}.$$

We now turn to Theorem XVII. The function $F(x) = f(x)\sin$ has belonging to it a $\Gamma_1(\alpha)$ and $\Delta_1(\alpha)$ bearing to it the same relat which $\gamma(\alpha)$ and $\delta(\alpha)$ bear to $f(x)$, and determined by the equations

$$\Gamma_1(\alpha) = \text{l. i. m.}_{T\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T} f(\lambda)\frac{\sin\lambda_1\lambda\sin\alpha\lambda}{\lambda}\,d\lambda = \frac{1}{2}(\delta(\alpha+\lambda_1) - \delta(\alpha-\lambda_1))$$

$$\Delta_1(\alpha) = \text{l. i. m.}_{T\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T} f(\lambda)\sin\lambda_1\lambda\frac{e^{-\lambda^2} - \cos\alpha\lambda}{\lambda}\,d\lambda$$

$$= C - \frac{1}{2}(\gamma(\alpha+\lambda_1) - \gamma(\alpha-\lambda_1)).$$

Similarly, to the function $G(x) = f(x)\cos\lambda_1 x$ will correspond

$$\Gamma_2(\alpha) = \text{l. i. m.}_{T\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T} f(\lambda)\frac{\cos\lambda_1\lambda\sin\alpha\lambda}{\lambda}\,d\lambda = \frac{1}{2}(\gamma(\alpha+\lambda_1) + \gamma(\alpha-\lambda_1)$$

$$\Delta_2(\alpha) = \text{l. i. m.}_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} f(\lambda)\cos\lambda_1\lambda\,\frac{e^{-\lambda^2} - \cos\alpha\lambda}{\lambda}\,d\lambda$$

$$= C_1 + \frac{1}{2}(\delta(\alpha+\lambda_1) + \delta(\alpha-\lambda_1)).$$

We have

$$[M\{f(x)\sin\lambda_1 x\}]^2+[M\{f(x)\cos\lambda_1 x\}]^2$$

$$=\frac{1}{2}R\{F;+0\}+\frac{1}{2}R\{G;+0\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\overset{\infty}{\underset{-\infty}{Q}}\{\Gamma_{1,\varepsilon}(\alpha)\}+\overset{\infty}{\underset{-\infty}{Q}}\{\Delta_{1,\varepsilon}(\alpha)\}+\overset{\infty}{\underset{-\infty}{Q}}\{\Gamma_{2,\varepsilon}(\alpha)\}+\overset{\infty}{\underset{-\infty}{Q}}\Delta_{2,\varepsilon}(\alpha)\}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\{[\Gamma_{1,\varepsilon}(\alpha+h)-\Gamma_{1,\varepsilon}(\alpha-h)]^2$$

$$+[\Delta_{1,\varepsilon}(\alpha+h)-\Delta_{1,\varepsilon}(\alpha-h)]^2+[\Gamma_{2,\varepsilon}(\alpha+h)-\Gamma_{2,\varepsilon}(\alpha-h)]^2$$

$$+[\Delta_{2,\varepsilon}(\alpha+h)-\Delta_{2,\varepsilon}(\alpha-h)]^2\}\,d\alpha$$

$$=\frac{1}{8}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}[\Phi(\alpha)]^2\{[\gamma(\alpha+h+\lambda_1)-\gamma(\alpha-h+\lambda_1)]^2$$

$$+[\gamma(\alpha+h-\lambda_1)-\gamma(\alpha-h-\lambda_1)]^2+[\delta(\alpha+h+\lambda_1)-\delta(\alpha-h+\lambda_1)]^2$$

$$+[\delta(\alpha+h-\lambda_1)-\delta(\alpha-h-\lambda_1)]^2\}\,d\alpha,$$

where

$$\Phi(\alpha)=1-\frac{|\alpha|}{\varepsilon} \qquad [|\alpha|<\varepsilon];$$

$$\Phi(\alpha)=0 \qquad [|\alpha|\geqq\varepsilon].$$

Then by an argument exactly similar to that which we used in the last theorem, we can show that

$$2\{[M\{f(x)\sin\lambda_1 x\}]^2+[M\{f(x)\cos\lambda_1 x\}]^2\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}[\Phi(\alpha)]^2 dR\{f;\lambda_1+\alpha\}=\frac{1}{2}R\{f;\lambda_1+0\}-\frac{1}{2}R\{f;\lambda_1-0\}.$$

This proves Theorem XVII. As to Theorem XVIII, the denumerability of the set of Λ_n's follows at once from Theorem XV. It results from Theorem IX that

$$\lim_{\alpha\to\infty}R\{f;\alpha\}=R\{f;+0\}+\sum_1^{\infty}\{R\{f;\Lambda_n+0\}-R\{f;\Lambda_n-0\}\}.$$

Hence

$$M\{[f(x)]^2\}=\frac{1}{2}\lim_{\alpha\to\infty}R\{f;\alpha\}$$

$$=[M\{f(x)\}]^2+2\sum_1^{\infty}\{[M\{f(x)\sin\Lambda_k x\}]^2+[M\{f(x)\cos\Lambda_k x\}]^2\}.$$

In combining this with Theorem XV, we immediately obtain Theorem XIX.

Theorem XX may be verified by direct computation in the case when all the Λ_n's lie in a finite interval, for then the series

$$M\{f(\xi)\} + 2\sum_1^\infty M\{f(\xi)\cos\Lambda_n(\xi - x)\}$$

is uniformly and absolutely convergent to $f(x)$, and can be integrated termwise over any interval. Hence under any circumstances consistent with the hypothesis of Theorem XX, we have

$$\gamma_k(\alpha) = M\{f_k(x)\} + 2\sum M\{f_k(x)\cos\Lambda_n'' x\}$$

$$= M\{f(x)\} + 2\sum M\left\{\frac{1}{\pi k}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\cos A_n'' x\,\frac{\sin^2\frac{ku}{2}}{u^2}\,du\right\}$$

$$= M\{f(x)\} + 2\sum M\left\{\frac{1}{\pi k}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\cos\Lambda_n''(x-u)\cos\Lambda_n''\,\frac{\sin^2\frac{ku}{2}}{u^2}\,du\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi k}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\sin\Lambda_n''(x-u)\sin\Lambda_n'' u\,\frac{\sin^2\frac{ku}{2}}{u^2}\,du\right\}$$

$$= M\{f(x)\} + 2\sum M\left\{\frac{1}{2\pi k}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\cos\Lambda_n''(x-u)\,\frac{\cos\Lambda_n'' u\,(1-\cos ku)}{u^2}\,d\right.$$

$$+ \frac{2}{\pi k}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\xi}^{\xi+T} dx\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\sin\Lambda_n''(x-u)\sin\Lambda_n'' u\,\frac{\sin^2\frac{ku}{2}}{u^2}\,du$$

$$= M\{f(x)\} + 2\sum M\left\{\frac{1}{2\pi k}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\cos\Lambda_n''(x-u)\right.$$

$$\left.\frac{\cos\Lambda_n'' u - \frac{1}{2}\cos(\Lambda_n''+k)u - \frac{1}{2}\cos(\Lambda_n''-k)u}{u^2}\,du\right\}$$

$$+ \frac{2}{\pi k}\int_{-\infty}^{\infty} M\{f(x)\sin\Lambda_n'' x\}\sin\Lambda_n'' u\,\frac{\sin^2\frac{ku}{2}}{u^2}\,du$$

$$= M\{f(x)\} + \sum\left\{-\frac{2\Lambda_n''}{K}M\{f(x)\cos\Lambda_n'' x\} + \frac{\Lambda_n''+K}{K}M\{f(x)\cos\Lambda_n''\right.$$

$$\begin{cases} + \dfrac{K-\Lambda_n''}{K}M\{f(x)\cos\Lambda_n'' x\} & [K > \Lambda_n''] \\ + \dfrac{\Lambda_n''-K}{K}M\{f(x)\cos\Lambda_n'' x\} & [\Lambda_n'' > K]. \end{cases}$$

Hence

$$\gamma_k(\alpha) = M\{f(x)\} + 2\sum \frac{K - A_n''}{K} M\{f(x)\cos A_n'' x\},$$

where the Σ is taken over all the A_n'''s less than K. It is here assumed that K is so chosen that no A_n'' equals K.

If we then put

$$\gamma_1(\alpha) = M\{f(x)\} + 2\sum' M\{f(x)\cos A_n'' x\},$$

we see that

$$O = \int_0^k \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right) d(\gamma(\alpha) - \gamma_1(\alpha)) = \frac{1}{k}\int_0^k [\gamma(\alpha) - \gamma_1(\alpha)]\, d\alpha$$

for all except a denumerable set of positive values of K. Hence $\gamma(\alpha)$ and $\gamma_1(\alpha)$ can only differ at a set of points of zero measure, and as $\gamma(\alpha)$ is only determined with the exception of an arbitrary set of points of zero measure, we may write $\gamma_1(\alpha) = \gamma(\alpha)$. The argument in the case of $\delta(\alpha)$ is exactly similar.

With these γ's and δ's, the expression

$$\int_0^\alpha \cos\alpha x\, d\gamma(\alpha) + \int_0^\alpha \sin\alpha x\, d\delta(x)$$

reduces to

$$\int_0^\alpha \cos\alpha x\, d\gamma(\alpha) + \int_0^\alpha \sin\alpha x\, d\delta(\alpha)$$
$$= M\{f(\xi)\} - 2\sum M\{f(\xi)\cos A_n''(\xi - x)\}.$$

Since we have already proved in Theorem II that this converges almost in the mean over any finite interval to $f(x)$, Theorem XXI follows at once.

We finally come to Theorem XXII. The existence and pseudoperiodic character of

$$\int_0^T \cos\alpha x\, d\gamma(\alpha) + \int_0^T \sin\alpha x\, d\delta(\alpha)$$

are obvious, since this represents an absolutely and uniformly convergent series of pseudoperiodic functions. We hence have only to prove that

$$\lim_{T\to\infty} \limsup_{\xi} \limsup_{t_2 > t_1 > T} \int_\xi^{\xi+1} \left\{\int_{t_1}^{t_2} \cos\alpha x\, d\gamma(\alpha) + \int_{t_1}^{t_2} \sin\alpha x\, d\delta(\alpha)\right\}^2 dx = 0$$

in order to show that the functions

$$\int_0^{t_1} \cos\alpha x\, d\gamma(\alpha) + \int_0^{t_1} \sin\alpha x\, d\delta(\alpha)$$

answer to the f_n's of Theorem XI, and that

$$\text{l. i. m.}_{T\to\infty}\left[\int_0^T \cos\alpha x\, d\gamma(\alpha)+\int_0^T \sin\alpha x\, d\delta(\alpha)\right],$$

which must exist, by the Riesz-Fischer theorem, is pseudoperiodic.

Let

$$\varphi(x)=\int_{t_1}^{t_2}\cos\alpha x\, d\gamma(\alpha)+\int_{t_1}^{t_2}\sin\alpha x\, d\delta(\alpha).$$

Then the γ and δ corresponding to $\varphi(x+\eta)$ will be

$$\int_{t_1}^{\alpha}\cos\alpha\eta\, d\gamma(\alpha)+\int_{t_1}^{\alpha}\sin\alpha\eta\, d\delta(\alpha)$$

and

$$\int_{t_1}^{\alpha}\cos\alpha\eta\, d\delta(\alpha)-\int_{t_1}^{\alpha}\sin\alpha\eta\, d\gamma(\alpha)$$

for $t_1<\alpha<t_2$. We shall have by Theorem III

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(\lambda+\eta)]^2\frac{\sin^2\lambda}{\lambda^2}d\lambda\leqq\int_{t_1-1}^{t_2+1}\left[\int_{\alpha-1}^{\alpha+1}|d\gamma(\alpha)|+\int_{\alpha-1}^{\alpha+1}|d\delta(\alpha)|\right]^2 d\alpha$$

$$\leqq 4\sum_{N}^{\infty}\left\{\left[\int_n^{n+1}|d\gamma(\alpha)|\right]^2+\left[\int_n^{n+1}|d\delta(\alpha)|\right]^2\right\},$$

where N is the integer next less than $T-1$. Hence under the hypothesis of Theorem XXII, we have

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(\lambda+\eta)]^2\frac{\sin^2\lambda}{\lambda^2}\delta\lambda=0$$

uniformly in η. Moreover,

$$\int_{\xi}^{\xi+1}\left\{\int_{t_1}^{t_2}\cos\alpha x\, d\gamma(\alpha)+\int_{t_1}^{t_2}\sin\alpha x\, d\delta(\alpha)\right\}^2 dx=\int_0^1[\varphi(\lambda-\xi)]^2 d\lambda$$

$$\leqq\csc^2 1\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(\lambda-\xi)]^2\frac{\sin^2\lambda}{\lambda^2}d\lambda.$$

Hence

$$\lim_{T\to\infty}\limsup_{\xi}\limsup_{t_2>t_1>t}\int_{\xi}^{\xi+1}\left\{\int_{t_1}^{t_2}\cos\alpha x\, d\gamma(\alpha)+\int_{t_1}^{t_2}\sin\alpha x\, d\delta(\alpha)\right\}^2 dx=0$$

and Theorem XXII is established.

(Eingegangen am 15. Januar 1925.)

Appendix.

In a letter to the author from Professor R. Courant, the question as been raised whether the methods developed in this paper in any way cilitate the handling of the arithmetical part of Bohr's work. The uthor wishes to take advantage of the opportunity presented by the correction of the proof to append a brief sketch of the manner in which his ethods may be used to derive Bohr's theorem concerning the absolute nvergence of the Fourier series of an almost periodic function in the ase where there are no linear relations among the frequencies. In this roof, as in that recently given by Bohr[7]), the theorem that the formal roduct of the Fourier series of two almost periodic functions is the ourier series of the product is essential. In the present note, this heorem is taken in the more general form in which almost periodic nctions are replaced by pseudoperiodic functions. As Bohr showed his *Acta* paper, this theorem is equivalent to his fundamental theorem, nd his elementary proof still holds when pseudoperiodic functions are being nsidered.

Using polynomial approximations, it is easy to show on the basis of is theorem that if $\Phi(x)$ is an almost periodic real function, the function $\overline{\Phi(x)}$ which is 1 when $\Phi(x)$ is at least half its maximum value and hich is 0 otherwise is pseudoperiodic, and is of the form $\sum_1^\infty A_n e^{i\lambda_n x}$, here each λ_n is linearly dependent on a finite number of the corresponding exponents for $\Phi(x)$. Let $f(x) = \sum_1^\infty B_n e^{i\lambda_n x}$, and let us suppose — what is no essential restriction — that no A_n vanishes. It is easy to e then that $\Re\{B_1 e^{i\lambda_1 x}\}, \ldots, \Re\{B_{k-1} e^{i\lambda_{k-1} x}\}, \Re\{\sum_1^\infty B_n e^{i\lambda_n x}\}$ all ssume positive maxima, and are hence positive at the points where $\overline{\Re\{B_1 e^{i\lambda_1 x}\}}, \ldots, \overline{\Re\{B_{k-1} e^{i\lambda_{k-1} x}\}}, \overline{\Re\{\sum_{n=k}^\infty B_n e^{i\lambda_n x}\}}$ are respectively 1. Consider the function

$$\Big\{\prod_{m=1}^{k-1} \overline{\Re\{B_m e^{i\lambda_m x}\}}\Big\}\, \overline{\Re\Big\{\sum_{n=k}^\infty B_n e^{i\lambda_n x}\Big\}}.$$

his cannot vanish identically, for — with the exception of the exponent 0 — o exponent can be formed more than once by a combination of the

[7]) *Einige Sätze über Fourierreihen fastperiodischer Funktionen, Math. Zeitschr.* (1925), S. 38—45.

exponents of the different factors. Thus some non-zero exponent w appear with a non-zero coefficient. Hence there is some quantity ξ f which at the same time

$$\Re\{B_1 e^{i\Lambda_1\xi}\} \geqq |B_1|/2;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Re\{B_{k-1} e^{i\Lambda_{k-1}\xi}\} \geqq |B_{k-1}|/2;$$
$$\Re\{\sum_{k}^{\infty} B_n e^{i\Lambda_n\xi}\} > 0.$$

Hence

$$2\max\Re\{f(x)\} > \sum_{1}^{k-1}|B_n|.$$

Thus the Fourier series for $f(x)$ converges absolutely.

(Eingegangen am 23. Mai 1925.)

Über die Geometrie von Laguerre[1]).

IV. Von den Nabelpunkten einer Eifläche.

Von

Wilhelm Blaschke in Hamburg.

Wie im Großen die Krümmungslinien einer Fläche aussehen, darüber eiß man, wie es scheint, noch recht wenig. Herr Hamburger hat 1922 nen Vorstoß in dieser Richtung unternommen[2]) und ich möchte hier s, was mir an dieser Untersuchung s Wesentlichste zu sein scheint, auf dre Art auseinandersetzen. Die Vorssetzungen will ich recht eng wählen, n dadurch größere Einfachheit zu erlen. Dabei wird z. B. folgendes Erbnis Hamburgers wieder begründet rden: *Wenn die Nabelpunkte einer fläche alle von demselben Typ* (Fig. 1) *id, wie die auf einem Ellipsoid mit gleichen Achsen, so sind es ihrer genau vier.*

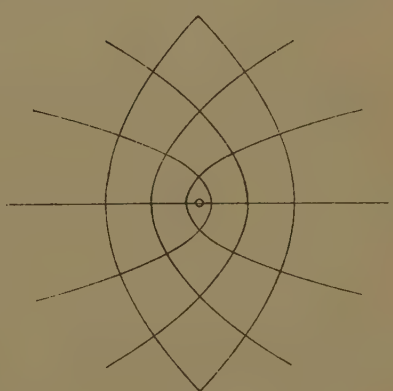


Fig. 1.

Wir werden im folgenden, die hauptchlich von Darboux eingeführten benenkoordinaten Bonnets verwenden. Darunter versteht man folgendes.

[1]) Die vorhergehenden Arbeiten unter diesem Obertitel sind in den Hamburger handlungen **3** (1924) und **4** (1925) erschienen. Die vorliegende Schrift ist von den heren unabhängig. Sie bildet einen Teil des Inhalts eines Vortrages, den der Verser am 27. 4. 25 in Kopenhagen gehalten hat.

[2]) H. Hamburger, Über Kurvennetze mit isolierten Singularitäten auf geschlossenen Flächen, Math. Zeitschrift **19** (1924), S. 50–66.

Wir schreiben die Gleichung einer Ebene in rechtwinkligen Punktkoordinaten x_k etwa in der Form

$$\frac{u+v}{1+uv}x_1 - i\frac{u-v}{1+uv}x_2 + \frac{1-uv}{1+uv}x_3 = \frac{w}{1+uv}, \tag{1}$$

darin sei $i^2 = -1$. Die Koeffizienten der x_k, nämlich

$$\frac{u+v}{1+uv}, \quad -i\frac{u-v}{1+uv}, \quad \frac{1-uv}{1+uv} \tag{2}$$

sind so normiert, daß ihre Quadratsumme Eins ergibt. Durch Angabe von u, v, w ist die Ebene festgelegt und u, v, w sind schon die Koordinaten Bonnets. Soll die Ebene reell sein, so müssen u, v konjugiert komplex und w reell sein. Durch Angabe von u, v ist das sphärische Bild (2) der Ebene festgelegt und für reelle Ebenen ist u die komplexe Zahl auf Riemanns Zahlenkugel (2).

Eine geschlossene konvexe Fläche, die wir uns etwa durchweg regulär und analytisch denken wollen, wir werden kurz sagen eine „*Eifläche*", können wir als Ort ihrer Berührungsebenen dadurch festlegen, daß wir

$$w = w(u, v) \tag{3}$$

angeben. Dann wird w eine analytische Funktion der beiden komplexen Veränderlichen u, v sein, die für alle konjugiert komplexen u, v reell und regulär ausfällt. Was in $u = \infty$ passiert, davon wird später die Rede sein.

Es läßt sich nun leicht zeigen und ist längt bekannt, daß sich die Differentialgleichung der Krümmungslinien auf unserer Fläche in der einfachen Gestalt schreiben läßt

$$w_{uu}\,\delta u^2 - w_{vv}\,\delta v^2 = 0, \tag{4}$$

wenn z. B.

$$w_{uu} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}$$

ist und bei der Ableitung die Veränderlichen u, v als unabhängig behandelt werden. Die Gleichungen

$$w_{uu} = 0, \quad w_{vv} = 0 \tag{5}$$

geben uns die Singularitäten der Krümmungslinien, also die Nabelpunkte. Wir nehmen jetzt u, v und daher auch w_{uu}, w_{vv} wieder konjugiert komplex, deuten u als komplexe Veränderliche in der Zahlenebene von Gauß, denken uns von jeder Stelle u dieser Ebene aus die zugehörige komplexe Zahl w_{uu} als Vektor abgetragen und studieren das Feld dieser Vektoren in der Zahlenebene.

Wir betrachten nun das Integral über das vollständige Differential

$$J = \int d \arg w_{uu} \tag{6}$$

nommen längs einer Kurve, das die Richtungsänderung des Vektors w_{uu} ngs dieser Kurve mißt. Dieses Integral hat einen guten Sinn, sobald e Integrationskurve durch keinen Nabel geht und wird Null, wenn die urve eine Jordankurve ist, in deren Innerem kein Nabel liegt.

Liegt nun aber im Inneren der Jordankurve ein Nabel, welche ometrische Bedeutung hat dann unser Integral? Nach (4) können wir r das vektorielle Bogenelement δu der Krümmungslinien setzen

$$\text{arc}\,\delta u = \frac{1}{2}\,\text{arc}\,\frac{\delta u}{\delta v} = \frac{1}{4}\,\text{arc}\,\frac{w_{vv}}{w_{uu}} = -\frac{1}{2}\,\text{arc}\,w_{uu}$$

d somit mißt

$$\oint d(\text{arc}\,\delta u) = -\frac{1}{2}\oint d\,\text{arc}\,w_{uu}$$

e Richtungsänderung der Krümmungslinien (oder besser ihres Abbilds der Zahlenebene) bei einem Umlauf um den Nabel. Nach (6) ist J n ganzzahliges Vielfaches von 2π, setzen wir also

$$n = \frac{1}{\pi}\oint d(\text{arc}\,\delta u) = -\frac{1}{2\pi}\oint d\,\text{arc}\,w_{uu},$$

wird n eine ganze Zahl, die wir die *Kennziffer* des Nabels nennen llen.

In (9) ist ein allerdings triviales Ergebnis enthalten: Wenn man bei nem Umlauf um einen Nabel eine Krümmungsrichtung δu stetig ver- gt, so kommt man immer wieder zur Ausgangsrichtung in gleichem er entgegengesetztem Sinn zurück. Mit anderen Worten: Die Haupt- ümmungen einer Fläche sind Funktionen auf der Fläche, die in der ngebung eines isolierten Nabels unverzweigt sind. Man erkennt das ch schon dadurch, daß man etwa die größere der Hauptkrümmungen rausgreift.

Die Krümmungslinien in der Umgebung eines Nabelpunktes eines lipsoids mit ungleichen Achsen sehen bekanntlich so aus, wie die kon- kalen Parabeln in der Umgebung des Brennpunktes (Fig. 1). Bei einem nlauf ergibt sich für die Richtungsänderung (9) der Wert π, die Kenn- fer ist also $+1$.

Jetzt wollen wir feststellen, wie sich unser Integral J beim Umlauf n $u = \infty$ benimmt. Wir wenden dazu die Transformation an

$$u^* = \frac{1}{u}, \quad v^* = \frac{1}{v}, \quad w^* = \frac{w}{uv},$$

, wie aus (1) hervorgeht, mit der Spiegelung

$$x_1^* = x_1, \quad x_2^* = -x_2, \quad x^* = -x_3$$

an der x_1-Achse übereinstimmt. Wir können unser Achsenkreuz so leg
daß der Punkt $u = \infty$ oder $u^* = 0$ kein Nabel unserer Eifläche wi
Dann wird also das Integral

$$(12) \qquad \oint d \arc w^*_{u^* u^*} = 0$$

auf einem hinlänglich kleinen Kreis $|u^*| = \varrho$ um diesen Punkt erstrec
Nun folgt aber aus (10) durch Ableitung

$$(13) \qquad w_{uu} = \frac{u^{*3}}{v^*} w^*_{u^* u^*} = \frac{v}{u^3} w^*_{u^* u^*}$$

und daraus ist wegen (12)

$$(14) \qquad \oint d \arc w_{uu} = \oint d \arc \frac{v}{u^3} + \oint d \arc w^*_{u^* u^*} = \oint d \arc \frac{1}{u^4} = -8\pi,$$

wenn das Integral auf einem hinlänglich großen Kreis $|u| = 1 : \varrho$ berech
wird, so groß nämlich, daß außerhalb kein Nabel mehr liegt. Wir hal
also gefunden: die Kennziffer des Punktes $u = \infty$ ist vier.

Nehmen wir nun an, unsere Eifläche habe nur isolierte Nabel, a
wegen ihrer Geschlossenheit nur endlich viele. Dann ist nach bekannt
etwa in der Funktionentheorie üblichen Schlüssen das Integral in (
auch gleich -2π mal der Summe der Kennziffern aller Nabelpunkte
Fläche. Sehen also die Nabelpunkte alle so aus wie Fig. 1, d. h. hal
alle Nabelpunkte die Kennziffer Eins, dann gibt es ihrer genau vier.
ist aber das schon zu Beginn genannte Ergebnis Hamburgers.

Es wäre vielleicht zu rechtfertigen, warum diese kleine Untersuch
unter die Mitteilungen über die Geometrie Laguerres aufgenommen
Bei näherem Zusehen ergibt sich aber in der Tat, daß alles Vorgetrag
invariant gegenüber den Abbildungen Laguerres ist trotz der hier
Kürze halber benutzten bewegungsgeometrischen Ausdrucksweise.
spielsweise genügt von den untersuchten Flächen statt zu fordern, daß
sich um Eiflächen handle, auch schon die ein wenig schwächere Annah
daß sie geschlossen und eindeutig sphärisch abbildbar seien. Diese
derung ist aber gegenüber der Gruppe Laguerres invariant.

Wollte man in der Untersuchung über das Verhalten der Krümmu
linien im Großen weiterkommen, so müßte man wohl zunächst die geg
seitige Lage der Kurven auf einer Fläche studieren, in denen die
variante dritter Differentiationsordnung Null ist, die ich mit Q bezeich
habe[3]). Es sind das die Kurven, in deren Punkten es Kugeln gibt.

[3]) Hamburger Abhandlungen 3 (1924), S. 191. In Bonnets Koordinaten i

$$15) \qquad Q = 2i \left\{ \xi (\lg \eta)^2_v - \eta (\lg \xi)^2_u \right\},$$

$$\xi = \frac{w_{uu}}{(w_{uu} w_{vv})^{\frac{2}{3}}}, \qquad \eta = \frac{w_{vv}}{(w_{uu} w_{vv})^{\frac{2}{3}}}.$$

e Fläche in zwei benachbarten Punkten berühren. Auf einem Ellipsoid len die Kurven in die Schnittlinien mit den Symmetrieebenen.

Bisher scheint noch nicht einmal e naheliegende vielleicht von Cara-éodory stammende Vermutung be-esen oder widerlegt zu sein, daß eine fläche immer mindestens zwei Nabel hat.

Zum Schluß sei das Verhalten der rümmungslinien in der Umgebung eines abels noch durch Wiedergabe der zu-hörigen sphärischen Bilder an einigen ispielen beleuchtet. Fig. 1 gibt den abelpunkt in $u = 0$ der Fläche $w = v + uv^2$ mit $n = +1$. Fig. 2 den abelpunkt von $w = u^3 + v^3$ mit $n = -1$.

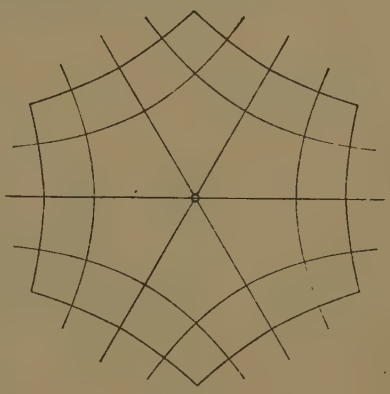


Fig. 2.

ir Fig. 3 ist $w = u^2 v^2$ mit $n = +2$. Ist etwa $w = (u + v)^3$, so wird $= 0$ und die Krümmungslinien $u \pm v =$ konst. verhalten sich um den Nabel $= 0$ völlig regulär[4]).

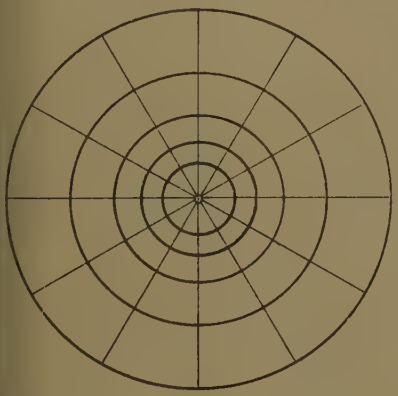


Fig. 3.

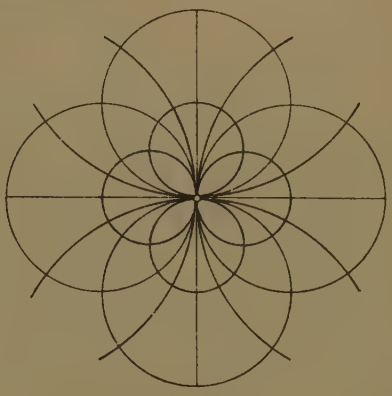


Fig. 4.

Es sei noch erwähnt, daß man das sphärische Bild der Krümmungs-ien in der Umgebung eines Nabels nicht beliebig vorschreiben darf. B. gehört zu dem isothermen Kreisnetz von Fig. 4 mit $n = 4$ kein gulärer Nabel. Könnte man zeigen, daß es überhaupt keinen Nabel mit $= 4$ gibt, so wäre damit die Vermutung Carathéodorys schon bestätigt.

Hamburg, im Mathematischen Seminar zu Ostern 1925.

[4]) Weitere Beispiele und Literaturangaben bei A. Gullstrand, Zur Kenntnis Kreispunkte, Acta matematica 29 (1905), S. 59—100.

(Eingegangen am 6. Mai 1925.)

Über die Geometrie von Laguerre.

V. Kugelsysteme Ribaucours.

Von

Wilhelm Blaschke in Hamburg.

AL MIO VENERATO MAESTRO
LUIGI BIANCHI
PER IL SUO
SETTANTESIMO COMPLEANNO

Es sei $\mathfrak{S}$ ein System von Kugeln $\mathfrak{x}$, das von zwei Parametern hängt und zwei Flächen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ umhüllt. Diese Flächen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ dann punktweise aufeinander bezogen, wenn man Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ auf selben Kugel $\mathfrak{x}$ einander zuordnet. Es ist nun der Fall von Systeme von besonderem Interesse, bei dem sich auf den beiden Mänteln $\mathfrak{F}$ un des Hüllgebildes die Krümmungslinien entsprechen. Man pflegt deran Kugelsysteme $\mathfrak{S}$ nach A. Ribaucour zu benennen, der sie in den siebz Jahren untersucht hat, und diese „Kugelsysteme Ribaucours“ oder, wir kurz sagen wollen, „R-Systeme“ werden beispielsweise in den gr Werken über Differentialgeometrie von L. Bianchi und G. Darboux handelt. Hier sollen einige Eigenschaften der R-Systeme erforscht wer die vielleicht noch nicht bemerkt worden sind und die einen innigen sammenhang mit anderen Fragestellungen aufdecken, die wohl auch und für sich bemerkenswert sind.

So soll gezeigt werden:

Die Aufgabe, die R-Systeme aufzustellen, ist im wesentlichen gl wertig mit der Frage nach allen „abwickelbaren“ Flächen des vierdi sionalen euklidischen Raumes. Dabei soll eine Fläche „abwickelb heißen, wenn sie auf die Ebene längentreu abbildbar ist. Diese abwi baren Flächen des R_4 sind im allgemeinen nicht geradlinig.

Es gilt nämlich folgender Satz:

Rollt im R_4 mit dem Bogenelement $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2$ eine bene mit dem Bogenelement $2\,du\,dv$ auf einer zu ihr längentreuen Fläche, beschreibt jeder Punkt der Ebene bei diesem (holonomen) Bewegungsrgang von zwei Freiheitsgraden eine Fläche $x_k(u, v)$. Deutet man die , x_2, x_3 als Mittelpunktskoordinaten und x_4 als Radius einer Kugel n euklidischen R_3, so entspricht dieser Fläche ein R-System von Kugeln n R_3. Umgekehrt ist — von gewissen Ausnahmen abgesehen — jedes -System auf eine einzige solche Art erzeugbar.

Kehren wir zu der zuvor auseinandergesetzten geometrischen Erklänng der R-Systeme zurück und suchen wir zu den beiden Hüllflächen und $\mathfrak{G}$ die sphärischen Bilder auf der Einheitskugel $\mathfrak{E}$ auf! Die beien Punkte $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{E}$, die den Berührungspunkten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ einer ugel $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ entsprechen, verbinden wir geradlinig. iese Gerade $\mathfrak{X}$ nennen wir *„das sphärische Bild der Kugel $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{S}$“*. llen Kugeln $\mathfrak{x}(u, v)$ von $\mathfrak{S}$ wird in dieser Art ein System von Geraden (u, v) zugeordnet sein. Wir denken uns in diesem Strahlensystem die ayley-Kleinsche nicht-euklidische Maßbestimmung eingeführt, die $\mathfrak{E}$ ir absoluten Fläche hat. Dann gilt folgender Satz:

Ein Kugelsystem $\mathfrak{S}$ ist dann und nur dann ein R-System, wenn us zugehörige Strahlensystem ein Normalensystem ist.

Wenn also die Geraden $\mathfrak{X}(u, v)$ alle nicht-euklidische Normalen einer läche sind, dann entsprechen sich auf den Hüllflächen des Kugelsystems e Krümmungslinien und umgekehrt.

Ich möchte noch hervorheben, daß diese Arbeit von den vorherhenden dieser Abhandlungsreihe[1]) unabhängig ist und auch aus der bisrigen Theorie der R-Systeme nichts als bekannt voraussetzt.

Die Hauptergebnisse dieser Schrift habe ich am 30. April 1925 in openhagen vorgetragen.

§ 1.

Die Ableitungsgleichungen für ein R-System.

Es seien wie in der Einleitung x_1, x_2, x_3 die rechtwinkligen Mittelunktskoordinaten und x_4 der Radius einer (gerichteten) Kugel $\mathfrak{x}$ des R_3. ie „Tangentenentfernung“ zweier gerichteter Kugeln $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^*$, d. h. das

[1]) Unter dem Obertitel „Über die Geometrie von Laguerre“ sind von demselben erfasser erschienen: L. I Grundformeln der Flächentheorie, Hamburger Abhandlungen (1924), S. 176–194; L. II Flächentheorie in Ebenenkoordinaten, ebenda S. 195–212; III Beiträge zur Flächentheorie, ebenda 4 (1925), S. 1–12; L. IV Von den Nabelunkten einer Eifläche, Math. Zeitschr. 24 (1925), S. 617–621.

Quadrat der Entfernung der Berührungspunkte einer gemeinsamen geri
teten Tangentenebene beider Kugeln, berechnet sich dann durch die For

$$(1) \qquad (x_1 - x_1^*)^2 + (x_2 - x_2^*)^2 + (x_3 - x_3^*)^2 - (x_4 - x_4^*)^2.$$

Wir wollen diese Formel vektoriell abkürzen, indem wir „Vierervektore

$$(2) \qquad \mathfrak{v} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

einführen, deren Addition durch

$$(3) \qquad \mathfrak{v} + \mathfrak{v}^* = \{v_1 + v_1^*, v_2 + v_2^*, v_3 + v_3^*, v_4 + v_4^*\}$$

und deren skalares Produkt wir durch

$$(4) \qquad \mathfrak{v}\,\mathfrak{v}^* = v_1 v_1^* + v_2 v_2^* + v_3 v_3^* - v_4 v_4^*$$

erklären. Dann schreibt sich die Tangentenentfernung (1) so

$$(5) \qquad (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^*)^2.$$

Wir werden nun die Kugeln $\mathfrak{x}$ des R_3 gelegentlich auch als Pun
im R_4 mit der Maßbestimmung (5) deuten und nennen diese Zuordnu
„*isotrope Projektion*". Sie ist eineindeutig zwischen den gerichteten Kug
des R_3 und den (reellen, eigentlichen) Punkten des R_4.

Die Gleichung aller Kugeln $\mathfrak{x}$, die eine (gerichtete) Ebene berüh
sieht so aus

$$(6) \qquad (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^*)\,\mathfrak{v} = 0.$$

Dabei ist $\mathfrak{x}^*$ eine besondere dieser Kugeln und $\mathfrak{v}$ ein „isotroper" Vie
vektor, d. h. ein Vektor, der der Bedingung

$$(7) \qquad \mathfrak{v}^2 = 0$$

genügt. Im R_3 ist unhomogen geschrieben

$$(8) \qquad \frac{v_1}{v_4}, \frac{v_2}{v_4}, \frac{v_3}{v_4}$$

das „*sphärische Bild*" der (gerichteten) Ebene auf der Einheitskugel

Es sei nun $\mathfrak{x}(u, v)$ ein (zweiparametriges) Kugelsystem $\mathfrak{S}$. Soll
reelle Hüllflächen von $\mathfrak{S}$ geben, so muß nach (5) die quadratische D
rentialform

$$(9) \qquad \begin{aligned} \delta\mathfrak{x}^2 &= \mathfrak{x}_u^2\,\delta u^2 + 2\,\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v\,\delta u\,\delta v + \mathfrak{x}_v^2\,\delta v^2 \\ &= e\,\delta u^2 + 2f\,\delta u\,\delta v + g\,\delta v^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

sein und wir wollen sie als positiv definit voraussetzen. In (9) bede
z. B. $\mathfrak{x}_u$ den Vektor

$$(10) \qquad \mathfrak{x}_u = \left\{\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u}, \frac{\partial x_4}{\partial u}\right\}$$

d es ist

$$1) \qquad \mathfrak{x}_u^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial x_4}{\partial u}\right)^2.$$

Nennen wir $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ die sphärischen Bilder der beiden Hüllflächen, wird nach (6) und (7)

$$2) \qquad \mathfrak{y}^2 = 0, \quad \mathfrak{z}^2 = 0;$$
$$\mathfrak{y}\mathfrak{x}_u = \mathfrak{y}\mathfrak{x}_v = 0, \quad \mathfrak{z}\mathfrak{x}_u = \mathfrak{z}\mathfrak{x}_v = 0,$$

odurch die Vierervektoren $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ bis auf einen skalaren Faktor fest-legt sind. Setzen wir die beiden sphärischen Bilder $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ als verschieden raus — dadurch werden die parabolischen Kugelsysteme, die aus einer har von Krümmungskugeln einer Fläche bestehen, ausgeschlossen, eine oraussetzung, die auch schon in der Definitheit von (9) steckt —, so nnen wir die Willkür dadurch einengen, daß wir

$$3) \qquad \mathfrak{y}\mathfrak{z} = 1$$

rdern. Dann bleibt nur mehr ein skalarer Faktor willkürlich.

Eine den einen Hüllmantel berührende Kugel kann man in der Form setzen

$$4) \qquad \mathfrak{k} = \mathfrak{x} + \lambda\mathfrak{y}.$$

ne Reihe von Krümmungskugeln dieser Fläche ist dadurch gekenn-ichnet, daß

$$5) \qquad \delta\mathfrak{k} = \delta\mathfrak{x} + \lambda\delta\mathfrak{y} + \delta\lambda\cdot\mathfrak{y} = \mu\mathfrak{y}$$

rd. Dann ist also

$$6) \qquad \delta\mathfrak{x} + \lambda\delta\mathfrak{y} + (\delta\lambda - \mu)\mathfrak{y} = 0.$$

ultipliziert man skalar mit dem Vektor

$$7) \qquad \vartheta\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_u\vartheta u + \mathfrak{x}_v\vartheta v,$$

folgt wegen (12)

$$8) \qquad \delta\mathfrak{x}\vartheta\mathfrak{x} + \lambda\delta\mathfrak{y}\vartheta\mathfrak{x} = 0$$

r die Differentiation δ in der Hauptkrümmungsrichtung. Wählt man in esen Richtungen die Parameterlinien $u, v =$ konst., so wird also

$$9) \qquad \mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_u + \lambda\mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_u = 0, \quad \mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v + \lambda\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u = 0,$$
$$\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v + \mu\mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_v = 0, \quad \mathfrak{x}_v\mathfrak{x}_v + \mu\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_v = 0.$$

äre nun die Form $\delta\mathfrak{x}^2$ mit den Koeffizienten

$$0) \qquad e = \mathfrak{x}_u^2, \quad f = \mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v, \quad g = \mathfrak{x}_v^2$$

oportional zu der Form $\delta\mathfrak{x}\,\delta\mathfrak{y}$ mit den Koeffizienten

$$1) \qquad -E = \mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_u, \quad \mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_v = \mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u, \quad -G = \mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_v,$$

so wäre jede Fortschreitungsrichtung auf unserer Hüllfläche Krümmungsrichtung, d. h. die Hüllfläche hätte einen Nabel. Sonst folgt aus (19)

$$f = \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v = 0, \qquad \mathfrak{x}_u \mathfrak{y}_v = \mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_u = 0. \tag{22}$$

Sollen nun den Krümmungslinien auf dem ersten ($\mathfrak{y}$-Mantel) Krümmungslinien auf dem $\mathfrak{z}$-Mantel entsprechen, so muß auch noch

$$\mathfrak{x}_u \mathfrak{z}_v = \mathfrak{x}_v \mathfrak{z}_u = 0 \tag{23}$$

sein.

Setzen wir jetzt noch

$$-\bar{E} = \mathfrak{x}_u \mathfrak{z}_u, \qquad -\bar{G} = \mathfrak{x}_v \mathfrak{z}_v \tag{24}$$

und

$$l_1 = \mathfrak{y}_u \mathfrak{z} = -\mathfrak{y} \mathfrak{z}_u, \qquad l_2 = \mathfrak{y}_v \mathfrak{z} = -\mathfrak{y} \mathfrak{z}_v, \tag{25}$$

so erhalten wir mittels (20) bis (25) und deren Ableitungen folgen *Ableitungsgleichungen*

$$\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{x}_{uu} &= \bar{E}\,\mathfrak{y} + E\,\mathfrak{z} + \frac{e_u}{2e}\mathfrak{x}_u - \frac{e_v}{2g}\mathfrak{x}_v, \\ \mathfrak{x}_{uv} &= \;*\qquad *\; + \frac{e_v}{2e}\mathfrak{x}_u + \frac{g_u}{2g}\mathfrak{x}_v, \\ \mathfrak{x}_{vv} &= \bar{G}\,\mathfrak{y} + G\,\mathfrak{z} - \frac{g_u}{2e}\mathfrak{x}_u + \frac{g_v}{2g}\mathfrak{x}_v; \end{aligned}} \tag{26}$$

$$\mathfrak{y}_u = -\frac{E}{e}\mathfrak{x}_u + l_1\mathfrak{y}, \qquad \mathfrak{y}_v = -\frac{G}{g}\mathfrak{x}_v + l_2\mathfrak{y}; \tag{27}$$

$$\mathfrak{z}_u = -\frac{\bar{E}}{e}\mathfrak{x}_u - l_1\mathfrak{z}, \qquad \mathfrak{z}_v = -\frac{\bar{G}}{g}\mathfrak{x}_v - l_2\mathfrak{z}. \tag{28}$$

Wir haben folgende Differentialformen:

$$\begin{aligned} +\delta\mathfrak{x}\,\delta\mathfrak{x} &= e\,\delta u^2 + g\,\delta v^2, & -\delta\mathfrak{x}\,\delta\mathfrak{y} &= E\,\delta u^2 + G\,\delta v^2, \\ -\delta\mathfrak{x}\,\delta\mathfrak{z} &= \bar{E}\,\delta u^2 + \bar{G}\,\delta v^2, & +\delta\mathfrak{y}\,\delta\mathfrak{y} &= \frac{E^2}{e}\delta u^2 + \frac{G^2}{g}\delta v^2, \\ & & +\delta\mathfrak{z}\,\delta\mathfrak{z} &= \frac{\bar{E}^2}{e}\delta u^2 + \frac{\bar{G}^2}{g}\delta v^2, \end{aligned} \tag{29}$$

Aus (27) folgt durch Ableitung mittels (26), (28)

$$\begin{aligned} \mathfrak{y}_{uv} &= -\left\{\left(\frac{E}{e}\right)_v + \frac{E}{e}\frac{e_v}{2e}\right\}\mathfrak{x}_u - \left\{\frac{E}{e}\frac{g_u}{2g} + l_1\frac{G}{g}\right\}\mathfrak{x}_v + \{l_{1v} + l_1 l_2\}\mathfrak{y}, \\ \mathfrak{y}_{uv} &= -\left\{\frac{G}{g}\frac{e_v}{2e} + l_2\frac{E}{e}\right\}\mathfrak{x}_u - \left\{\left(\frac{G}{g}\right)_u + \frac{G}{g}\frac{g_u}{2g}\right\}\mathfrak{x}_v + \{l_{2u} + l_1 l_2\}\mathfrak{y}. \end{aligned} \tag{30}$$

Durch Gleichsetzen der Koeffizienten von $\mathfrak{y}$ folgt

$$l_{1v} - l_{2u} = 0. \tag{31}$$

Jetzt benutzen wir die Freiheit, die uns noch in der Wahl von $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ blieben ist, zu folgender Umnormung:

2) $$\bar{\mathfrak{y}} = \lambda \mathfrak{y}, \qquad \bar{\mathfrak{z}} = \frac{1}{\lambda}\mathfrak{z}.$$

ann wird

3) $$\bar{\mathfrak{y}}_u = \lambda_u \mathfrak{y} + \lambda \mathfrak{y}_u = \frac{\lambda_u}{\lambda}\bar{\mathfrak{y}} + \lambda\left(-\frac{E}{e}\mathfrak{x}_u + \frac{l_1}{\lambda}\bar{\mathfrak{y}}\right).$$

mit wird

4) $$\bar{l}_1 = l_1 + \frac{\lambda_u}{\lambda}, \qquad \bar{l}_2 = l_2 + \frac{\lambda_v}{\lambda}.$$

ach (31) können wir aber

5) $$\lg \lambda = -\int (l_1\, du + l_2\, dv)$$

tzen und erreichen so, daß $\bar{l}_1 = \bar{l}_2 = 0$ wird.

Bei dieser Normung vereinfachen sich die Ableitungsgleichungen 7), (28) zu

6) $$\mathfrak{y}_u = -\frac{E}{e}\mathfrak{x}_u, \qquad \mathfrak{y}_v = -\frac{G}{g}\mathfrak{x}_v;$$

7) $$\mathfrak{z}_u = -\frac{\bar{E}}{e}\mathfrak{x}_u, \qquad \mathfrak{z}_v = -\frac{\bar{G}}{g}\mathfrak{x}_v,$$

nn wir bei $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ die Querstriche nachträglich wieder weglassen.

§ 2.

Begleitende R-Systeme eines R-Systems.

Betrachten wir nun die in p, q lineare Schar von Kugelsystemen

8) $$\mathfrak{k}(u, v; p, q) = \mathfrak{x}(u, v) + p\,\mathfrak{y}(u, v) + q\,\mathfrak{z}(u, v),$$

aus unserem R-System $\mathfrak{x}(u, v) = \mathfrak{k}(u, v; 0, 0)$ in eindeutiger Weise ttels der genormten $\mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ entsteht. Wir behaupten:

Bei festen p, q ist $\mathfrak{k}(u, v; p, q)$ wieder ein R-System, das $\mathfrak{y}(u, v)$ d $\mathfrak{z}(u, v)$ zu sphärischen Bildern der Hüllflächen hat.

Das letztere, daß nämlich $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ wieder die sphärischen Bilder der llflächen sind, sieht man sofort. Dazu ist nach (12) nur

9) $$\mathfrak{y}\mathfrak{k}_u = \mathfrak{y}\mathfrak{k}_v = 0; \qquad \mathfrak{z}\mathfrak{k}_u = \mathfrak{z}\mathfrak{k}_v = 0$$

chzuweisen. Nun folgt aber aus (38) mittels (36), (37)

10) $$\mathfrak{k}_u = \left\{1 - \frac{E}{e}p - \frac{\bar{E}}{e}q\right\}\mathfrak{x}_u,$$
$$\mathfrak{k}_v = \left\{1 - \frac{G}{g}p - \frac{\bar{G}}{g}q\right\}\mathfrak{x}_v$$

d somit kommt (39) auf (12) zurück.

Wir werden auch gezeigt haben, daß das System $\mathfrak{k}(u, v; p, q)$ b veränderlichen u, v ein R-System ist, wenn wir zeigen, daß die Kurv $u, v =$ konst. auf beiden Hüllflächen wieder Krümmungslinien sind. Da ist nach (16) zu zeigen, daß die Vierervektoren $\mathfrak{k}_u, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}_u$, ferner $\mathfrak{k}_v, \mathfrak{y}$, und ebenso $\mathfrak{k}_u, \mathfrak{z}, \mathfrak{z}_u$ und $\mathfrak{k}_v, \mathfrak{z}, \mathfrak{z}_v$ linear abhängen. Das ist aber in (4 und (36), (37) enthalten.

Wir wollen zusehen, wie die Flächenelemente des R_3 gegeneinand liegen, in denen die Kugeln $\mathfrak{k}(u, v; p, q)$ die zugehörigen Hüllflächen b rühren. Den Berührungspunkt mit dem $\mathfrak{y}$-Mantel erhalten wir, wenn w in der Berührungsreihe von Kugeln $\mathfrak{k} + \lambda\mathfrak{y}$ die vierte Koordinate, al den Kugelradius $k_4 + \lambda y_4 = 0$ setzen. Entsprechend den Berührungspun $\mathfrak{k} + \mu\mathfrak{z}$, $k_4 + \mu z_4 = 0$ mit dem $\mathfrak{z}$-Mantel. Beide Punkte liegen aber dem System

$$(41) \qquad \mathfrak{x} + p\mathfrak{y} + q\mathfrak{z}, \qquad x_4 + py_4 + qz_4 = 0,$$

das die Punkte (Nullkugeln) einer Geraden des R_3 darstellt.

Wir haben somit gefunden:

Zu jedem R-System läßt sich durch eine Integration (35) eine v zwei Parametern p, q abhängige Schar von begleitenden R-System $\mathfrak{k}(u, v; p, q)$ ermitteln. Zwei entsprechende Kugeln $\mathfrak{k}(u, v; p, q)$ u $\mathfrak{k}(u, v, \bar{p}, \bar{q})$ haben die Berührungspunkte $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ und $\bar{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{q}}$ mit den Hü flächen auf derselben Geraden und in entsprechenden Punkten $\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}}$ u $\mathfrak{q}, \bar{\mathfrak{q}}$ sind die Tangentenebenen parallel. Die sphärischen Bilder Krümmungslinien der Hüllflächen fallen entsprechend zusammen. Tangentenentfernung entsprechender Kugeln

$$(42) \qquad \{\mathfrak{k}(u, v; p, q) - \mathfrak{k}(u, v; \bar{p}, \bar{q})\}^2 = 2(p - \bar{p})(q - \bar{q})$$

ist unabhängig von u, v.

Dieses Ergebnis steht im gewissen Sinn dual einem von Ribauc gegenüber, das man in den Lehrbüchern behandelt findet (vgl. auch folgenden § 7). Die zweiparametrigen Scharen bei Ribaucour haben Hüllflächen ein einparametriges System von Flächen, das eine zweip metrige Schar von Kreisen orthogonal durchschneidet. Im Falle R-Systeme mit festem Radius fallen die Scharen Ribaucours mit hier betrachteten zusammen. Die zugehörigen Hüllflächen sind dann System von Parallelflächen.

§ 3.

Beziehung der R-Systeme zu den abwickelbaren Flächen im R_4.

Von unseren Ableitungsgleichungen (26), (36), (37) aus kommen wir
icht zu der in der Einleitung angekündigten Beziehung zwischen den
-Systemen des R_3 und den abwickelbaren Flächen des R_4.

Das System (38) stellt bei festen u, v und beweglichen p, q im R_4
ne Ebene dar. Bestimmen wir den Schnittpunkt zweier benachbarter
erartiger Ebenen, die den Parameterwerten u, v und $u+\delta u$, $v+\delta v$ ent-
prechen! Aus (38) folgt

43) $$\delta \mathfrak{x} = \delta \mathfrak{x} + p\,\delta \mathfrak{y} + q\,\delta \mathfrak{z} + \mathfrak{y}\,\delta p + \mathfrak{z}\,\delta q.$$

oll nun $\delta \mathfrak{x} = 0$ sein, so ist nach (36), (37) dafür notwendig und hin-
eichend das Bestehen der skalaren Gleichungen $\delta p = \delta q = 0$ und

44) $$\begin{aligned} \mathfrak{x}_u \delta \mathfrak{x} + p(\mathfrak{x}_u \delta \mathfrak{y}) + q(\mathfrak{x}_u \delta \mathfrak{z}) &= 0, \\ \mathfrak{x}_v \delta \mathfrak{x} + p(\mathfrak{x}_v \delta \mathfrak{y}) + q(\mathfrak{x}_v \delta \mathfrak{z}) &= 0 \end{aligned}$$

der

45) $$\begin{aligned} e &= Ep + \bar{E}q, \\ g &= Gp + \bar{G}q. \end{aligned}$$

s sei nun unser R-System in dem Sinne „allgemein", daß

46) $$E\bar{G} - G\bar{E} \neq 0$$

usfällt. Dann können wir (45) nach p und q auflösen und finden

47) $$p = \frac{e\bar{G} - g\bar{E}}{E\bar{G} - G\bar{E}}, \qquad q = \frac{Eg - Ge}{E\bar{G} - G\bar{E}},$$

lso einen von der Fortschreitungsrichtung $\delta u : \delta v$ unabhängigen Punkt $\mathfrak{x}$
es R_4.

Setzen wir die gefundenen Werte (47) in (38) ein, so erhalten wir
ne Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ im R_4. Für das vektorielle Linienelement $\delta \mathfrak{x}$ dieser
läche finden wir nach (43)

48) $$\delta \mathfrak{x} = \mathfrak{y}\,\delta p + \mathfrak{z}\,\delta q,$$

a wir nach (44) p, q so gewählt haben, daß

49) $$\delta \mathfrak{x} + p\,\delta \mathfrak{y} + q\,\delta \mathfrak{z} = 0$$

ird.

Wir sehen also: *Die Ebenen des R_4, nämlich $\mathfrak{x}(u, v) + p\mathfrak{y}(u, v) - q\mathfrak{z}(u, v)$ (p, q veränderlich), umhüllen im R_4 im allgemeinen eine läche $\mathfrak{x}(u, v) = \mathfrak{x} + p\mathfrak{y} + q\mathfrak{z}$, wo p, q aus (47) berechenbar sind.*

Führen wir nun neben (46) noch die weitere einschränkende Voraussetzung für unser R-System ein, daß die Gleichungen (47) nach u auflösbar seien:

$$\Delta = \frac{\partial(p, q)}{\partial(u, v)} \neq 0, \tag{50}$$

dann können wir auf der Fläche $\mathfrak{k}(u, v)$ an Stelle von u, v ebenso auch p, q als Parameter einführen. Dann wird

$$\delta \mathfrak{k} = \mathfrak{k}_p \delta p + \mathfrak{k}_q \delta q \tag{51}$$

und durch Vergleich mit der Identität (48) in $\delta p, \delta q$

$$\mathfrak{k}_p = \mathfrak{y}, \quad \mathfrak{k}_q = \mathfrak{z}. \tag{52}$$

Wegen (12), (13) bekommen wir demnach für das Bogenelement den Ausdruck

$$\delta \mathfrak{k}^2 = 2 \delta p \delta q, \tag{53}$$

d. h.: *Die Fläche $\mathfrak{k}(p, q)$ ist auf eine Ebene längentreu abbildbar.*

Aus (38) folgt $\mathfrak{x} = \mathfrak{k} - p\mathfrak{y} - q\mathfrak{z}$ oder nach (52)

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{k} - p\mathfrak{k}_p - q\mathfrak{k}_q. \tag{54}$$

Hierin ist das eingangs genannte Ergebnis enthalten:

Die zu einem R-System $\mathfrak{x}(u, v)$ gehörige Fläche im R_4 wird im allgemeinen durch einen Punkt einer Ebene erzeugt, die auf einer abwickelbaren Fläche $\mathfrak{k}(p, q)$ des R_4 rollt[2]).

Überlegen wir uns noch, welche R-Systeme wir durch die Forderung (46) ausgeschlossen haben! Ist identisch

$$E\bar{G} - G\bar{E} = 0, \tag{55}$$

so folgt aus (45), wenn diese Gleichungen nach p, q lösbar sind, dann auch

$$e\bar{G} - g\bar{E} = Eg - Ge = 0 \tag{56}$$

wird. Aus (36), (37) folgt dann

$$\delta \mathfrak{y} = \sigma \delta \mathfrak{x}, \quad \delta \mathfrak{z} = \tau \delta \mathfrak{x}. \tag{57}$$

Somit hängen sowohl $\delta\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\delta\mathfrak{y}$ wie auch $\delta\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$, $\delta\mathfrak{z}$ stets linear D. h. auf dem $\mathfrak{y}$-Mantel wie auf dem $\mathfrak{z}$-Mantel des Hüllgebildes sind Kurven Krümmungslinien, diese beiden Mäntel sind somit Kugeln. So sind durch die Forderung (46) nur die R-Systeme ausgeschlossen wor deren Kugeln zwei feste Kugeln berühren. Die zugehörige Fläche $\mathfrak{x}(u$ im R_4 ist eine Kugel.

---

[2]) Dieses „rollen" setzen wir etwas näher im § 6 auseinander.

Es sei nun (55) erfüllt und (45) nicht lösbar nach p, q. Dann haben zwei Ebenen $\mathfrak{x} + p\mathfrak{y} + q\mathfrak{z}$ und $(\mathfrak{x} + \delta\mathfrak{x}) + p(\mathfrak{y} + \delta\mathfrak{y}) + q(\mathfrak{z} + \delta\mathfrak{z})$ mit veränderlichen p, q ihren Schnittpunkt im Unendlichen unabhängig von der Fortschreitungsrichtung $\delta u : \delta v$. Die uneigentlichen Geraden dieser Ebenen werden also im allgemeinen — wenn wir nämlich annehmen, daß sie von *zwei* wesentlichen Parametern abhängen sollen — alle durch einen uneigentlichen Punkt gehen. Dann liegt aber die Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ des R_4 in einem R_3 senkrecht zu diesem uneigentlichen Punkt. Durch eine „Bewegung" des R_4 kann man erreichen, daß dieser R_3 in den R_3 mit der Gleichung $x_4 = 0$ hineinfällt. Dann wird unser Kugelsystem ein solches aus lauter Kugeln vom Radius Null. Unsere besonderen R-Systeme kann man also durch die Laguerreschen Transformationen, die den Bewegungen des R_4 im R_3 entsprechen, in die trivialen R-Systeme aus Kugeln mit verschwindendem Radius überführen.

Auf die R-Systeme, die durch die Forderung (50) ausgeschlossen wurden, kommen wir später (§ 6) zurück.

§ 4.
Umkehrung.

Wir wollen jetzt umgekehrt zeigen:

Rollt im R_4 eine Ebene auf einer abwickelbaren Fläche $\mathfrak{k}(p, q)$ mit dem Bogenelement $\delta\mathfrak{k}^2 = 2\,\delta p\,\delta q$, so beschreibt dabei jeder Punkt $\mathfrak{x}$ der Ebene eine Fläche $\mathfrak{x}(p, q)$, der im R_3 durch die isotrope Projektion ein R-System von Kugeln entspricht.

Wir gehen von der Fläche $\mathfrak{k}(p, q)$ mit $\delta\mathfrak{k}^2 = 2\,\delta p\,\delta q$ aus und können die beim Abrollen der Tangentenebene von einem ihrer Punkte beschriebene Fläche in der Form (54), nämlich

$$\mathfrak{x}(p, q) = \mathfrak{k} - p\mathfrak{k}_p - q\mathfrak{k}_q, \tag{54}$$

darstellen. Denn es ergibt sich aus (54)

$$\delta\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_p\,\delta p + \mathfrak{x}_q\,\delta q \tag{58}$$

und es ist $\delta\mathfrak{x}$ auf der Tangentenebene (54) von $\mathfrak{k}(p, q)$, d. h. auf $\mathfrak{k}_p$ und $\mathfrak{k}_q$ senkrecht. Es ist nämlich

$$\mathfrak{x}_p = -p\mathfrak{k}_{pp} - q\mathfrak{k}_{pq}, \quad \mathfrak{x}_q = -p\mathfrak{k}_{pq} - q\mathfrak{k}_{qq} \tag{59}$$

senkrecht zu $\mathfrak{k}_p, \mathfrak{k}_q$:

$$\mathfrak{x}_p\mathfrak{k}_p = \mathfrak{x}_p\mathfrak{k}_q = \mathfrak{x}_q\mathfrak{k}_p = \mathfrak{x}_q\mathfrak{k}_q = 0 \tag{60}$$

wegen

$$\begin{aligned} \mathfrak{k}_p\mathfrak{k}_{pp} = \mathfrak{k}_p\mathfrak{k}_{pq} = \mathfrak{k}_p\mathfrak{k}_{qq} = 0, \\ \mathfrak{k}_q\mathfrak{k}_{pp} = \mathfrak{k}_q\mathfrak{k}_{pq} = \mathfrak{k}_q\mathfrak{k}_{qq} = 0. \end{aligned} \tag{61}$$

Diese Beziehungen (61) entstehen nämlich aus $\delta \mathfrak{x}^2 = 2\,\delta p\,\delta q$ oder

$$\mathfrak{x}_p^2 = 0, \quad \mathfrak{x}_p \mathfrak{x}_q = 1, \quad \mathfrak{x}_q \mathfrak{x}_q = 0 \tag{62}$$

durch Ableitung.

Wegen (60) oder

$$\mathfrak{x}_p\,\delta \mathfrak{x} = 0, \quad \mathfrak{x}_q\,\delta \mathfrak{x} = 0 \tag{63}$$

und (62) können wir deshalb die Vektoren $\mathfrak{x}_p$ und $\mathfrak{x}_q$ mit den in § 1 e geführten Vierervektoren $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ zusammenfallen lassen:

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x}_p, \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{x}_q. \tag{64}$$

Dann wird nach (61)

$$\mathfrak{y}_p\,\mathfrak{z} = \mathfrak{y}_q\,\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_p\,\mathfrak{y} = \mathfrak{z}_q\,\mathfrak{y} = 0. \tag{65}$$

Die Ableitungsgleichungen ähnlich zu (27), (28) mit den Ableitungen v $\mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ nach p, q bekommen also wieder eine Gestalt ähnlich zu (36), (3 mit $l_1 = l_2 = 0$.

Früher haben wir gezeigt: Ist $\mathfrak{x}(p, q)$ ein Kugelsystem Ribaucou so lassen sich die Vierervektoren $\mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ so normen, daß $\mathfrak{z}\,\delta\mathfrak{y} = -\mathfrak{y}\,\delta\mathfrak{z} =$ wird. Jetzt kommt es darauf an, umgekehrt zu beweisen: *Ist*

$$\mathfrak{z}\,\delta\mathfrak{y} = -\mathfrak{y}\,\delta\mathfrak{z} = 0, \tag{66}$$

so ist $\mathfrak{x}(p, q)$ ein R-System.

Nach (66) nehmen die Ableitungsgleichungen entsprechend zu (2 (36), (37) bei der Ableitung nach $p = p^1$, $q = p^2$ folgende Gestalt

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_{ik} &= \bar{c}_{ik}\,\mathfrak{y} + c_{ik}\,\mathfrak{z}, \\ \mathfrak{y}_i &= -c_i^l\,\mathfrak{x}_l, \\ \mathfrak{z}_i &= -\bar{c}_i^l\,\mathfrak{x}_l. \end{aligned} \tag{67}$$

Darin mögen die $\mathfrak{x}_{ik}$ Christoffels kovariante zweite Ableitung bezügl der quadratischen Grundform

$$\delta \mathfrak{x}^2 = a_{ik}\,\delta p^i\,\delta p^k \tag{68}$$

bedeuten. Diese (positiv definite) Form (68) möge zur Maßform des lichen Tensorkalküls genommen werden.

Als Integrierbarkeitsbedingungen für (67) erhalten wir auf dem wohnten Wege die folgenden:

(69) Symmetrie der Tensoren c_{ikr}, $\bar{c}_{ikr}$

$$e^{ik} c_i^l \bar{c}_{lk} = 0; \tag{70}$$

$$\frac{1}{2} e^{ik} e^{rs} c_{ir} c_{ks} = K. \tag{71}$$

abei bedeutet e_{ik} den üblichen schiefsymmetrischen Tensor, und K das rümmungsmaß der Form (68). Wir werden hier von diesen Integrierkeitsbedingungen nur die mittlere (70) benötigen.

Durch die Forderungen der linearen Abhängigkeit einerseits von $\xi, \mathfrak{y}, \delta\mathfrak{y}$, andererseits von $\delta\xi, \mathfrak{z}, \delta\mathfrak{z}$ ergeben sich als Differentialgleichungen r Krümmungslinien auf den beiden Mänteln in der üblichen Weise

$$e_{il}\, c_k^l\, \delta p^i\, \delta p^k = 0, \qquad e_{il}\, \bar{c}_k^l\, \delta p^i\, \delta p^k = 0. \tag{72}$$

us den im allgemeinen nicht symmetrischen Tensoren

$$e_{il}\, c_k^l, \quad e_{il}\, \bar{c}_k^l \tag{73}$$

iten wir symmetrische Tensoren $b_{ik}, \bar{b}_{ik}$ durch die Identitäten in den δp her:

$$e_{il}\, c_k^l\, \delta p^i\, \delta p^k = b_{ik}\, \delta p^i\, \delta p^k, \qquad e_{il}\, \bar{c}_k^l\, \delta p^i\, \delta p^k = \bar{b}_{ik}\, \delta p^i\, \delta p^k. \tag{74}$$

ann ist aus (67) herzuleiten, daß sich die Krümmungslinien auf den iden Mänteln entsprechen, daß also die b_{ik} den $\bar{b}_{ik}$ proportional sind.

Aus der schiefen Symmetrie der e_{ik} folgt

$$c^{ik}\, b_{ik} = c^{ik}\, e_{il}\, c_k^l = 0, \qquad \bar{c}^{ik}\, \bar{b}_{ik} = \bar{c}^{ik}\, e_{il}\, \bar{c}_k^l = 0. \tag{75}$$

erner ergibt sich aus (70)

$$\bar{c}^{ik}\, b_{ik} = \bar{c}^{ik}\, e_{il}\, c_k^l = 0, \qquad c^{ik}\, \bar{b}_{ik} = c^{ik}\, e_{il}\, \bar{c}_k^l = 0. \tag{76}$$

ndlich ist wegen der Symmetrie der $c_{ik}, \bar{c}_{ik}$

$$a^{ik}\, b_{ik} = a^{ik}\, e_{il}\, c_k^l = e_{kl}\, c^{lk} = 0, \qquad a^{ik}\, \bar{b}_{ik} = a^{ik}\, e_{il}\, \bar{c}_k^l = e_{kl}\, \bar{c}^{lk} = 0. \tag{77}$$

ach (75), (76), (77) genügen somit sowohl b_{ik} wie $\bar{b}_{ik}$ den drei linearen leichungen

$$a^{ik} X_{ik} = 0, \quad c^{ik} X_{ik} = 0, \quad \bar{c}^{ik} X_{ik} = 0. \tag{78}$$

arin liegt aber die zu beweisende lineare Abhängigkeit der symmetrischen ensoren $b_{ik}, \bar{b}_{ik}$, es sei denn, daß die Tensoren c_{ik} und $\bar{c}_{ik}$ zu a_{ik} proortional sind. Doch führt auch dieser letzte Fall nach (74) sofort zur nearen Abhängigkeit von b_{ik} und $\bar{b}_{ik}$ und damit ist der Beweis beendet.

Wir haben somit gezeigt: *Das Studium der R-Systeme des R_3 ist cht wesentlich verschieden von der Untersuchung der abwickelbaren lächen des R_4.*[3])

[3]) Die (zweifach ausgedehnten) Flächen im euklidischen R_4 sind mehrfach vom andpunkt der Differentialgeometrie behandelt worden, so z. B. in der Dissertation

§ 5.

Das sphärische Bild der Kugelsysteme Ribaucours.

Wir haben vorhin gezeigt: *Ein R-System hat die kennzeichnen Eigenschaft, daß sich sein sphärisches Bild* $(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ *so normen läßt, d*

$$\mathfrak{y}\,\delta\mathfrak{z} = -\,\mathfrak{z}\,\delta\mathfrak{y} = 0 \tag{66}$$

wird.

Diese Bedingung (66) läßt sich leicht geometrisch deuten. Es sei (6 erfüllt, dann betrachten wir in dem nicht-euklidischen Raum mit d absoluten Fläche $\mathfrak{E}$, auf der $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ liegen $(\mathfrak{y}^2 = \mathfrak{z}^2 = 0)$, die Fläche

$$\mathfrak{p}(u, v) = \lambda\,\mathfrak{y}(u, v) + \frac{1}{\lambda}\,\mathfrak{z}(u, v), \quad (\lambda = \text{konst.},\ \mathfrak{p}^2 = 2) \tag{79}$$

Wir behaupten: Diese Fläche $\mathfrak{p}(u, v)$ steht auf den Strahlen $\mathfrak{X} = (\mathfrak{y},$ normal, d. h. es ist

$$\mathfrak{y}\,\delta\mathfrak{p} = 0, \quad \mathfrak{z}\,\delta\mathfrak{p} = 0. \tag{80}$$

Dies folgt wirklich sofort aus (79) mittels (66).

Damit ist gezeigt: *Das sphärische Abbild* $\mathfrak{X}(u, v)$ *eines R-Syste ist ein nicht-euklidisches Normalensystem.*

Sei umgekehrt $\mathfrak{p}(u, v)$ eine Fläche im nicht-euklidischen Raum et mit $\mathfrak{p}^2 = 1$. Dann gehe man auf den Flächennormalen von $(\mathfrak{p})$ bis z Punkt $\mathfrak{q}$, der von $\mathfrak{p}$ durch die absolute Fläche $\mathfrak{E}$ harmonisch getre wird. Diese Punkte $\mathfrak{q}(u, v)$ denken wir uns etwa so genormt, daß $\mathfrak{q}^2 = -$ ausfällt. Dann ist

$$\begin{gathered} \mathfrak{p}^2 = 1, \quad \mathfrak{p}\,\mathfrak{q} = 0, \quad \mathfrak{q}^2 = -1; \\ \mathfrak{p}\,\delta\mathfrak{p} = \mathfrak{q}\,\delta\mathfrak{q} = 0; \\ \mathfrak{q}\,\delta\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\,\delta\mathfrak{q} = 0. \end{gathered} \tag{81}$$

Setzen wir also

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathfrak{p} - \mathfrak{q}) = \mathfrak{y}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathfrak{p} + \mathfrak{q}) = \mathfrak{z}, \tag{82}$$

so wird

$$\begin{gathered} \mathfrak{y}^2 = 0, \quad \mathfrak{y}\,\mathfrak{z} = 1, \quad \mathfrak{z}^2 = 0; \\ \mathfrak{y}\,\delta\mathfrak{z} = -\,\mathfrak{z}\,\delta\mathfrak{y} = \frac{1}{2}(\mathfrak{p} - \mathfrak{q})(\delta\mathfrak{p} + \delta\mathfrak{q}) = 0. \end{gathered} \tag{83}$$

---

von K. Kommerell, Tübingen 1897. Eine kennzeichnende Eigenschaft der wickelbaren Flächen hat E. Bompiani angegeben, Atti Lincei 1919—1920, se del 30. Nov. 1919. Sie hängt mit den im folgenden § 5 dieser Arbeit behande Dingen zusammen.

[4]) Die Koordinaten $p_k\,(k = 1, 2, 3, 4)$ des Vierervektors $\mathfrak{p}$ werden jetzt homogene Punktkoordinaten im R_3 gedeutet.

as heißt: *Die Normalen* $(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ *unserer Fläche* $\mathfrak{p}(u, v)$ *erfüllen umgekehrt* e *Bedingung* (66).

(66) kennzeichnet also die Normalensysteme.

Es bleibt jetzt umgekehrt festzustellen, ob zu beliebig vorgegebenem ormalensystem $\mathfrak{y}(u, v)$, $\mathfrak{z}(u, v)$; $\mathfrak{y}^2 = 0$, $\mathfrak{y}\mathfrak{z} = 1$, $\mathfrak{z}^2 = 0$; $\mathfrak{y}\,\delta\mathfrak{z} = 0$ mer R-Systeme gehören, die dieses sphärische Bild besitzen. Dazu aucht man nur das Kugelsystem

4) $$\mathfrak{x}(u, v) = \mathfrak{y}(u, v)$$

betrachten. Wegen $\mathfrak{y}\,\delta\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{z}\,\delta\mathfrak{x} = 0$ hat es $(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ als sphärisches ld. Ferner gehen wegen $\mathfrak{x}^2 = \mathfrak{y}^2 = 0$ alle Kugeln $\mathfrak{x}$ durch den Null- nkt, die Kugeln $\mathfrak{x}(u, v)$ bilden also trivialerweise ein R-System.

Wie bestimmt man jetzt *alle* R-Systeme mit gegebenem sphärischen ld? Nehmen wir die quadratische Form $\delta\mathfrak{y}^2$, die wir als positiv definit raussetzen wollen, als metrische Grundform

5) $$\delta\mathfrak{y}^2 = g_{ik}\,\delta u^i\,\delta u^k,$$

bekommen wir für $\mathfrak{y}\,\delta\mathfrak{z} = 0$ Ableitungsgleichungen von folgender Gestalt

6) $$\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{y}_{ik} &= +f_{ik}\,\mathfrak{y} - g_{ik}\,\mathfrak{z}, \\ \mathfrak{z}_i &= -f_i^l\,\mathfrak{y}_l, \end{aligned}}$$

rin f_{ik} einen neuen symmetrischen Tensor bedeutet.

Setzen wir nun für das gesuchte R-System $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$ die Ableitungs- eichungen

$$\mathfrak{x}_i = a_i\,\mathfrak{y} + b_i\,\mathfrak{z} + v_i^l\,\mathfrak{y}_l,$$

, so muß wegen $\mathfrak{x}_i\,\mathfrak{y} = \mathfrak{x}_i\,\mathfrak{z} = 0$, $a_i = b_i = 0$ sein. Somit wird

7) $$\mathfrak{x}_i = v_i^l\,\mathfrak{y}_l.$$

raus ist mittels (86)

8) $$\mathfrak{x}_{ik} = v_{ik}^l\,\mathfrak{y}_l + v_i^l\,(f_{lk}\,\mathfrak{y} - g_{lk}\,\mathfrak{z}).$$

mit erhalten wir aus $e^{ik}\mathfrak{x}_{ik} = 0$ die Integrierbarkeitsbedingungen

9) $$e^{ik}v_{ilk} = 0, \quad e^{ik}v_i^l f_{lk} = 0, \quad e^{ik}v_{ik} = 0.$$

und v_{ikl} sind also symmetrisch.

Führen wir insbesondere die Nullinien von

10) $$(\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}\,\delta\mathfrak{y}\,\delta\mathfrak{z}) = -e_{il}f_k^l\,\delta u^i\,\delta u^k$$

Parameterlinien $p, q =$ konst. ein, so wird

11) $$\begin{aligned} \delta\mathfrak{y}^2 &= g_{ik}\,\delta u^i\,\delta u^k = e\,dp^2 + g\,dq^2, \\ -\delta\mathfrak{y}\,\delta\mathfrak{z} &= f_{ik}\,\delta u^i\,\delta u^k = \bar{e}\,dp^2 + \bar{g}\,dq^2. \end{aligned}$$

Aus $(89)_2$ ergibt sich

$$v_{12}(e\bar{g} - g\bar{e}) = 0. \tag{92}$$

Wenn wir also

$$e\bar{g} - g\bar{e} \neq 0 \tag{93}$$

annehmen, wird

$$v_{12} = 0. \tag{94}$$

Dann bleiben für die v_{11}, v_{22} noch die Gleichungen $(89)_1$ übrig, die s jetzt so schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{11}}{\partial q} &= \frac{e_q}{2}\left(\frac{v_{11}}{e} + \frac{v_{22}}{g}\right), \\ \frac{\partial v_{22}}{\partial p} &= \frac{g_p}{2}\left(\frac{v_{11}}{e} + \frac{v_{22}}{g}\right). \end{aligned} \tag{95}$$

Zur Prüfung der Richtigkeit bemerken wir nebenbei, daß für $\mathfrak{x} = v_{ik} = g_{ik}$, $v_{11} = e$, $v_{22} = g$ die Gleichungen (95) erfüllt sind.

Entfernt man aus den beiden Gleichungen (95) etwa das v_{22}, so hält man für v_{11} eine Differentialgleichung zweiter Ordnung vom Bau

$$\frac{\partial^2 v_{11}}{\partial p\, \partial q} + A\frac{\partial v_{11}}{\partial p} + B\frac{\partial v_{11}}{\partial q} + C v_{11} = 0. \tag{96}$$

Hat man daraus v_{11} bestimmt, so kennt man aus $(95)_1$ auch v_{22}, u dann ist aus (87) das gesuchte Kugelsystem durch Integration bestim bar. *Es kommt also die Ermittelung aller R-Kugelsysteme mit v geschriebenem sphärischem Bild im wesentlichen auf die Auflösung ei linearen homogenen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung v hyperbolischen Typ* (96) *hinaus.*

§ 6.

Besondere Kugelsysteme von Ribaucour.

In (50) haben wir die R-Systeme von der Betrachtung ausgeschlos für die identisch

$$\Delta = \frac{\partial(p, q)}{\partial(u, v)} = 0 \tag{97}$$

ist. Richten wir jetzt zum Schluß unser Augenmerk auf diese „*besond R-Systeme*“, bei denen die Erzeugung durch Abrollen entartet. Da nach (δp, δq linear abhängen, ist nach (48) in diesem Fall der Ort von $\mathfrak{k}$ allgemeinen eine Kurve des R_4, und die Ebenen $\mathfrak{x} + p\mathfrak{y} + q\mathfrak{z}$ $(p, q$ änderlich) berühren nach (48) diese Kurve $(\mathfrak{k})$.

Wir fragen umgekehrt: Ist eine Kurve $\mathfrak{k}(s)$ etwa mit $(d\mathfrak{k} : ds)^2 = \mathfrak{k}'^2 =$ im R_4 beliebig vorgegeben, kann man dann eine Berührungsebene $\mathfrak{E}$(

n $\mathfrak{k}(s)$ so bewegen, daß bei dieser Bewegung von zwei Freiheitsgraden von den Punkten der Ebene $\mathfrak{E}$ beschriebenen Bahnelemente auf $\mathfrak{E}$ hogonal sind?

Es sei der Vierervektor $\mathfrak{v}(s,t)$ orthogonal zu $\mathfrak{k}'(s)$ gewählt:

3) $$\mathfrak{v}\mathfrak{k}' = 0.$$

nn können wir, je nachdem $\mathfrak{k}'^2 = \pm 1$ ist, $\mathfrak{v}^2 = \mp 1$ setzen. Stellen nun $\mathfrak{E}$ in der Form dar:

9) $$\mathfrak{x} = \mathfrak{k} + \alpha\mathfrak{k}' + \beta\mathfrak{v},$$

rin

10) $$\alpha = \alpha(s,t;\ x,y),$$
$$\beta = \beta(s,t;\ x,y),$$

l $x, y =$ konst. die Bahnkurven der Bewegung geben soll. Dann folgt (99)

11) $$\mathfrak{x}_s = (1+\alpha_s)\mathfrak{k}' + \alpha\mathfrak{k}'' + \beta_s\mathfrak{v} + \beta\mathfrak{v}_s,$$
$$\mathfrak{x}_t = \quad \alpha_t\ \mathfrak{k}' + \beta\mathfrak{v}_t + \beta_t\mathfrak{v}.$$

e Forderungen

12) $$\mathfrak{x}_s\mathfrak{k}' = 0, \quad \mathfrak{x}_s\mathfrak{v} = 0; \qquad \mathfrak{x}_t\mathfrak{k}' = 0, \quad \mathfrak{x}_t\mathfrak{v} = 0$$

eben wegen

13) $$\mathfrak{k}'^2 = \pm 1, \quad \mathfrak{k}'\mathfrak{k}'' = 0, \quad \mathfrak{k}'\mathfrak{v} = 0, \quad \mathfrak{k}''\mathfrak{v} = -\mathfrak{k}'\mathfrak{v}_s,$$
$$\mathfrak{v}^2 = \mp 1, \quad \mathfrak{v}\mathfrak{v}_s = 0, \quad \mathfrak{v}\mathfrak{v}_t = 0, \quad \mathfrak{k}'\mathfrak{v}_t = 0$$

Gleichungen

14) $$\pm(1+\alpha_s) + \beta(\mathfrak{k}'\mathfrak{v}_s) = 0,$$
$$\alpha(\mathfrak{k}'\mathfrak{v}_s) \pm \beta_s = 0,$$
$$\alpha_t = 0,$$
$$\beta_t = 0.$$

Da die erste Gleichung identisch in x, y gelten soll, also auch identisch β, muß

15) $$\alpha_s = -1$$

l

16) $$\mathfrak{k}'\mathfrak{v}_s = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{v}\mathfrak{k}'' = 0$$

n, und aus $(104)_2$ folgt noch

17) $$\beta_s = 0.$$

Nach $(104)_{3,4}$, (105), (107) ist

$$\alpha = -s + f(x,y), \qquad \beta = g(x,y),$$

oder nach Einführung neuer Parameter x, y

$$\alpha = -s + x, \quad \beta = y. \tag{108}$$

Verändern wir noch den Anfangspunkt der Zählung von s und setzen $y = c = \text{konst.}$, so können wir statt (99) schließlich schreiben:

$$\boxed{\mathfrak{x} = \mathfrak{k}(s) - s\mathfrak{k}'(s) + c\mathfrak{v}(s,t)}, \tag{109}$$

wobei der Einheitsvektor $\mathfrak{v}$ ($\mathfrak{v}^2 = +1$) auf der Schmiegebene von nach (98) und (106) senkrecht steht:

$$\mathfrak{v}\mathfrak{k}' = 0, \quad \mathfrak{v}\mathfrak{k}'' = 0. \tag{110}$$

Wir können jetzt leicht zeigen: *Die Hüllmäntel jedes besonde R-Systems* (109) *sind Kanalflächen, d. h. gleichzeitig Hüllflächen e parametriger Kugelscharen.*

Wegen (102) können wir in der Bezeichnung von § 1 setzen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{v} + \mathfrak{k}' &= \mathfrak{y}, \\ \mathfrak{v} - \mathfrak{k}' &= \mathfrak{z}, \end{aligned} \tag{111}$$

wodurch dann, ein wenig abweichend von § 1, $\mathfrak{y}\mathfrak{z} = \mp 2$ wird. D haben die Kugeln

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{x} - c\mathfrak{y} = \mathfrak{k}(s) - (s + c)\mathfrak{k}'(s) \tag{112}$$

denselben $\mathfrak{y}$-Hüllmantel wie die Kugeln $\mathfrak{x}$. $\mathfrak{s}$ hängt aber nur von s Also ist der $\mathfrak{y}$-Mantel eine Kanalfläche. Ebenso ist

$$\mathfrak{x} - c\mathfrak{z} = \mathfrak{k}(s) - (s - c)\mathfrak{k}'(s) \tag{113}$$

nur von s abhängig, also auch der $\mathfrak{z}$-Mantel Kanalfläche.

Die beiden Kanalflächen haben überdies gemeinsames sphärisches I ihrer Krümmungslinien. Das sphärische Bild der Berührungslinien $s = \text{ko}$ mit den die Kanalfläche umhüllenden Kugeln (112), (113) bilden näm die Kreise

$$\mathfrak{y}\mathfrak{k}'' = 0, \quad \mathfrak{z}\mathfrak{k}'' = 0; \qquad s = \text{konst.}, \tag{114}$$

wie aus (111), (110) hervorgeht. Trotz $\mathfrak{y} \neq \mathfrak{z}$ fallen also die Kr $s = \text{konst.}$ der sphärischen Bilder zusammen, und daher fällt auch j sphärische Abbild einer Krümmungslinie der anderen Schar des $\mathfrak{y}$-Man mit dem sphärischen Bilde einer Krümmungslinie des $\mathfrak{z}$-Mantels zusamm nämlich mit einer orthogonalen Trajektorie der Kreisschar (114).

§ 7.

Die R-Systeme vom Standpunkt der Inversionsgeometrie.

Zu den in den vorigen Abschnitten vorgetragenen Untersuchungen
t es ein „duales“ Gegenstück. Darauf wollen wir hier noch andeutungs-
ise eingehen. Statt durch die isotrope Projektion bilde man die Kugeln
seres R_3^0 auf die Schnitte einer Kugel $\mathfrak{K}$ des R_4 mit den linearen R_3
R_4 stereographisch ab. Statt der R_3 kann man auch die Punkte des
setzen, die den R_3 durch die Polarität an $\mathfrak{K}$ entsprechen. So sind
o schließlich die Kugeln unseres R_3^0 auf die Punkte des R_4 „stereo-
phisch“ abgebildet. In R_4 nehmen wir $\mathfrak{K}$ zur absoluten Fläche einer
ßbestimmung nach Cayley und Klein. Dann gilt wieder:

Den Kugeln eines R-Systems im R_3^0 entsprechen im R_4 die Punkte
er Fläche. Diese wird im allgemeinen von einem Punkte einer Ebene
chrieben, wenn diese Ebene auf einer festen „abwickelbaren“ Fläche
R_4 holonom rollt.

Dabei ist im R_4 die nicht-euklidische Maßbestimmung wesentlich.
n kann das Ergebnis auch so wenden:

Den Tangentenebenen einer „abwickelbaren“ Fläche des nicht-euklidi-
en R_4 entsprechen im R_3 die Kreise eines zweiparametrigen Systems,
eine Schar orthogonaler Flächen besitzt, und im allgemeinen auch
gekehrt.

Zum Beweise dieser Sätze bediene man sich etwa der Formeln, die
Thomsen für die konforme Geometrie hergeleitet hat[5]).

In der nächstfolgenden (L. VI) dieser Arbeiten werde ich in den Ham-
ger Abhandlungen zeigen, daß man mit einem ähnlichen Verfahren die
chen mit einer Schar ebener oder sphärischer Krümmungslinien auf-
len kann. Später werde ich in dieser Mathematischen Zeitschrift
L. VII) einen einfachen Zusammenhang herleiten zwischen den Kugel-
temen Ribaucours und den vierfachen Orthogonalsystemen im R_4.

Hamburg, Math. Seminar, Pfingsten 1925.

---

[5]) G. Thomsen, Hamburger Abhandlungen **3** (1924), S. 31–56.

(Eingegangen am 1. Juni 1925.)

Berichtigung

zu meiner Arbeit „Über die erste Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie“[1]

Wie ich einer freundlichen brieflichen Mitteilung von Herrn Crud entnehme, sind in der Formel (16) der obigen Arbeit die mit dem ne tiven Vorzeichen versehenen Ausdrücke durch die entgegengesetzt gleich zu ersetzen. Die Integralgleichung (20) nimmt darum die Gestalt

$$\Theta(\bar{\sigma}) = \frac{2\mu}{\lambda+3\mu} A(\bar{\sigma}) + \frac{\lambda+\mu}{4\pi(\lambda+3\mu)} \int_S \bar{\varrho}\, \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{\varrho}\, \partial n}\, \Theta(\sigma)\, d\sigma$$

an. Die sonstigen Formeln wie die Schlußfolgerungen der Arbeit werd hierdurch nicht berührt.

Leipzig, den 26. 7. 1925.

L. Lichtenstein.

---

[1]) Vgl. diese Zeitschr. **20** (1924), S. 21–28.

(Eingegangen am 26. Juli 1925.)

ur Theorie der ein- und mehrwertigen harmonischen Funktionen des dreidimensionalen Raumes.

Von

Stefan Bergmann in Lodz (Polen).

Die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderhen ist gleichzeitig im wesentlichen eine Theorie der Potentialfunktionen s R_2.[1])

Infolgedessen gewährt auch die Theorie der Abelschen Funktionen d deren Integrale einen tiefen Einblick in das Wesen und die Eigenaften einer Reihe von harmonischen, zweidimensionalen Funktionen. ese Funktionen kann man auch rein potentialtheoretisch definieren, und ar die einen als mehrwertige harmonische Funktionen, die anderen als nktionen, die auf bestimmten, zerschnittenen Riemannschen Flächen rgeschriebene Singularitäten besitzen, an den Quer- und Rückkehrnitten konstante Sprünge aufweisen und sonst in der ganzen Ebene ulär bleiben. Es liegt dann sehr nahe, von dem zwei- zu dem dreinensionalen Raum überzugehen und dort den Abelschen analoge harnische Funktionen zu definieren. Die Berechnung und Untersuchung cher dreidimensionalen Funktionen im Gegensatz zu den zweidimensionalen tet Schwierigkeiten, deren Grund wohl darin liegt, daß, während man die monischen Funktionen des R_2 (die eine lineare Schar bilden) auf einen rper der Funktionen einer komplexen Veränderlichen eineindeutig abden kann, eine analoge Behandlung der dreidimensionalen Funktionen jetzt nicht betrachtet wurde.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit besteht darin, die harmonischen nktionen des R_3 mit einem Funktionenkörper in Zusammenhang zu ngen, und so die Theorie der angegebenen Funktionen zu studieren.

Die Gesamtheit der Funktionen, die zu diesem Körper gehören, bechnen wir als Zugeordneten. Eine zugeordnete Funktion f ist eine

[1]) So wollen wir den zweidimensionalen Raum bezeichnen, im Gegensatz zu dem dimensionalen, den wir mit R_3 bezeichnen.

Funktion einer Veränderlichen u und eines Parameters t, wob
$u = x + iy\cos t + iz\sin t$ ist, worin x, y, z die kartesischen Koordinat
des Raumes sind, t der angegebene reelle Parameter ist. Durch Mitte
wertbildung $F = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,dt$ [2]) gelangt man von einer zugeordneten Fun
tion f zu der entsprechenden harmonischen F. Diese Zuordnung ist nic
eineindeutig. Es ist aber von Wichtigkeit, daß in der Richtung von d
zugeordneten zur harmonischen Funktion eine leicht übersehbare Gese
mäßigkeit der Zuordnung existiert. Wir untersuchen in der vorliegend
Arbeit nur Funktionen, deren Zugeordnete von der Form $f(u, e^{it}) = h(u)\,p(e$
ist, wobei $h(u)$ eine rationale oder zweiwertige Funktion in u *allein*, $p(e$
ein Polynom in e^{it} ist. Bildet man das oben angegebene Integral $F = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f$
so gelangt man im allgemeinen zu einer harmonischen Funktion F, die
gewissen Gebieten G_k regulär harmonisch ist und bei Übergängen von ein
Gebiete G_k zu einem anderen G_{k+1} einen Sprung $\eta(x, y, z)$ aufweist.
trachtet man aber das Integral $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,dt$ nicht im ganzen Raum, sond
man als F diejenige harmonische Funktion definiert, die in G_k du
$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,dt$ gegeben ist und außerhalb von G_k durch analytische Fortsetzu
aus $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,dt$ (*betrachtet als harmonische Funktion*) hervorgeht, so gela
man auf diese Weise zu einer harmonischen Funktion F_k, die, abgesel
von gewissen singulären Punkten und Linien, auf jedem Wege sich f
setzen läßt. In der vorliegenden Arbeit werden diese Funktionen und
Zusammenhang mit f genauer studiert. Es zeigt sich dann, daß gewis
in u algebraischen Funktionen h und deren Integralen bestimmte ein- o
zweideutige harmonische Funktionen entsprechen. Unter diesen letzten
finden sich auch Funktionen, die wir als dreidimensionale Analoga
Abelschen Funktionen und deren Integrale definiert haben. Da ande
seits diese Funktionen in G_k sich in der Form $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,dt$ darstellen la

---

[2]) Diese Darstellung der harmonischen Funktionen stammt im wesentlichen
Herrn Whittaker. Vgl. Fußnote [4]).

d bei festen t man f als eine Funktion einer komplexen Veränderlichen u rachten kann, so lassen sich die meisten funktiontheoretischen Betrachgen und Sätze auch beim Studium der dreidimensionalen harmonischen nktionen in dieser Weise verwerten.

In der vorliegenden Arbeit wurden nur spezielle Funktionen (s. oben) rachtet, infolgedessen gelangen wir nur zu bestimmten harmonischen nktionen, doch scheint diese Beschränkung nicht wesentlich zu sein; Betrachtungen werden sich wohl ohne prinzipielle Schwierigkeiten auf iebige Zugeordnete erweitern lassen.

Im § 1 definieren wir die Zuordnung. Auf Grund gewisser Eigenaften derselben läßt sich eine Kompositionsregel der harmonischen nktionen des R_3 definieren, die assoziativen, distributiven und kommuiven Charakter besitzt, das Kompositionsprodukt ist aber von der Wahl Koordinatennullpunktes abhängig. Nach gewissen einleitenden Berkungen im § 2 gehen wir im § 3 zur Untersuchung derjenigen harnischen Funktionen, die den rationalen Zugeordneten f entsprechen, r. Wir gelangen auf diese Weise zu eindeutigen harmonischen Funkhen, die höchstens in einzelnen Punkten oder auf geraden Strecken oder Kreisen Singularitäten aufweisen. In Anbetracht des Verhaltens in der gebung dieser Ausnahmepunktmengen bezeichnen wir diese Stellen als kt-, Linien- oder Kreispole. Schließlich leiten wir eine Beziehung schen gewissen Linienintegralen über geschlossene Kurven und der Entklung von F in der Umgebung der Pole ab. Diese Beziehung gewinnt n als dreidimensionale Deutung des Cauchyschen Residuensatzes. Ähne Betrachtungen führen wir im § 4 durch, indem wir als Zugeordnete f zweiwertigen Funktionen nehmen. Wir gelangen zu ein- oder zweitigen (in u) harmonischen Funktionen, die außer Polen nur bestimmte iensingularitäten haben können. In § 5 gehen wir zu den Integralen algebraischen Funktionen über. Es zeigt sich, daß die Integrale der iwertigen algebraischen Funktionen uns auf harmonische Funktionen en, die Analoga der zweidimensionalen hyperelliptischen Integrale sind. sind im erweiterten zweiblättrigen zerschnittenem Riemannschen me überall eindeutig und regulär, an den Rück- und Querflächen en sie gewisse Sprünge auf. Im § 6 der vorliegenden Arbeit werden enigen harmonischen Funktionen, die den Umkehrfunktionen der Abeln Integralen entsprechen, untersucht. Es zeigt sich, daß diese Funken eine große Ähnlichkeit mit den automorphen Funktionen besitzen. Gegensatz zu den letzten bleiben sie nicht unverändert beim Übergange einem Fundamentalgebiet zu dem anderen, sondern sie vermehren sich diesem Übergange um eine additive Funktion.

§ 1.

Die zugeordneten Funktionen.

Will man die zweidimensionalen harmonischen Funktionen untersuche so kann bekanntlich die Theorie dieser Funktionen auf die Theorie d analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen zurückgefüh werden. Im Gegensatz zu den harmonischen Funktionen, die eine linea Schar bilden, bilden die Funktionen einer komplexen Veränderlichen ein *Körper*. Dadurch entsteht die Möglichkeit einer Reihe von Beziehung zwischen den analytischen Funktionen aufstellen, wo auch von der Multip kation der einzelnen Funktionen Gebrauch gemacht wird. Will man zwisch den harmonischen Funktionen des R_3 die zu dem zweidimensionalen Fa analogen Betrachtungen durchführen, so liegt es sehr nahe, einen ähnlich Funktionenkörper zu konstruieren, auf den man die Gesamtheit der h monischen Funktionen des R_3 abbilden kann.

Um diese Betrachtung durchzuführen, werden wir jeder harmonisch Funktion eine bestimmte Klasse von Funktionen von vier Veränd lichen x, y, z, t zuordnen, aus denen die harmonische Funktion durch e passende Mittelwertbildung nach t zurückgewonnen werden kann. Die samtheit der Funktionen, die dieser zugeordneten Klasse gehören, bezeich wir als zugeordnete Funktionen, die wir jetzt näher definieren wollen. Se x, y, z die kartesischen Koordinaten des Raumes, also reelle Veränderli die von $-\infty$ bis $+\infty$ variieren, t ein reeller Parameter, der zwisc den Grenzen von 0 bis 2π variiert. Wir bezeichnen ferner mit u Ausdruck

$$(1) \qquad x + iy\cos t + iz\sin t = x + e^{it}\left(\frac{iy - z}{2}\right) + e^{-it}\left(\frac{iy + z}{2}\right),$$

mit u_0 den Ausdruck

$$x_0 + iy_0\cos t + iz_0\sin t.$$

Wir bezeichnen als eine zugeordnete Funktion f eine Funktion, sich in der Umgebung einer Regularitätsstelle in der Form

$$(2) \qquad \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{sk}(u - u_0)^s e^{ikt}$$

darstellen läßt, wo a_{sk} komplexe Konstanten sind.

Wir werden im folgenden die harmonischen Funktionen mit gro die zugeordneten mit kleinen Buchstaben bezeichnen.

---

[3]) Falls wir das Gegenteil ausdrücklich nicht hervorheben, werden wir harmonischen Funktionen – die Funktionen von der Form $U + iV$ verstehen, und V zwei reelle harmonische Funktionen sind.

Wir wollen nunmehr unser Zuordnungsprinzip erklären: Bildet man
n Mittelwert

$$F = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u, e^{it})\,dt,$$

erhält man, wie aus dieser Darstellung ersichtlich ist, eine harmonische
nktion. Man kann auf diese Weise alle in der Umgebung des Null-
nktes reguläre Funktionen erhalten und zwar unendlich oft. Die Funk-
nen f, die zu derselben Funktion F führen, fassen wir zu einer Klasse
ammen, die wir als die $F = U + iV$ zugeordnete Klasse bezeichnen.
und V sind dabei zwei (*voneinander vollständig unabhängige*) harmo-
che Funktionen des R_3.[4])

Umgekehrt sei $F = U + iV$ eine harmonische Funktion von der eben an-
gebenen Art, $P(x_0, y_0, z_0)$ ein regulärer Punkt von U und V, und bezeichnen
der Kürze halber $(R - R_0)$ mit R', $(u - u_0)$ mit u'. Dann lassen sich U
d V in genügend kleiner Umgebung nach Kugelfunktionen K_{nkc} entwickeln[5]).

[4]) Ich möchte bei dieser Gelegenheit bemerken, daß Herr E. T. Whittaker in
Arbeit On the partial differential equations of mathematical physics, Mathematische
nalen 57 (1903), S. 303—356, darauf hingewiesen hat, daß man das Funktions-
ment V einer harmonischen Funktion in der Form $V = \int_0^{2\pi} f(x + iy\cos t + iz\sin t, t)\,dt$
stellen kann.

[5]) Wir wollen folgende Bezeichnungen für die Kugelfunktionen wählen: (x, y, z)
euten die Kartesische, (R, Θ, φ) die Polarkoordinaten des Raumes, μ sei $\cos\Theta$.
(μ) sind die Kugelfunktionen einer Veränderlichen. Vgl. etwa Korn, Potential-
orie, Berlin 1899.

$$P_{nk}(\mu) = (\sqrt{1-\mu^2})^k \frac{d^k P_n(\mu)}{d\mu^k}.$$

reelle Kugelfunktionen bezeichnen wir die Ausdrücke

$$K_{nkc}(R, \Theta, \varphi) = \frac{\binom{n}{k}}{2^k \cdot 1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2k-1)\binom{n+k}{n-k}} \cdot R^n P_{nk}(\mu)\cos k\varphi,$$

$$K_{nks}(R, \Theta, \varphi) = \frac{\binom{n}{k}}{2^k \cdot 1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2k-1)\binom{n+k}{n-k}} \cdot R^n P_{nk}(\mu)\sin k\varphi.$$

komplexe Kugelfunktionen eines Vektors bezeichnen wir die Größen

$$\Phi_{nk} = K_{nkc} + iK_{nks}.$$

h der Laplaceschen Integraldarstellung ist

$$\Phi_{nk} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u^n e^{ikt}}{i^k}\,dt,$$

$$u = (x + iy\cos t + iz\sin t).$$

$$
\begin{aligned}
U &= a_0' + a_1' K_{10c} + a_2' K_{11c} + a_3' K_{11s} + a_4' K_{20c} + \cdots \\
&= a_0' + a_1'(R' \cos \Theta) + a_2'(R' \sin \Theta \cos \varphi) + a_3'(R' \sin \Theta \sin \varphi) \\
&\quad + a_4' \left[R'^2 \left(\cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right) \right] + \cdots, \qquad (4) \\
V &= a_0'' + a_1''(R' \cos \Theta) + a_2''(R' \sin \Theta \cos \varphi) + a_3''(R' \sin \Theta \sin \varphi) \\
&\quad + a_4'' \left[R'^2 \left(\cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right) \right] + \cdots
\end{aligned}
$$

und daraus

$$
\begin{aligned}
F &= U + iV = (a_0' + i a_0'') + (a_1' + i a_1'') R' \cos \vartheta \\
&\quad + \left(\frac{a_2' + a_3''}{2} + i \frac{a_2'' - a_3'}{2} \right) R' \cos \vartheta \, e^{i\varphi} + \left(\frac{a_2' - a_3'}{2} + i \frac{a_3' + a_2''}{2} \right) \\
&\quad R' \cos \vartheta \, e^{-i\varphi} + \cdots \qquad (5) \\
&= a_0 + a_1 \Phi_{1,0} + a_2 \Phi_{1,1} + a_3 \Phi_{1,-1} + \cdots \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a_0 + a_1 u + a_2 u e^{it} + a_3 u e^{-it} + a_4 u^2 + a_5 u^2 e^{it} + \cdots
\end{aligned}
$$

Wenn wir jetzt uns der Frage zuwenden, die Mannigfaltigkeit zugeordneten Klasse zu studieren, so kommt es wegen der Linearität Beziehung (3) offenbar darauf hinaus, *die Nullfunktionen* zu charakt sieren, d. h. diejenigen zugeordneten Funktionen, denen die harmonis Funktion 0 entspricht. Eine ganz einfache Überlegung zeigt, daß die N funktionen, die im Nullpunkte regulär sind, eine lineare Schar mit der B

$$u^s e^{ikt} \qquad (|k| < \qquad (6)$$

bilden. Die Beziehung (3) ist offenbar invariant gegenüber jeder re winkligen koordinaten Transformation, im Raume x, y, z. Insbesondere blei bei der Koordinatenverschiebung Nullfunktionen wieder Nullfunktionen

Bevor wir zu weiteren Überlegungen übergehen werden, wollen eine Folgerung aus unserer Zuordnung ziehen, die ein gewisses Inter hat. Wir werden zeigen, daß man eine Komposition der harmonis Funktionen des R_3 definieren kann, die einen kommutativen, assoziatiti und distributiven Charakter hat. Um dies zu erreichen, müssen wir f stellen, daß aus der Gesamtheit der im Nullpunkte zugeordneten regul Funktionen man einen Unterkörper ausgreifen kann, der sich *eineinde* auf die Gesamtheit der im Nullpunkte regulären harmonischen Funktio abbilden läßt. Wir werden diese Klasse von zugeordneten Funktionen *normierte in bezug auf den Nullpunkt* bezeichnen. Eine zugeordnete Fu tion heiße in bezug auf den Nullpunkt normiert, falls sie sich in der U gebung des Nullpunktes in der Form

$$\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=-s}^{s} a_{sk} u^s e^{ikt} \qquad (7)$$

rstellen läßt, wobei a_{sk} beliebige reelle oder komplexe Zahlen sind. Es klar, daß die Gesamtheit dieser Funktionselemente einen Körper bilden. r dürfen sie addieren, multiplizieren und dividieren. Diese letzte Ope- ion kann aber aus dem Bereich der im Nullpunkte regulären normierten nktionen herausführen, falls der erste Koeffizient des Divisors für einen ert von t $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ verschwindet. Es ist ferner klar, daß es nur n Normierung einer Funktion in bezug auf einen festen Punkt $P(x_0\, y_0\, z_0)$ sprechen hat, denn verschieben wir den Nullpunkt und führen wir neue ordinaten $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$, $z' = z - z_0$ ein, so geht das nor- erte Funktionselement $f(x, y, z)$ in ein anderes $f_1(x_1, y_1, z_1)$ über, wo ch Nullfunktionen auftreten.

Durch das in (4) angegebene Verfahren haben wir der Funktion F normierte Zugeordnete konstruiert. Es ist leicht einzusehen, daß die treffende harmonische Funktion nur dann verschwinden kann, wenn die ntlichen Koeffizienten in (5) verschwinden. Dann muß aber auch die geordnete Funktion identisch verschwinden.

Wir werden in weiterem die auf den Punkt P normierten zugeordneten nktionen mit φ_P bezeichnen, ferner werden wir zwei Funktionen $\varphi^{(1)}$ d $\varphi^{(2)}$, die denselben Harmonischen entsprechen, als kongruent modulo llfunktion bezeichnen.

Wir haben die Gesamtheit der im Nullpunkt der regulären harmo- chen Funktionen umkehrbar eindeutig auf die daselbst normierten Funk- nen abgebildet. Nun wissen wir, daß die Multiplikation der normierten nktionen nicht aus dem Bereich derselben herausführt. Indem wir das ltiplikationsgesetz auf die harmonischen Funktionen übertragen, gelangen r zu einem Kompositionsprinzip von harmonischen Funktionen.

Wir werden diese Komposition durch einen Stern $(*)$ kennzeichnen. ter Benutzung dieser Schreibweise gilt

$$F^{(1)} * F^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int^{2\pi} \varphi_P^{(1)} \varphi_P^{(2)}\, dt.$$

Wir wollen noch unsere Komposition unabhängig von der angegebenen bildung definieren und die Gesetze, denen sie unterworfen ist, besprechen.

Seien die Funktionselemente von F und G um den Nullpunkt, ent- ckelt nach Kugelfunktionen,

$$F = a_{00} + a_{10} \Phi_{10} + a_{1,1} \Phi_{1,1} + a_{1,-1} \Phi_{1,-1} + \cdots,$$
$$G = b_{00} + b_{10} \Phi_{10} + b_{1,1} \Phi_{1,1} + b_{1,-1} \Phi_{1,-1} + \cdots.$$

Unsere Komposition, wie aus (8) zu ersehen, ist kommutativ, assoziati und distributiv. Wir brauchen sie nur für je zwei Kugelfunktionen z definieren. Es ist

$$\Phi_{n,s} * \Phi_{n',s'} = \Phi_{n+n',s+s'}. \tag{10}$$

Damit ist unser Kompositionsprodukt vollständig auch im großen definier

Man kann nur von einer Komposition in bezug auf einen festen Punk sprechen, denn verschieben wir den Nullpunkt, entwickeln wir um de neuen Nullpunkt die Funktionen F und G in Potenzreihen und komponiere daselbst hinter miteinander, indem wir auf die in den neuen Koordinate geschriebenen Kugelfunktionen die Vorschrift (10) formal anwenden, so wir das auf diese Weise enthaltene Kompositionsprodukt von unserem ursprün lichen verschieden:

$$\begin{aligned} \varphi_P^{(1)} \varphi_P^{(2)} &= (\varphi_0^{(1)} + N_1)(\varphi_0^{(2)} + N_2) \\ &= \varphi_0^{(1)} \varphi_0^{(2)} + \varphi_0^{(1)} N_2 + \varphi_0^{(2)} N_1 + N_1 N_2. \end{aligned} \tag{11}$$

Die drei letzten Glieder sind im allgemeinen von 0 verschieden.

Sind in dem Funktionselement F in der Entwicklung (9) $a_{sk} = a'_{sk} =$ so sagen wir, daß F identisch verschwindet. Es ist leicht einzusehen, d das Kompositionsprodukt harmonischer Funktionen identisch verschwind dann und nur dann, wenn mindestens ein Faktor identisch verschwind

Ich möchte noch folgendes bemerken. Eine Funktion F ist vollkomm bestimmt durch die Koeffizienten ihrer Reihenentwicklung, die wir als Ko ponenten eines Vektors im Raume von unendlich vielen Dimensionen a fassen können. Der Addition der Funktionen entspricht die Addition d Vektoren (Addition der Koordinaten). Unsere Funktionen bilden also ei lineare Mannigfaltigkeit. Man überlegt sich weiter leicht, daß bei der Ko position der Funktionen mit dem Koeffizienten a'_{sk} und a''_{sk} eine Funkti entsteht mit Koeffizienten a_{sk}, die sich bilinear durch a'_{sk} und a''_{sk} a drücken läßt. Man kann also unsere Kompositionsregel als eine Multip kation von komplexen Zahlen mit unendlich vielen Einheiten betrachten.

§ 2.

Der Zusammenhang zwischen der Theorie der harmonischen Funktion und der Theorie der zugeordneten Funktionen.

Bevor ich zum eigentlichen Gegenstand unserer Untersuchung (I trachtung der ein- und zweideutigen Funktionen) übergehe, möchte noch kurz auf die Wechselbeziehung zwischen der Theorie der zugeordne und harmonischen Funktionen eingehen. Es ist sofort klar, daß die V

erliche u (gegenüber t) eine besondere Stellung einnimmt. Es reduziert die Theorie der harmonischen Funktionen des R_3 auf die Theorie von ktionen einer komplexen Veränderlichen u. Infolge des auftretenden ameters t und der Integration, die wir ausführen müssen, um zu den nonischen Funktionen zu gelangen, tauchen hier gewisse Schwierigen und Unterschiede gegenüber dem zweidimensionalen Fall auf, die jetzt besprechen wollen.

1. Die durch die Beziehung $F = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,dt$ ((3) in § 1) haben wir festellt, daß zwischen der harmonischen Funktion F und der zugeordneten n Zusammenhang im Kleinen existiert. Es ist natürlich leicht, ihn ins ße zu übertragen. Wir nennen f für einen bestimmten Punkt $P(x, y, z)$ lär, wenn die ganze einparametrige Schar $[0 \leqq t \leqq 2\pi]$ von Funken $f[(x + iy\cos t + iz\sin t), e^{it}]$ an der Stelle x, y, z sich regulär hält in den Veränderlichen x, y, z. Nehmen wir nun eine Kurve im gularitätsgebiete" der Funktion $f: x = x(s),\ y = y(s),\ z = z(s)$, so lt man durch Zuordnung einer harmonischen Funktion F deren Funkselemente längs der Kurve durch analytische Fortsetzung auseinander orgehen.

Was geschieht aber, wenn ein bestimmtes t eine Singularität aufweist? werden in unserer Arbeit mit Funktionen $f[(x + iy\cos t + iz\sin t), e^{it}]$ tun haben, die einen speziellen Charakter besitzen. Sie werden sich in Form $h(u)\,p(e^{it})$ darstellen lassen, wo h eine rationale oder algebrae zweiwertige Funktion von u *allein* ist, $p(e^{it})$ ein Polynom von e^{it} n. Wir beschränken unsere Überlegungen schon jetzt auf Funktionen er Art. Es kommen dann als Singularitäten nur Pole oder Verzweigungskte von f in Betracht. Die zusammenhängenden Gebiete, wo $f(u, e^{it})$ lär bleibt, bilden Raumschichten, die durch Ebenen $x =$ konst. getrennt : Denn ist für einen bestimmten Wert $(X + iY)$, $f(X + iY)$ singulär, äßt sich zu jedem (y, z) ein t derart bestimmen, daß $y\cos t + z\sin t = Y$ l. Die Ebene $x = X$ ist demnach eine „Singularitätenebene". Die effenden Raumschichten $G_k (k = 1, 2, \ldots, m)$, die von den benachbarten gularitätenebenen begrenzt sind; wo somit f regulär ist und demnach Funktion F_k die Darstellung $F_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,dt$ zuläßt, bezeichnen wir als rdnungsgebiet G_k von F_k. Indem wir die harmonische Funktion anach fortsetzen, gelingt uns F_k in dem ganzen Raume mit Ausnahme isser ein- und zweidimensionalen Mengen zu definieren. Führen wir Integration über t für einen Punkt, der in einer anderen Raumschichte

G_{k+1} liegt, durch, setzen wir die auf diese Weise erhaltene Funktion F_{k+1} dem ganzen Raum analytisch fort, so gelangen wir zu einer neuen Fu tion F_{k+1}, die von F_k verschieden ist. Den Unterschied zwischen beid $F_{k+1} - F_k$ bezeichnen wir mit $\eta(x, y, z)$. $\eta(x, y, z)$ ist offenbar Sprung, den das Integral über den kritischen Teil von f beim Überg durch die betreffende Singularitätenebene erleidet.

Zusammenfassend: Ist uns somit eine Funktion f gegeben, so w sie uns Veranlassung bieten zur Bildung einer Anzahl m von harmonisch Funktionen: wir stellen die Regularitätsgebiete G_k von f im Raume $(x, y$ auf; indem wir über je einen inneren Punkt von G_k integrieren, gelan wir zu m verschiedenen harmonischen Funktionen $F_1, F_2, \ldots, F_m$, denen jede die Eigenschaft besitzt, sich in G_k in der Form

$$F_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,dt \tag{1}$$

darstellen zu lassen.

2. In der Funktionentheorie betrachtet man stets ein paar harmonis Funktionen, die durch die Cauchy-Riemannschen Gleichungen verbun sind. Wir werden im Dreidimensionalen zu jeder Funktion F zwei an F^* und F^{**} bilden, die eine ähnliche Rolle wie die konjugierten in zweidimensionalen Potentialtheorie spielen. Ist $F = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,dt$, so wer wir als die Funktion $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\cos t\,dt$ als F^*, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\sin t\,dt$ als F^{**} nieren. Zwischen F, F^* und F^{**} bestehen folgende Relationen:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = i\frac{\partial F^*}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = i\frac{\partial F^{**}}{\partial x}, \quad \frac{\partial F^*}{\partial z} = \frac{\partial F^{**}}{\partial y}. \tag{2}$$

Ist F gegeben, so ist F^* nur bis auf eine Funktion von (yz) bestim F^{**} dagegen ist eindeutig durch F und F^* bestimmt. Es soll noch zeigt werden, wie die Funktionen F^*, F^{**} und deren ähnliche mit Zugeordneten zusammenhängen: Bezeichnet man mit $K(F) = F^* + i$ und ähnlich $K^{-1}(F) = F^* - i F^{**}$, so wird durch die Gesamtheit Funktionen $K^{(s)}(F)$ $(s = 0, 1, -1, \ldots)$ die Zugeordnete f eindeutig stimmt.

Es sei schließlich hervorgehoben, daß $(F dx + i F^* dy + i F^{**}$ ein vollständiges Differential ist.

3. Im zweidimensionalen Falle kann man zu den Polen der ha nischen Funktion des R_3 gelangen, indem man den Funktionen $C z^s$ $(s$

ativ) entsprechende harmonische Funktionen bildet. Ein ähnliches Ver-
ren werden wir im Dreidimensionalen benutzen. Wir werden von der
ktion $C(u-A)^s$ (s ganz negativ, A eine Konstante) ausgehen und
entsprechenden harmonischen Funktionen aufstellen. Während aber im
idimensionalen c eine Konstante ist, ist im dreidimensionalen Falle

$$C = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} a_k e^{ikt}$$

beliebige Fourierreihe mit komplexen Koeffizienten (a_k); mit a. W.:
rend es im Zweidimensionalen nur einen Pol mit bestimmter Ordnung
, gibt es hier eine Menge von entsprechenden Funktionen, die von
ählbar vielen Parametern (a_k) abhängen. Was die Konstante A an-
rifft, so werden wir zwei Fälle unterscheiden: $A=0$ und $A=i$. Man
n stets durch entsprechende Koordinatenverschiebung und Veränderung
Maßstabes erzielen, daß A einen dieser beiden Werte annimmt. (Ist
$=A'+A''i$, so führen wir zuerst die Transformation $x'=x-A'$,
$=y$, $z'=z$, und ev. eine Ähnlichkeitstransformation falls A'' von Null
schieden ist.) Im nächsten Paragraphen werden wir sehen, daß wir
$\int C(u-A)^s$ Funktionen bekommen, die längs einer Geraden oder eines
ises oder im Nullpunkte wie R^s im Nullpunkte unendlich sind und
st in dem ganzen Raume sich regulär verhalten.

Ich bemerke noch, daß wir uns über die Singularitäten der harmoni-
n Funktionen im Raume in der Weise orientieren werden, daß wir
Niveauflächen der harmonischen Funktionen studieren.

§ 3.

Rationale harmonische Funktionen.

Wie wir im vorigen Paragraph angedeutet haben, werden wir in un-
r Arbeit nur diejenigen harmonischen Funktionen untersuchen, die sich
dem Zuordnungsgebiete in der Form $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)p(e^{it})\,dt$ stellen lassen,
$f(u)$ eine Funktion von u *allein*, $p(e^{it})$ ein Polynom in e^{it} allein ist.
handelt sich um eine Spezialisierung, die wir der Einfachheit der Dar-
lung halber vorgenommen haben. Prinzipiell neue Schwierigkeiten werden
l im allgemeinen Falle nicht hinzukommen. Ist f eine rationale Funk-
, so läßt sie sich in der Form $\Sigma c_p(u-a_p)^s$ darstellen, wo s ganze,
nd c_p komplexe Zahlen sind. Wir brauchen somit nur das Verhalten
Funktionen von der Form $\frac{1}{2\pi}\int (u-a_p)^s e^{ikt}\,dt$ (s, k ganz) zu

betrachten. Diese Überlegungen werden uns erstens zeigen, wie die erhalten harmonischen Funktionen F sich im kleinen in der Umgebung eines reg lären oder singulären Punktes verhalten, und zweitens werden uns di

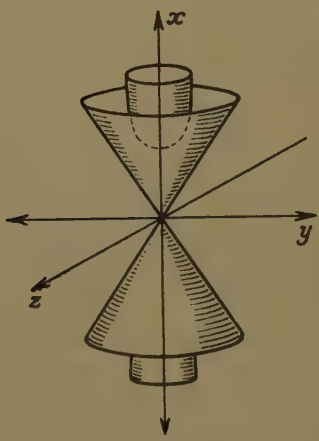


Fig. 1.

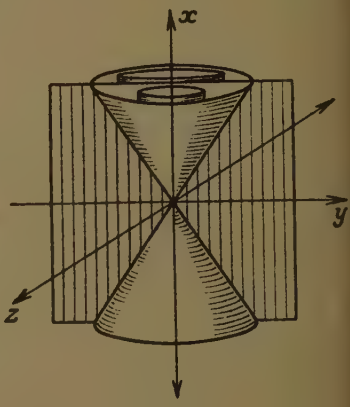


Fig. 2.

Überlegungen die Möglichkeit geben, die harmonischen Funktionen über Zuordnungsraum analytisch fortzusetzen. Wir gehen zur Untersuchung

$$F = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (u-a)^s e^{ikt}\, dt \tag{1}$$

über.

1. Der Fall: s größer wie 1, liefern uns die Kugelfunktionen in ei bestimmten Normierung. Wir brauchen nur den Fall $k \leqq s$ zu betracht ist dies nicht der Fall, so liefern uns die Ausdrücke (1) die Nullfunktion Der Verlauf der Niveauflächen im Nullpunkte ist am besten aus den Fi und 2 zu ersehen. In diesen Zeichnungen wurden einige der Fläc $V(x, y, z) = 0$ stärker ausgezogen. Ist $k = 0$, so sieht man, daß d Flächen s Kegelmäntel mit der Spitze im Null- und x-Achse als Ac bilden. Im Falle $|k| > 0$ treten als Flächen $V(x, y, z) = 0$ außer Kegelmäntel noch Ebenen, die die x-Achse enthalten, in der Weise auf, in der Fig. 2 angegeben ist. Einige Niveauflächen $V =$ konst. wurden der Fig. 2 skizziert. Den Verlauf der übrigen kann man sich klarmach alle diese Flächen gehen, ohne sie zu schneiden, ins Unendliche. Der F daß a gleich i ist, liefert uns im wesentlichen dieselben Funktionen.

2. Ist in (1) s kleiner wie 0, $a = 0$, so gelangen wir zu Singul täten, die wir als Pole bezeichnen, denn die Funktion wird im Nullpun

R^s ($R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) unendlich[6]). Es ist dabei zu bemerken, daß yz-Ebene eine Singularitätsebene (in unserem Sinne vgl. § 2, 1) der geordneten Funktion ist. Die Integration über t liefert uns im allgemeinen, je nachdem der Punkt x, y, z oberhalb oder unterhalb der yz-Ebene liegt, zwei verschiedene harmonische Funktionen, die wir über yz-Ebene analytisch fortsetzen können. Für die Klassifikation dieser Singularitäten werden wir zwei Fälle unterscheiden: $|k| < s$ und $|k| \geqq s$. Im ersten Falle ergibt die Integration

(bei $x > 0$)

$$F_1 = \frac{\Phi_{sk}(x, y, z)}{R^{2s+1}} = (V + iW)\ ^7)$$

(bei $x < 0$)

$$F_2 = -\frac{\Phi_{sk}(x, y, z)}{R^{2s+1}}$$

Wir gelangen somit zu Singularitäten, die nur im Nullpunkte von s Ordnung unendlich sind. Die Niveauflächen $V =$ konst. kann man leicht konstruieren. Die Flächen $V = 0$ (bzw. $W = 0$) sind durch $\Phi_{s,k,cs}(x, y, z) = 0$ [bzw. $K_{s,k,sn}(x, y, z) = 0$] gegeben. Sie sind somit dieselben, wie in den Fällen 1 und 2. Es sind das die einzigen Flächen, die ins Unendliche gehen. Die anderen Flächen $V =$ konst. stellen im allgemeinen im Endlichen geschlossene Flächen, die alle eine gemeinsame Spitze in $x = y = z = 0$ haben. In Fig. 3 wurde eine Fläche $V =$ konst. skizziert. Der Sprung $\Phi(x, y, z)$, den $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^s e^{ikt}\,dt$ in diesem Falle erleidet, falls wir vom oberen Halbraum ins untere übergehen, ist gleich $-\frac{2\Phi_{sk}(x, y, z)}{R^{2s+1}}$.

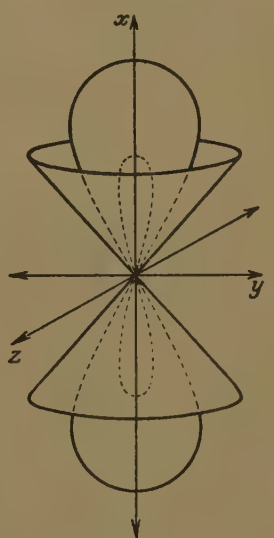


Fig. 3.

Mit Benutzung der in § 3 (III) erklärten Definition ist der obere Halbraum das Zuordnungsgebiet G_1 (von F_1), der untere $-G_2$, und die Ebene $x = 0$, die Singularitätenebene von $f = u^s e^{ikt}$. Ist in (1) $|k| \geqq s$, so gelangen wir zu Singularitäten, die wir als Linienpole bezeichnen. Eine einfache Rechnung zeigt, daß diese Ausdrücke sich immer explizite integrieren lassen. Die Integration liefert uns, je nachdem wir oberhalb oder unterhalb

[6]) Vgl. Fußnote [5]).

[7]) Die Größe k in (1) bezeichnen wir im Falle eines Poles als *Index* des Poles.

der yz-Ebene integrieren, zwei verschiedene Funktionen, die sich aber leic über den Zuordnungsraum fortsetzen lassen. Integrieren wir für einen Pun im oberen Halbraum, so gelangen wir zu Funktionen, die überall im ober Halbraum regulär sind und unendlich werden von s-ter Ordnung, we wir gegen den Nullpunkt gehen. Im unteren Halbraum werden sie singul längs der ganzen x-Achse, an der sich sämtliche Niveauflächen schneide Den Verlauf dieser Funktionen werden uns am besten einzelne Beispie illustrieren. Für $s = 1$ (in 2) erhalten wir Pole erster Ordnung.

$$F = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ikt}}{u}\, dt,$$

$$F_1 = + \frac{(\cos k\varphi - i \sin k\varphi)\, \mathrm{tg}\, \frac{k\vartheta}{2}}{R}, \tag{3}$$

$$F_2 = - \frac{(\cos k\varphi - i \sin k\varphi)\, \mathrm{tg}\, \frac{k\vartheta}{2}}{R}.$$

Die Niveauflächen des reellen Teiles dieser Funktion (für $k = 1$) sind der Fig. 4 angegeben. Der Schnitt der Niveauflächen mit der yx-Ebe zeigt die Fig. 5. Auf der rechten Se der yx-Ebene nimmt die Funktion posiiven, auf der linken die negativ Werte an. Die Ebene $y = 0$ ist die Nives fläche $V(x, y, z) = 0$. Bei $s = +$ $|k| > 1$ erhalten wir an Stelle von zw Scharen $2k$ Scharen von Flächen äh licher Art.

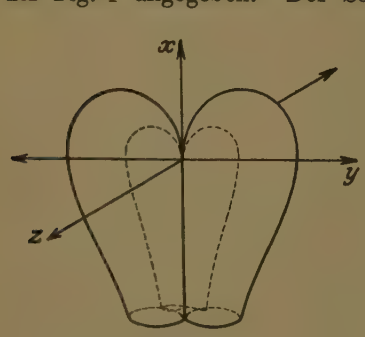


Fig. 4.

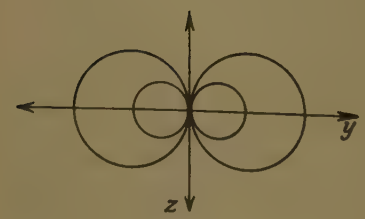


Fig. 5.

Der Sprung $\eta(x, y, z)$, den $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ikt}}{u}$ beim Übergange von den oberen Ha raum (G_1) in den unteren (G_2) erleid ist gleich

$$-2\frac{(\cos k\varphi - i \sin k\varphi)\, \mathrm{tg}\, \frac{k\vartheta}{2}}{R}.$$

Das Verhalten und die Niveauflächen Funktion (1) für $s < 1$, $|k| \geqq |s|$ wei ähnlichen Charakter auf wie für $s =$ Wir gehen auf diese Funktionen hier nicht näher ein.

Wir müssen schließlich den Fall erledigen, daß in (1) $s<0$, $a=i$ Ist in (1) $s=1$, $a=i$, so ergibt uns die Integration über t

$$\frac{1}{(x+i)}\frac{2\pi(1+x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^2-(y+ixy)^2-(z+ixz)^2}}$$

$$\cdot\left\{\frac{(y-z)-i(y+z)}{(1+x^2)+\sqrt{(1+x^2)^2-(y+ixy)^2-(z+ixz)^2}}\right\}^k.$$

Für $|s|>1$, $a=i$ wird uns (1) durch entsprechende Ableitungen (4) gegeben. (4) ist eine Funk-, die längs des Einheitskreises in Ebene $x=0$ wie $\frac{1}{R}$ im Nullpunkte ndlich wird, sonst ist sie überall regu- Das Zuordnungsgebiet G ist der ze Raum mit Ausnahme des ange- enen Einheitskreises.

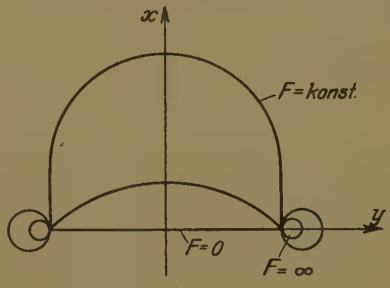


Fig. 6.

Für $k=0$ erhalten wir eine axial mmetrische Funktion. Die Schnitte der eauflächen (Rotationskörper) mit der chse als Achse des reellen und imaginären Teiles (wie man in diesem le auch in der Form

$$\frac{\sqrt{2\pi}\left\{\sqrt{\sqrt{1+R^4+2R^2\cos 2\vartheta}-(1-R^2)}-i\sqrt{\sqrt{1+R^4+2R^2\cos 2\vartheta}+(1-R^2)}\right\}}{\sqrt{1+R^4+2R^2\cos 2\vartheta}}$$

reiben kann), sind in der Fig. 6 angegeben.

Bei der Betrachtung der Linienpole haben wir gesehen, daß unsere ktionen nur längs der x-Achse singulär werden. Dies könnte den Anschein ecken, daß unsere Zuordnung auch in *dieser Hinsicht* ausgezeichnet Um zu zeigen, daß dies keineswegs der Fall ist, werden wir die- gen harmonischen Funktionen bilden, deren Zugeordnete von der Form $\frac{e^{ikt}}{-i\varrho\cos(\psi+t)]^s\,[x+ir\cos(\varphi+t)]^{s'}}$ ist, wobei A, ϱ, x, $r=\sqrt{y^2+z^2}$ reelle len sind. R, ϑ, φ sind dabei die Polarkoordinaten für den laufenden kt $\sqrt{A^2+\varrho^2}$, Θ, ψ sind die Polarkoordinaten für einen anderen (festen) kt. Es ist nur nötig, den Fall $s=s'=-1$, $k=0$ zu betrachten. Die sprechenden harmonischen Funktionen für andere s, s', k lassen sich als are Verbindungen der Differenzquotienten der ursprünglichen Verbin- gen darstellen.

Ersichtlicherweise brauchen wir nur für positive A die Integrat durchzuführen. Wir erhalten dann zwei Funktionen

$$(5) \qquad F_1 = \frac{2\pi}{R\sqrt{A^2+\varrho^2}} \left| \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\vartheta}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\Theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\vartheta}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\Theta}{2}-2\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}\cos(\varphi+\psi)} \right|$$

und

$$(6) \qquad F_2 = \frac{2\pi}{R\sqrt{A^2+\varrho^2}} \left| \frac{1-\operatorname{ctg}^2\frac{\vartheta}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\Theta}{2}}{1+\operatorname{ctg}^2\frac{\vartheta}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\Theta}{2}-2\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}\cos(\varphi+\psi)} \right|,$$

je nachdem wir die Integration für einen Punkt des oberen Halbraumes (oder des unteren (G_2) durchführen.

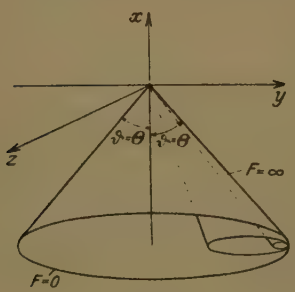


Fig. 7.

Die erste dieser Funktionen wird lä eines Strahles, die mit der y, z- und x, z-Eb die Winkel ϑ, ψ bildet, singulär, sie ist unendlich von erster Ordnung und ist überall regulär. In Fig. 7 haben wir die Nive linie $V =$ konst. zusammengestellt. Die Nive linien für (6) verlaufen ähnlich mit dem Un schiede, daß die singuläre Linie von dem N punkte nicht von unten, sondern nach geht.

Durch vorhergegangene Diskussion haben wir festgestellt, daß Zugeordneten $f(u)e^{ikt}$ [8]) eine im ganzen Raume eindeutige Funktion spricht. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß F in der Form $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)e^{ikt}dt$ darstellen läßt, ist die:

1. daß es einen von zwei der yz-Ebene parallelen Ebenen begren Raum gibt, wo F_k regulär ist (dies ist der Zuordnungsraum G_k von

2. daß sämtliche seiner Pole bzw. die Mittelpunkte der Polkreise der x-Achse liegen und alle denselben Index haben;

3. daß sämtliche Linienpole oberhalb von G nach oben, unter von G nach unten laufen;

4. daß, wenn die kritischen Teile aller im Endlichen liegenden Lin pole weggelassen werden, der übrig bleibende Teil im Unendlichen weder regulär oder höchstens Punktpole aufweist.

[8]) $f(u)$ ist wiederum eine nur von u abhängige rationale Funktion.

Auf ähnliche Weise läßt es sich feststellen, daß die Funktion F_k sich der Form $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\,p(e^{it})\,dt$ darstellen läßt; doch wollen wir darauf nicht näher eingehen.

Für alle diese Funktionen lassen sich die meistens funktionstheoretischen ze dreidimensional deuten. Wir werden hier nur auf die Übertragung Cauchyschen Residuensatzes eingehen.

Sei uns die Funktion $F=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{ikt})\,dt$ *gegeben und es seien* $0, 0), (x_2, 0, 0), \ldots, (x_n, 0, 0)$ *diejenigen Punkte auf der x-Achse, sich entweder die Punktpole selbst r die Mittelpunkte der Kreispole be- den oder aber die Linienpole befinden, bezeichnen diese Punkte mit* P_ν.

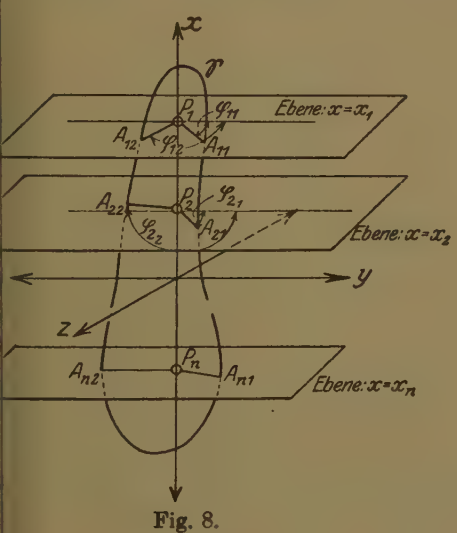


Fig. 8.

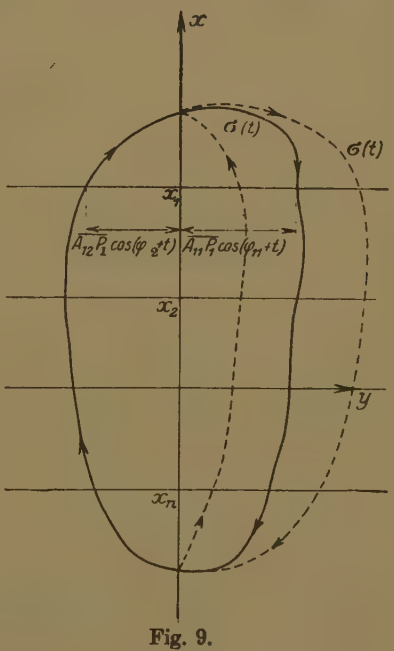


Fig. 9.

eien ferner $F_1, F_2, \ldots, F_m$ *alle anderen Funktionen, die sich in der n* $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\,p(e^{it})\,dt$ *darstellen lassen, und zwar läßt* F_k *in* G_k *die stellung*

$$F_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{A_k^{(1)}}{u}+\frac{A_k^{(2)}}{u^2}+\ldots+\frac{A_k^{(n)}}{u^n}+g(u)\right]\cdot p(e^{ikt})\,dt$$

($A_k^{(\varrho)}$-*Konstanten*, $g(u)$ — *reguläre in* g_k *Funktion*),

sei schließlich $\mathfrak{S}$ eine Jordankurve im Raume, die einige der Eben
$x = x_\nu$ *etwa die Ebenen* $x = x_1$, $x = x_2, \ldots, x = x_\varrho$ *(jede genau zweim*
schneidet. Wir bezeichnen diese Schnittpunkte mit $A_{\nu 1}$ *und* $A_{\nu 2}$ *und mit* φ
(bzw. mit $\varphi_{\nu 2}$*) den Winkel, den die Gerade* $A_{\nu 1} P_\nu$ *(bzw.* $A_{\nu 2} P_\nu$*) mit d*
xy*-Ebene bildet. Sind* F^* *und* F^{**} *die in § 2, Punkt 2 angeführt*
Funktionen, so ist

$$(8)\quad \Big[\int_{A_{12}}^{A_{11}}(F_1\,dx + iF_1^*\,dy + iF_1^{**}\,dz) + \int_{A_{11}}^{A_{21}}(F_2\,dx + iF_2^*\,dy + iF_2^{**}\,dz)$$
$$+\int_{A_{21}}^{A_{22}}(F_3\,dx + iF_3^*\,dy + iF_3^{**}\,dz) + \ldots + \int_{A_{\varrho 2}}^{A_{\varrho 2}}(F_{\varrho+1}\,dx + iF_{\varrho+1}^*\,dy + iF_{\varrho+1}^{**}$$
$$+\int_{A_{(\varrho-1)2}}^{A_{\varrho 2}}(F_\varrho\,dx + iF_\varrho^*\,dy + iF_\varrho^{**}\,dz) + \ldots + \int_{A_{22}}^{A_{12}}(F_2\,dx + iF_2^*\,dy + iF_2^{**}\,dz)\Big]$$
$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{k=\varrho} A_k^{(1)}\Big[\int_{\frac{\pi}{2}-\varphi_{\nu_1}}^{\frac{\pi}{2}-\varphi_{\nu_2}} p\,dt - \int_{\frac{3\pi}{2}-\varphi_{\nu_1}}^{\frac{3\pi}{2}-\varphi_{\nu_2}} p\,dt\Big]$$

Bemerkung. Da nach unserer früheren Annahme p ein Polyn
in e^{it} ist, läßt sich auch $\int p\,dt$ leicht explicite auswerten.

Beweis. Nach den Formeln, die in § 2 Punkt 2 angegeben sind,
der linksstehende Ausdruck in (8) nichts anderes wie

$$(9)\quad \int_{\mathfrak{S}}\Big[\int_0^{2\pi}(f p\,dt)\,dx + i\int_0^{2\pi}(f p\cos t\,dt)\,dy + i\int_0^{2\pi}(f p\sin t\,dt)\,dz\Big].$$

Wir wollen zuerst zeigen, daß man in (9) die Integrationsfolge umkeh
darf. x, y, z sei ein beliebiger Punkt der Integrationskurve, die etwa
einem Parameter τ $(0 \leqq \tau \leqq 2\pi)$ bezogen seien. $f(u)p(e^{it})$ ist jetzt
der Kurve $\mathfrak{S}$ einer Funktion von t und τ, die überall in dem Qua
$0 \leqq t \leqq 2\pi$, $0 \leqq \tau \leqq 2\pi$ bis nur auf die 4ϱ (ϱ Anzahl der Ebene, $x =$
die $\mathfrak{S}$ schneidet), regulär ist. Wir bilden in (9) die Funktionen F_1, F_2, F
(Integration nach t) und erhalten unseren Formeln entsprechend eine F
tion von τ, die abteilungsweise stetig und in den Ausnahmepunkten τ_k be
seitige Grenzwerte hat. Nun führen wir mit dieser Funktion in (9)
Integration nach τ. Man sieht sofort ein, daß man die Integrations
in (9) vertauschen kann; denn die Integration nach τ führt nach
Cauchyschen Residuensatz zu einer Funktion von t, die abteilungsw
2π und -2π oder überall 0 ist. Es ist also

$$\int_{\mathfrak{S}}\Big[\int_0^{2\pi}(f p\,dt)\,dx + i\int_0^{2\pi}(f p\cos t\,dt)\,dy + i\int_0^{2\pi}(f p\cos t\,dt)\,dz\Big]$$
$$= \int_0^{2\pi}\Big[\int_{\mathfrak{S}} f p(dx + i\cos t\,dy + i\sin t\,dz)\Big]\,dt = \int_0^{2\pi}\Big(\int_{\mathfrak{S}} f p\,du\Big)\,dt.$$

ı das Integral rechts auszuwerten, verfährt man folgendermaßen. Läßt n x, y, z bei festem t die Kurve $\mathfrak{S}$ durchlaufen, so beschreibt der Punkt $= x$, $Y = y\cos t + z\sin t$ in der komplexen Ebene $X + iY$ eine vom ameter t abhängige Kurve $\sigma(t)$, die sich mit t stetig deformiert. Die nittpunkte der Kurve $\sigma(t)$ mit der X-Achse befinden sich in der Entnung $\overline{A_{\nu 1} P_\nu}\cos(\varphi_{\nu 1} + t)$ [bzw. $\overline{A_{\nu 2} P_\nu}\cos(\varphi_{\nu 2} + t)$]. Der Punkt p_ν mit Koordinaten $X = a_\nu$, $Y = 0$ (wo f einen Pol besitzt), befindet sich $\frac{\pi}{2} - \varphi_{\nu 2} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2} - \varphi_{\nu 1}$ und für $\frac{3\pi}{2} - \varphi_{\nu 2} \leqq t \leqq \frac{3\pi}{2} - \varphi_{\nu 1}$ innerhalb $\sigma(t)$, wobei in beiden Fällen $\sigma(t)$ den entgegengesetzten Umlaufssinn . Für alle andere Werte von t befindet sich p_ν außerhalb des von) begrenzten Gebietes.

$\int_0^{2\pi}[\int_{\mathfrak{S}}(f p\, du)]\, dt$ ist somit gleich

$$\sum \int_{\frac{\pi}{2}-\varphi_{\nu 1}}^{\frac{\pi}{2}-\varphi_{\nu 2}} [p(\text{Residuum von } f)\, dt - \int_{\frac{3\pi}{2}-\varphi_{\nu 1}}^{\frac{3\pi}{2}-\varphi_{\nu 2}} p\,(\text{Residuum von } f)\, dt],$$

aus man die Beziehung (8) erhält.

§ 4.

Algebraische Funktionen.

Unter einer algebraischen Funktion F werden wir eine harmonische ktion des R_3 verstehen, deren eine Zugeordnete einer algebraischen chung

$$p_0(u, e^{i\frac{t}{n}})\, f^n + p_1(u, e^{i\frac{t}{n}})\, f^{n-1} + \ldots + p_n(u, e^{i\frac{t}{n}}) = 0$$

igt, deren Koeffizienten Polynome in u und $e^{i\frac{t}{n}}$ sind. Wir werden in vorliegenden Arbeit unsere Betrachtungen auf Funktionen F beschränderen Zugeordnete einer Gleichung von der Form

$$f^2 - R(u)\, p^2(e^{i\frac{t}{2}}) = 0$$

igt, wo R eine rationale Funktion von u allein, p ein Polynom in $(e^{i\frac{t}{2}})$ Für F erhält man hier die Darstellung

$$F = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{A}}{B}\, p(e^{i\frac{t}{2}})\, dt,$$

A und B Polynome in u sind. Der Kürze halber werden wir nur e wichtige Spezialfälle untersuchen.

Indem wir den im vorliegenden Kapitel den für rationale Funktione eingeschlagenen Weg von neuem betreten, gehen wir zur Untersuchung d Verhaltens der Funktion

$$F = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (u-a)^{s/2} e^{i\frac{k}{2}t}\, dt, \tag{4}$$

wo s eine ungerade ganze Zahl, k eine ganze Zahl ist; was a anbetrif so brauchen wir wie früher nur zwei Möglichkeiten in Betracht zu ziehe a gleich 0 oder gleich i.

Bei unserer Diskussion werden wir zwei Fälle unterscheiden: 1. k ei ungerade und 2. k eine gerade Zahl.

Ist k in (4) ungerade, $a = 0$, so liefert uns die Integration von (4 je nachdem bei der Integration $x > 0\,(G_1)$ oder $x < 0\,(G_2)$, zwei Fun tionen F_1 und F_2, die man in den ganzen Raum hinein analytisch fo setzen kann. Es zeigt sich aber dabei, daß F_1 und F_2 zwei verschiede Zweige einer zweiwertigen harmonischen Funktion F sind. Die z-Ach ist die Verzweigungslinie dieser Funktion. Den Verlauf der Niveaufläch unserer Funktionen werden wir an Hand von Beispielen studieren.

Für $s = -1$, $k = 1$ ergibt (4)

$$F = -\frac{1}{\sqrt{iy-z}} \ln\left[\frac{x+iy+z+\sqrt{2\,(iy+z)\,(x+iy)}}{R}\right]; \tag{5}$$

für $s = -1$, $k = 5$

$$F = \frac{4}{iy+z}\sqrt{x+iy} - \frac{4}{(iy+z)\sqrt{iy-z}} \ln\left[\frac{x+z+iy+\sqrt{2\,(iy+z)\,(x+iy}}{R}\right. \tag{6}$$

für $s = 1$, $k = 1$

$$F = \frac{1}{2}\left(\frac{x+z+iy}{z+iy}\right)\sqrt{x+iy} - \frac{R^2}{iy+z}\frac{2}{\sqrt{iy+z}} \ln\left[\frac{x+z+iy+\sqrt{2\,(iy+z)\,(x}}{R}\right. \tag{7}$$

---

[9]) Man kommt folgendermaßen zu dieser Formel:

$$\int_0^{2\pi} u^{s/2} e^{i\frac{k}{2}t}\, dt = \int_0^{2\pi} \left(x + iy\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} - z\frac{e^{it}-e^{-it}}{2}\right)^{s/2} e^{i\frac{k}{2}t}\, dt.$$

Setzt man $e^{-it} = \varrho$, so erhält man weiter, da $de^{-it} = dt \cdot e^{-it} \cdot (-i)$ ist,

$$-i\int_{\varrho} \left[x + e^{it}\left(\frac{iy-z}{2}\right) + e^{-it}\left(\frac{iy+z}{2}\right)\right]^{s/2} e^{it\frac{k}{2}}\, de^{-it} \cdot e^{it}$$

$$= i\left(\frac{iy+z}{2}\right)^{s/2}\left[\int \frac{\left[\frac{2x}{iy+z}\varrho + \left(\frac{iy-z}{iy+z}\right) + \varrho^2\right]^{s/2}}{\varrho^{s/2}} \varrho^{k/2}\varrho^{-1}\, d\varrho\right]$$

$$= i\left(\frac{iy+z}{2}\right)^{s/2}\int \left[\varrho^2 + \frac{2x}{iy+z} + \frac{iy-z}{iy+z}\right]^{s/2} \varrho^{-(s/2+k/2+1)}\, d\varrho.$$

Fortsetzung der Fußnote [9]) auf nächster Seit

Ist in (4) $k = 0$ oder einer geraden Zahl, $a = 0$, so gibt

$$F = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^{s/2} e^{i\frac{k}{2}t} dt$$

i eindeutige harmonische Funktionen. Im Falle $k = 0$ liefert uns F, nachdem wir über einen Punkt im oberen Halbraum (G_1) oder unterem lbraum (G_2) integrieren,

$$F_1 = R^{s/2} h\left[-\frac{s}{2}, 1+\frac{s}{2}, 1, \frac{R-x}{2R}\right],$$

$$F_2 = R^{s/2} h\left[-\frac{s}{2}, 1+\frac{s}{2}, 1, \frac{R+x}{2R}\right],$$

h die hypergeometrische Reihe ist[10]). Die Funktionen F für $k > 0$ den lineare Kombinationen der Ableitungen der Funktionen (8), also ktionen, die wesentlich denselben Charakter aufweisen, wie für $k = 0$.

$s = -1$, $k = -1$ erhalten wir nun weiter:

$$-i\sqrt{\frac{2}{(iy+z)}} \int \frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + \frac{2x}{iy+z} + \frac{iy-z}{iy+z}}}$$

$$= -i\sqrt{\frac{2}{iy+z}} \ln\left[\frac{x}{2} + \frac{iy+z}{2}\varrho + \sqrt{\frac{iy+z}{2}}\sqrt{\frac{iy-z}{2} + x\varrho + \frac{iy+z}{2}\varrho^2}\right]\Bigg|_{\varrho=+1}^{\varrho=1}$$

$$= -i\sqrt{\frac{2}{iy+z}} \ln\left[\frac{x+iy+z+\sqrt{(iy+z)(iy-z+x+iy+z)}}{x+(iy+z)-\sqrt{(iy-z)(iy-z+x+iy+z)}}\right]$$

$$= -i\sqrt{\frac{2}{iy+z}} \cdot 2\ln\left[\frac{x+iy+z+\sqrt{2(iy+z)(x+iy)}}{R}\right].$$

[10]) Die Formel (8) erhält man folgendermaßen:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [x+ir\cos(\varphi+z)]^n dt$$

bt (Formel integriert)

$$(r^2 = y^2+z^2)\cdot x^n h\left[-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}+\frac{1}{2}, 1, -\left(\frac{r}{x}\right)^2\right].$$

h Kummer, Crelle Journal 15, § 19, ist aber

$$h\left[\alpha, \alpha+\frac{1}{2}, \gamma, x\right] = (1-x)^{-\alpha} h\left[2\alpha, 2\gamma-2\alpha-1, \gamma, \frac{\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}}\right]$$

in unserem Falle

$$\frac{x^n}{\left[1+\left(\frac{r}{x}\right)^2\right]^{n/2}} h\left[-n, +1+n, 1, \frac{R-x}{2R}\right] = R^n h\left[-n, +1+n, 1, \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right].$$

Sie sind regulär im ganzen Raum mit Ausnahme der x-Achse im unte (bzw. oberen) Halbraume. Die Niveauflächen des reellen Teiles unse Funktion für $s=1$, $k=0$ [also der Funktion $R^{1/2}h\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},1,\frac{R-}{2R}\right.$ sind uns in der Fig. 10 gezeichnet. Für $s=-1$, $k=0$ [also der Funkt

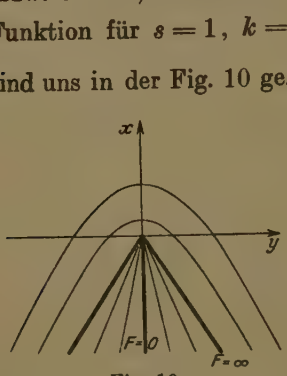


Fig. 10.

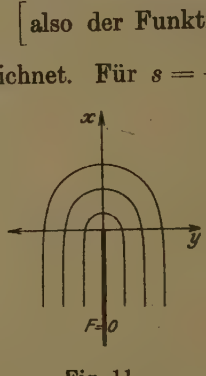


Fig. 11.

$R^{-1/2}h\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\frac{R-}{2R}\right.$ in Fig. 11.[11]) Es sei n erwähnt, daß in dies letzten Falle unsere Funkti betrachtet als Funktion $\left(\frac{R-x}{2R}\right)$ mit der aus Theorie derelliptischen Fu tionen bekannten Funkt

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{R-x}{2R}\right)^2\sin^2\varphi}}\quad\text{identisch.}$$

Auf den Fall, daß a eine imaginäre Zahl ist, wollen wir aus Ra rücksichten nicht eingehen.

Nach der durchgeführten Diskussion des Verhaltens unserer Funktio im Kleinen bietet es keine Schwierigkeiten festzustellen, unsere Betr tungen ins Große zu übertragen. Ähnlich wie bei den rationalen Fu tionen schließen wir, daß jeder zugeordneten Funktion $\frac{C+\sqrt{A}}{B}p\left(e^{\frac{it}{2}}\right)$ Anzahl von harmonischen Funktionen $F_1, F_2, \ldots, F_m$ entspricht, die weder ein- oder zweiwertig sind. Diese Funktionen weisen außer Pole noch die soeben besprochenen Singularitäten auf. Jede dieser Funkti besitzt ein Gebiet G_k, wo

$$F_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\,p\,dt \tag{9}$$

ist. Zwischen den einzelnen Funktionen F_k besteht ein einfacher sammenhang: Sind F_k und F_{k-1} zwei Funktionen, die zu benachbs Zuordnungsräumen G_k und G_{k-1} gehören, so ist

$$F_k-F_{k-1}=\eta\,(x,y,z), \tag{10}$$

wobei η den Sprung bedeutet, den das Integral $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\,p\,dt$ beim Überg durch die Grenzebene von F_k und F_{k-1} erleidet.

[11]) In Fig. 7 und 8 sind nur die Schnitte einiger dieser Niveauflächen m xy-Ebene angegeben. Schwarz sind angegeben die Linien, wo $F=0$ oder ∞ w

In der Theorie der zweidimensionalen algebraischen Funktionen spielen
e wichtige Rolle das Geschlecht p der Riemannschen Fläche und die
rioden 2ω des Integrals.

Wir werden nun zeigen, daß diese Größen auch in der Theorie der
idimensionalen Funktionen eine Rolle spielen und daß man sie auch
bhängig von unserer Zuordnung definieren kann. Wir müssen auch bei
ser Überlegung zwei Fälle unterscheiden: ein- und zweiwertige algebraische
nktionen. Wir werden nur den zweiten Fall, der sich ähnlich wie im
eidimensionalen gestaltet, betrachten [12]). Sei uns etwa die Funktion

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{p\left(e^{i\frac{t}{2}}\right)dt}{\sqrt{(u-a_1)(u-a_2)\dots(u-a_{2q})}}$$

geben. (Es sind a_k reell, und $a_1 > a_2 > \dots > a_{2p}$.) Wir markieren
singulären Punkte $(a_k, 0, 0)$ und legen dann die Verzweigungslinien
arallel zur z-Achse), die wir der Reihe nach $\overline{a_1' a_1''}$, $\overline{a_2' a_2''}$, ... bezeichnen.
gen wir — dem zweidimensionalen Falle analog — die von den geraden
$\overline{a_1' a_1''}$, $\overline{a_2' a_2''}$, ... berandeten Ebenenstreifen und zerschneiden längs innen den
um und fügen dann die entsprechenden Raumteile zusammen, so gelangen
r zu einem zweiwertigen Riemannschen Raum, auf dem unsere Funktion
deutig ist. Dieser Raum hat das Geschlecht q: durch q Querund q Rück-
rflächen können wir ihn in einen einfach zusammenhängen-den verwandeln.

Durch eine Überlegung, die der bei der Übertragung des Cauchyschen
siduensatzes ähnlich ist, gelangen wir zu folgendem Ergebnis: Sei $\mathfrak{S}$ eine
schlossene Kurve im Raume, die zwei Ebenen $x = a_\nu$, etwa $x = a_1$ und
$= a_2$ (jede genau zweimal) in den Punkten $A_{\nu 1}$ und $A_{\nu 2}$ $(\nu = 1, 2)$
nneidet. Wir bezeichnen wieder die Punkte $(x = a_\nu,\ y = z = 0)$ mit P_ν
d den Winkel, den die Gerade $P_\nu A_{\nu k}$ $(k = 1, 2)$ mit der z-Achse bildet,
t $\varphi_{\nu k}$. Seien schließlich F_k, F_k^*, F_k^{**} zweiwertige harmonische Funk-
nen, die in ihrem Zuordnungsraume G_k die Darstellung

$$F_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{p\left(e^{i\frac{t}{2}}\right)dt}{\sqrt{(u-a_1)(u-a_2)\dots(u-a_{2q})}},$$

$$F_k^* = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{p\left(e^{i\frac{t}{2}}\right)\cos t\,dt}{\sqrt{(u-a_1)(u-a_2)\dots(u-a_{2q})}},$$

$$F_k^{**} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{p\left(e^{i\frac{t}{2}}\right)\sin t\,dt}{\sqrt{(u-a_1)(u-a_2)\dots(u-a_{2q})}}$$

[12]) Die Diskussion im ersten Falle bietet keine Schwierigkeiten und soll aus
aumrücksichten übergangen werden.

zulassen, wo a_k reelle Zahlen, $p(e^{i\frac{t}{2}})$ Polynome von der Form:

$$b_0 e^{i\frac{t}{2}} + b_1 e^{i\frac{3}{2}t} + \ldots + b_n e^{i\frac{2n+1}{2}t} \tag{13}$$

sind. Ist dann $\varphi_{11} = \varphi_{21}$ und $\varphi_{12} = \varphi_{22}$, so ist

$$\begin{aligned}(14)\quad &\int_{A_{12}}^{A_{11}} (F_1 dx + F_1^* dy + iF_1^{**} dz) + \int_{A_{11}}^{A_{21}} (F_2 dx + iF_2^* dy + iF_2^{**} d\\ &+ \int_{A_{21}}^{A_{22}} (F_3 dx + iF_3^* dy + iF_3^{**} dz) + \int_{A_{22}}^{A_{12}} (F_2 dx + iF_2^* dy + iF_2^{**} d\\ &= \omega_1 \left[\int_{\frac{\pi}{2}-\varphi_{11}}^{\frac{\pi}{2}-\varphi_{12}} p\,dt - \int_{\frac{3\pi}{2}-\varphi_{11}}^{\frac{3\pi}{2}-\varphi_{12}} p\,dt \right],\end{aligned}$$

wo ω_1 der Periodizitätsmodul der algebraischen Funktion *einer komple*
Veränderlichen $\frac{1}{\sqrt{(\zeta-a_1)(\zeta-a_2)\ldots(\zeta-a_3)}}$ ist. Analoge Beziehung gel
auch für die anderen Periodizitätsmoduln derselben Funktion.

Um die Beziehung abzuleiten brauchen wir, wie erwähnt, in (
F_k, F_k^*, F_k^{**} durch (12) ersetzen und in dem zweifachen Integral
Integralsfolge zu vertauschen. Daß dies gestattet ist, läßt sich lei
ähnlich wie früher, nachweisen. Gehen wir zu dem zweidimension
Raum für $X(=x)$, $Y(=y\cos t + z\sin t)$ über, so werden der Kurv
gewisse geschlossene Schar Kurven $\sigma(t)$ $[0 \leqq t \leqq 2\pi]$ entsprechen.

Sobald $\varphi_{11} = \varphi_{21}$ und $\varphi_{12} = \varphi_{22}$ ist, wird $\sigma(t)$ für jedes t derje
Teil der X-Achse, der zwischen $X = a_1$ und $X = a_2$ liegt, entweder
nicht oder eine gerade Anzahl von Malen schneiden. $\sigma(t)$ ist entw
ein Querschnitt (für $\frac{\pi}{2} - \varphi_{11} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2} - \varphi_{21}$ und $\frac{3\pi}{2} - \varphi_{11}$ und $\frac{3\pi}{2} -$
oder eine Kurve, die sich auf einen Punkt zusammenziehen läßt
andere t).

§ 5.

Integrale algebraischer Funktionen.

Als Integrale algebraischer Funktionen bezeichnen wir harmoni
Funktionen, dessen mindestens eine Zugeordnete ein Abelsches Inte
ist. Ist f eine algebraische Funktion in u und e^u, so läßt sich u
Integral in den Zuordnungsraum in der Form

$$J_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^u f\,du \right) dt \tag{1}$$

arstellen, indem wir in (1) die Integrationsfolge vertauschen und wie früher

$$F = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,dt, \quad F^* = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\cos t\,dt, \quad F^{**} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\sin t\,dt$$

etzen, gelangen wir zu einer neuen Darstellung von F_1

2) $$J_1 = \int_{(0,0,0)}^{P(x,y,z)} F\,dx + i\int_{(0,0,0)}^{P(x,y,z)} F^*\,dy + i\int_{(0,0,0)}^{P(x,y,z)} F^{**}\,dz.$$

s bietet keine Schwierigkeit, unsere Funktionen auch außerhalb des Zurdnungsgebietes zu definieren. Die auf diese Weise enthaltenen Integrale ann man — je nach der Art des zugeordneten Integrals — in drei Gatungen einteilen.

Wir werden uns in der vorliegenden Arbeit auf Integrale beschränken, eren Zugeordnete elliptische oder hyperelliptische erster Gattung sind.

Sei uns eine algebraische Funktion von u:

$$f = \frac{1}{\sqrt{(u-a_1)(u-a_2)(u-a_3)(u-a_4)}} \quad [a_1 > a_2 > a_3 > a_4 \text{ sämtlich reell}]$$

egeben und bilden wir den Riemannschen Raum von

3) $$F = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\frac{k}{2}t}}{\sqrt{(u-a_1)(u-a_2)(u-a_3)(u-a_4)}}\,dt.$$

ieser Raum hat das Geschlecht 1. urch dieRückkehr und Rückkehrächе, in unserem Falle etwa die bene $x = 0$ in dem ersten Blatte nd einen in der z-Richtung unndlich ausgebreiteten Zylinder, eren Erzeugende parallel zur -Achse geht und dessen Basis in ig. 12 skizziertist, verwandeln wir nseren Raum in einen einfach zuammenhängenden. Da J ein vollständiges Integral ist, so ist J in em einfach zusammenhängenden aume eindeutig. An den Rückehr- und Querflächen muß J einen onstanten Sprung aufweisen.

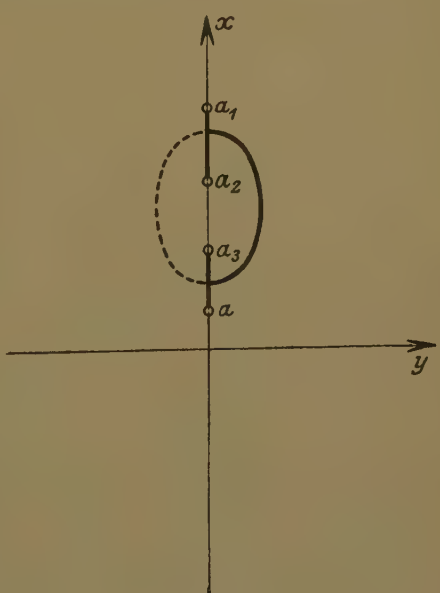


Fig. 12.

Da unsere Integrale die Eigenhaft besitzen, sich in einem

gewissen Raumteile (G_k) in der Form

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} j(u)\, e^{i\frac{k}{2}t}\, dt$$

darstellen zu lassen, wo $j(u)$ Abelsches Integral ist, so können wir lei eine Reihe von Sätzen der Theorie der Integrale einer komplexen V änderlichen auf die Dreidimensionalen übertragen. Es sollen nur ein einfachste Sätze erwähnt werden.

Satz 1. *Bezeichnen wir bei den Integralen erster Gattung vom schlecht* 1 *die Integrale* $J^{(r)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{u} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} e^{i\frac{k}{2}t}\, dt$ *als r zierte, so läßt sich zu jedem Integral erster Gattung* J *eine algebrai Substitution* $x_1 = \varphi(x)$ *finden, derart, daß* $J(x, 0, 0) = J^{(r)}(x_1, 0, 0)$

Entsprechende Sätze lassen sich für Funktionen von höherem schlecht leicht ableiten.

Satz 2. *Lassen sich die Periodizitätsmoduln* ω_α *eines Integrals Geschlecht* p $(p > 1)$ *in der Form* $\omega_\alpha = m_{\alpha 1}\, \omega_1 + m_{\alpha 2}\, \omega_2$ $(\alpha = 1, 2, \ldots,$ *darstellen, wo* $m_{\alpha 1}$ *und* $m_{\alpha 2}$ *ganze Zahlen sind, so läßt sich* $J(x,$ *als eine endliche Summe von Integralen vom Geschlecht* 1 $J(x_k,$ *darstellen, wobei zwischen jedem* x_1 *und* x_k *eine algebraische Rela besteht.*

§ 6.

Die Umkehrfunktionen der Integrale.

Im zweidimensionalen Falle spielen in der Theorie der algebrais Funktionen und deren Integrale eine wichtige Rolle die Umkehrfunktio Im Falle des elliptischen Integrals sind es elliptische Funktionen, Falle von hyperelliptischen Integralen — andere automorphe Funkti Es liegt aber nahe, auch in unserem Falle die harmonischen Funkti zu bilden, deren Zugeordnete die Umkehrfunktionen der algebraischen grale sind. Es zeigt sich, daß wir auf diese Weise zu neuen Funkti gelangen, die eine gewisse Ähnlichkeit mit den automorphen Funkti besitzen: sie werden auch gewisse Perioden besitzen, es wird sich zeigen, daß nur die Vermehrung des Argumentes um eine Period Funktion nicht unverändert bleibt, sondern um eine additive Fun vergrößert wird.

Wir wollen etwas ausführlicher auf die Umkehrfunktionen der Inte-
rale vom Geschlecht 0 und 1 eingehen. Es ist selbstverständlich diese
etrachtung mit der Untersuchung derjenigen harmonischen Funktionen,
eren Zugeordnete $\operatorname{tg} u, \wp(u)$, $\sin u$ ist, identisch. Wir bezeichnen

$$T^{(k)}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi u}{2} e^{ikt} dt,$$

a tg sowohl für $+1$ wie für -1 einen Pol erster Ordnung aufweist,
ilt die Darstellung $T^{(k)}(x, y, z)$ in der Form eines Integrals nur für die
aumschichten zwischen den Ebenen $x = -1$ und $x = 1$. Man kann aber
nsere Funktion $F^{(k)}(x, y, z)$ leicht weiter fortsetzen. Bilden wir das
unktionselement um den Nullpunkt der Funktion, so sieht man, daß die
unktionselemente von (1) und (2) übereinstimmen. Die Funktion (2)
t eine Funktion, die dadurch zustande kommt, daß man (wie bei perio-
ischen Funktionen) einzelne Pole $\frac{1}{\sqrt{(x-2n+1)^2+y^2+z^2}}$ summiert, ober-
alb der Ebene $x = 0$ sind sie mit positiven, unterhalb der Ebene $x = 0$
it negativen Vorzeichen zu nehmen.

Wir bezeichnen den Raum zwischen den Ebenen $x = n$ und $x = n + 1$
s die n-te Schichte. Befindet sich ein Punkt (x, y, z) in der n-ten
chichte, so gilt offenbar

$$T^{(0)}(x, y, z) = T^{(0)}(x - n, y, z) + 2 \sum_{N=1}^{N=n} \frac{1}{\sqrt{(x-N)^2+y^2+z^2}}.$$

ie bekannten Beziehungen

$$\operatorname{tg} u = \frac{\sin u}{\cos u}, \qquad \frac{d \operatorname{tg} u}{du} - \operatorname{tg}^2 u = 1, \qquad \operatorname{tg}(u+v) = \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{1 - \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}$$

ssen sich auch hier für die Funktion F deuten. Bezeichnen wir mit

$$S^{(0)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \frac{u\pi}{2} dt, \qquad C^{(0)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \frac{u\pi}{2} dt,$$

id nehmen wir an, daß der Punkt $P(x_k y_k z_k)$ in n_k Schichte liegt, so gilt

$$T^{(0)}(x_1 y_1 z_1) = S^{(0)}(x_1 y_1 z_1) \overset{*}{*} C^{(0)}(x_1 y_1 z_1) + 2 \sum_{N=1}^{N=h_1} \frac{1}{\sqrt{(x-N)^2+y^2+z^2}},$$

obei $\left(\overset{*}{*}\right)$ die in § 1 definierte Dekomposition bedeutet. Diese Dekomposi-
on bezieht sich auf einen von $x = \pm n$ verschiedenen Punkt der x-Achse.
benfalls gilt

$$(5)\qquad T^{(0)}(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$$

$$= \left\{ T^{(0)}(x_1,y_1,z_1) + T^{(0)}(x_2,y_2,z_2) - 2\sum_{h=1}^{n=h_1} \frac{1}{\sqrt{(x_1-h)^2+y_1^2+z_1^2}} - 2\sum_{h=1}^{n=h_2} \frac{1}{\sqrt{(x_2-h}} \right.$$

$$** \left\{ 1 - \left[T^{(0)}(x_1 y_1 z_1) - 2\sum_{h=1}^{n=h_1} \frac{1}{\sqrt{(x_1-h)^2+y_1^2+z_1^2}} \right] * \left[T^{(0)}(x_2 y_2 z_2) - 2\sum_{n=1}^{n=h_2} \frac{1}{\sqrt{(x_2-h)}} \right. \right.$$

$$+ \sum_{h=1}^{n=h_1+h_2} \frac{1}{\sqrt{(x_1+x_2-h)^2+(y_1+y_2)^2+(z_1+z_2)^2}},$$

und schließlich

$$(6)\qquad \frac{d\left[F^{(0)}(x\,y\,z) - \sum_{h=1}^{n=n_1} \frac{1}{\sqrt{(x-h)^2+y^2+z^2}} \right]}{dt} - \left[T_0(x,y,z) - \sum_{h=1}^{n=n} \frac{1}{\sqrt{(x-h)^2-}} \right.$$

$$** \left[T^{(0)}(x,y,z) - \sum_{h=1}^{h=h_1} \frac{1}{\sqrt{(x-h)^2+y^2+z^2}} \right] = 1.$$

Wir gehen nun zu denjenigen harmonischen Funktionen, die den pelten periodischen Funktionen entsprechen. Wir bezeichnen:

$$w_s = n_1\omega_1 + i\,n_2\omega_2 \cos t + \mathfrak{p}_n(\zeta) = \sum_{h_1=1}^{n}\sum_{h_2=1}^{n}\left[\frac{1}{(\zeta-w_s)^2} - \frac{1}{w_s^2}\right],$$

dann gelangen wir in

$$(7)\qquad P^{(k)}(x,y,z) = \lim_{h\to\infty} \int_0^{2\pi} \mathfrak{p}_n(u)\, e^{ikt}\, dt$$

zu einer harmonischen Funktion, die bei $k=0$ Punkt-Pole besitzt, in einem zweidimensionalen Raumgitter liegen, wobei oberhalb der E $x=0$ ein positives, unterhalb der Ebene $x=0$ ein negatives Resid haben. Bei $k>0$ werden es Funktionen, die Linienpole besitzen, sein. I Pole beginnen in den Gitterpunkten des soeben betrachteten Gitters gehen oberhalb der Ebene $x=0$ in der Richtung der wachsende unterhalb der Ebene $x=0$ in der Richtung der abnehmenden x, so die Ebene $x=0$ singularitätenfrei ist.

Ebenso einfach ist die Funktion

$$(6)\qquad Z_h(x,y,z) = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \zeta_h(u)\, e^{ikt}\, dt$$

ı definieren, wo

$$\zeta_h(z) = \sum_{h_1=-h}^{h} \sum_{h_1=-h}^{h} \left[\frac{1}{(z-w_i)} - \frac{1}{w_i} + \frac{z}{w_i} \right] \tag{7}$$

Wir bemerken, daß die auf diese Weise definierten Funktionen nur in der ichtung, die zur x-Achse parallel ist, periodisch sind. Bezeichnen wir den aumteil, der zwischen zwei Ebenen $x = (n-1)\omega_1$ und $x = h\omega_1$ liegt, ls die n-Schicht, so erhalten wir für den Punkt $(x_k y_k z_k)$, der in der -ten Schichte liegt, die Beziehung

$$P_0(x_k y_k z_k) = P_0[x_k - (k-1)\omega_1,\ y_k,\ z_k] \tag{8}$$

$$+ \sum_{N=1}^{N=k-1} \sum_{k_2=-\infty}^{k_2=\infty} \left[\frac{x_k - N\omega_1}{\sqrt{[(x_k - N\omega_1)^2 + (y_k - k_2\omega_2)^2 + z_k^2]^3}} - \frac{N\omega_1}{\sqrt{(N\omega_1)^2 + (n_2\omega_2)^2}^3} \right].$$

s bietet keine Schwierigkeiten, die Beziehungen aufzustellen, die sich aus en bekannten Formen

$$\mathfrak{p}'^2 = 4\mathfrak{p}^3 + g_2 y - g_3$$
$$\mathfrak{p}'' = 6\mathfrak{p}^2 - \frac{1}{2} g_2 \tag{9}$$

nd

$$\zeta(u+v)[\mathfrak{p}(u) - \mathfrak{p}(v)] = \zeta(u) + \zeta(v) + \frac{1}{2} y'(u) - y')v)$$

geben.

Wir haben oben bemerkt, daß $\mathfrak{p}(u)$ existiert nur für t von $\frac{\pi}{2}$ bzw. $\frac{\pi}{}$ verschieden. Es ist somit nicht erlaubt, direkt über t zu integrieren.

Wir führen deswegen eine neue Funktion $\mathfrak{p}\left(\frac{u}{\sin 2t}\right)$ ein, deren Perioden $\frac{\omega_1}{\sin 2t}$ und $\frac{\omega_2}{2\sin t}$ sind.

Es ist leicht einzusehen, daß $\mathfrak{p}\left(\frac{u}{\sin 2t}\right) = (\sin^2 2t)\,\mathfrak{p}(u)$ ist, und daß mit der Funktion $\mathfrak{p}\left(\frac{u}{\sin 2t}\right)$ eine harmonische entspricht mit den Polen weiter Art.

Für die Funktion können wir die den (9) analogen Gleichungen auf- ellen. Da wir jetzt über t integrieren können, so erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^6 2t\, \mathfrak{p}_n'^2(u) = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^6 2t\, \mathfrak{p}_n^3(u)$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^6 2t\, g_2 p - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^6 2t\, g_3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^4 2t\, \mathfrak{p}_n''$$

$$= \lim \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^4 2t\, \mathfrak{p}_n^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^4 2t \frac{1}{g_2}.$$

(Eingegangen am 20. März 1923.)

Eine allgemeine Methode zur Auflösung von linear Integralgleichungen.

Von

D. Enskog in Gävle (Schweden).

Wenn eine symmetrische Integralgleichung

$$f(s) = \varphi(s) - \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt \equiv J(\varphi)$$

die Eigenschaft hat, daß für jede stetige Funktion $\varphi(s)$, die nicht N lösung ist, der Integralausdruck

$$\int_a^b \varphi(s)J(\varphi)ds > 0,$$

so ist die Gleichung einer recht einfachen numerischen Behandlung gänglich[1]). Nun hat bekanntlich E. Schmidt[2]) die Auflösung einer symmetrischen Integralgleichung auf die einer symmetrischen zurückgef Aus der Schmidtschen Darstellung ergibt sich, daß diese symmetr Integralgleichung auch unsere zweite Grundbedingung erfüllt[3]). Die wendung meines Verfahrens auf dieselbe führt auf ein besonders einf Resultat. Man erhält nämlich, wie hier gezeigt werden soll, eine Mittel konvergente Fourierentwicklung der gesuchten Funktion. Da die Richtigkeit der resultierenden Vorschrift unmittelbar einsieht, w wir dieselbe direkt, ohne Vermittelung der symmetrischen Int gleichung, geben.

---

[1]) D. Enskog, Kinetische Theorie der Vorgänge in mäßig verdünnten G Dissertation. S. 44. Uppsala 1917. Siehe auch E. Hecke, Über die Integralglei der kinetischen Gastheorie, Math. Zeitschr. 12 (1922), S. 284, oder R. Couran D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I (1924), S. 136.

[2]) E. Schmidt, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleich Math. Annalen 63 (1907), S. 459.

[3]) E. Schmidt, a. a. O. Gleichung (25).

Entsprechend einer anderen Reduktion auf eine symmetrische Integralleichung erhalten wir in derselben Weise auch eine zweite Auflösungsormel der unsymmetrischen Integralgleichung.

Die so erhaltenen Auflösungsformeln sind nicht notwendig überall onvergent, nur erhält man daraus die richtigen Werte gewisser Integrale. Herr Professor Dr. E. Hecke hat mich aber darauf aufmerksam gemacht, aß eine immer gültige Auflösung dann durch Vermittelung der Integralleichung erhalten werden kann. Es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Hecke dafür wie auch für andere wertvolle Anregungen verbindlichst u danken, ebenso Herrn Professor Dr. L. Neder für eine Reihe von Verbesserungsvorschlägen während der Korrektur.

Die Heckesche Auflösungsformel, wie auch unmittelbar die früher rwähnte, scheint nun nach Hinzunahme einiger (anderswoher zu entehmender) grundlegender Sätze[5]) geeignet zu sein, als Grundlage für ine theoretische Behandlung zu dienen. Im folgenden erhalten wir in der Tat als Resultat einer einfachen Diskussion unter anderem die wichtigsten[8]) er Fredholmschen Sätze.

Wir zeigen endlich, wie man die Güte der Approximation abschätzen ann, wenn man einen Eigenwert der früher erwähnten symmetrischen ntegralgleichung kennt.

§ 1.

Konstruktion eines Funktionensystems.

Es sei die lineare, im allgemeinen unsymmetrische Integralgleichung weiter Art

$$f(s) = k(s)\varphi(s) - \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt \tag{1}$$

egeben. $K(s,t)$ soll eine im Gebiet $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ definierte, tetige Funktion der beiden Variablen s und t, $f(s)$ und $k(s)$ im Interalle $a \leqq s \leqq b$ stetige Funktionen von s sein. Alle Größen werden als eell vorausgesetzt.

Nimmt man $k(s) = 0$ an, so wird (1) eine Integralgleichung erster rt. Obwohl unser Verfahren unter Umständen auch hier anwendbar leibt, wollen wir diesen Fall ausschließen und setzen darüber hinausehend voraus, daß $k(s)$ durchweg von Null verschieden, folglich ohne eschränkung der Allgemeinheit positiv und sogar oberhalb einer positiven chranke gelegen ist.

Den linearen Integralausdruck der rechten Seite von (1) bezeich wir der Kürze halber mit $I(\varphi)$. Dann ist (1) mit

$$f(s) = I(\varphi)$$

gleichbedeutend.

Ist $g(s)$ eine stetige Funktion, so wird die zu (1) gehörige tr ponierte Gleichung

$$g(s) = k(s)\varphi(s) - \int K(t, s)\varphi(t)\,dt \tag{2}$$

oder kürzer

$$g(s) = T(\varphi).$$

Die Integration soll hier wie im folgenden stets über das Grundge $a \leqq t \leqq b$ erstreckt werden.

Sind $u(s)$ und $v(s)$ beliebige stetige Funktionen von s, so identisch

$$\int u(s) I(v)\,ds = \int v(s) T(u)\,ds. \tag{3}$$

Es sei ferner δ_{ik} gleich 1 oder gleich 0, je nachdem $i = k$ oder nich

Es sei jetzt $h_1(s), h_2(s), h_3(s), \ldots$ ein vollständiges System li unabhängiger stetiger Funktionen. Daraus bilde man durch Orthogo sierung die linearen Kombinationen $u_1(s), u_2(s), u_3(s), \ldots$, welche Beziehungen

$$\int T(u_i) T(u_k)\,ds = \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3, \tag{3a}$$

erfüllen, wobei offenbar das Schmidtsche Verfahren anwendbar ist[4]) kann jedoch vorkommen, daß der Prozeß an irgendeiner Stelle, z. B der Bildung von $u_k(s)$ unmöglich wird, weil für die erhaltene (nicht mierte) lineare Kombination $u_k'(s)$ von $h_1(s) \ldots h_k(s)$

$$\int T^2(u_k')\,ds = 0$$

wird. Dann ist $\chi(s) = u_k'(s)$ eine nicht identisch verschwindende Lö der homogenen Gleichung

$$T(\chi) = 0. \tag{4}$$

Streicht man aber $h_k(s)$ aus der gegebenen Funktionenfolge, so kann Orthogonalisierungsprozeß fortgesetzt werden, bis man abermals Lösung von (4) findet usw. Wie man aus der Besselschen Umgleic leicht folgert, kann die Zahl der fortgelassenen Funktionen $h_k(s)$ höch endlich sein[5]).

---

[4]) Vgl. E. Goursat, Cours d'analyse mathématique. t. III, S. 391. Paris Siehe auch meine frühere Arbeit.

[5]) In derselben Weise folgt nach Schmidt, daß überhaupt die Zahl der unabhängigen Nullösungen endlich ist. Für diesen Satz wollen wir im folg

Nun ist umgekehrt jedes $h_i(s)$ als eine lineare Kombination endlich eler der Funktionen $u_1(s)$, $u_2(s)$, ... und der erhaltenen Lösungen von) darstellbar. Aus der Vollständigkeit des Systems der Funktionen $h_1(s)$, (s), ... folgt daher, daß *die Funktionen* $u_1(s)$, $u_2(s)$, $u_3(s)$, ... *zuammen mit den gefundenen Lösungen von* (4) *ein vollständiges Funkonensystem bilden.* Wir bezeichnen dieses System als unser zweites unktionensystem.

Man gewinnt ferner ein orthogonales System normierter Funktionen:

$$v_i(s) = T(u_i) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

as System ist nicht immer vollständig, denn wenn die homogene Gleichung

$$I(\psi) = 0$$

sbar ist, so wird $v_1(s)$, $v_2(s)$, $v_3(s)$, ... zu jeder solchen Lösung orthonal. *Sind aber* $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$, ..., $\psi_r(s)$ *die zueinander orthogonalen id normierten Lösungen von* (6), *so folgt aus den Fredholmschen itzen, daß*

$$\psi_1(s), \psi_2(s), \ldots, \psi_r(s), \quad v_1(s), v_2(s), v_3(s), \ldots$$

n vollständiges, orthogonales, normiertes Funktionensystem bilden. Ist mlich $f(s)$ eine beliebige stetige Funktion, so kann man daraus durch ldition einer linearen Kombination von $\psi_1(s)$, ..., $\psi_r(s)$ eine Funkn $g(s)$ darstellen, die zu allen $\psi(s)$ orthogonal ist. Dann ist die tegralgleichung (2) lösbar, und es ist wegen der Vollständigkeit unseres eiten Funktionensystems eine Lösung mit beliebiger mittlerer Genauigit durch eine lineare Kombination endlich vieler $u_i(s)$ darstellbar. Aus) ergibt sich folglich mit entsprechender, beliebig großer mittlerer Geuigkeit eine Darstellung von $g(s)$ durch eine lineare Kombination endh vieler $v_i(s)$. Dann kann offenbar $f(s)$ durch eine lineare Kombination llich vieler der Funktionen $\psi_1(s)$, ..., $\psi_r(s)$, $v_1(s)$, $v_2(s)$, ... mit iebiger mittlerer Genauigkeit approximiert werden. — Dies Funktionenstem sei als das dritte bezeichnet.

---

nen anderen Beweis suchen, auch wo es gilt, eine neue Begründung der Theorie gebon. Wir betrachten es auch als evident, daß die Orthogonalitätsbedingungen die Lösbarkeit der Integralgleichung notwendig sind, und daß sich die allgemeine ung additiv aus einer partikularen Lösung und einer beliebigen linearen Komation der endlich vielen linear unabhängigen Nullösungen zusammensetzen muß. Ferner vgl. man auch den Schluß der Fußnote*).

§ 2.

Auflösung der Integralgleichung.

Ist $\varphi(s)$ eine Lösung von (1), so können wir leicht ihre Fou koeffizienten bezüglich $v_1(s), v_2(s), \ldots$ finden. Es ist nämlich nach

$$a_i = \int \varphi(s) v_i(s)\, ds = \int \varphi(s)\, T(u_i)\, ds = \int u_i(s)\, I(\varphi)\, ds$$

oder nach (1):

$$a_i = \int u_i(s) f(s)\, ds \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) \tag{7}$$

Ist (1) *lösbar, so wird die zu den etwaigen Nullösungen orthogo Lösung*

$$\varphi(s) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i v_i(s), \tag{8}$$

wenn die Reihe gleichmäßig konvergiert[6]*, und es gilt immer die Vollstän keitsrelation*

$$\int \varphi^2(s)\, ds = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2. \tag{9}$$

Wenn $\varphi_n(s)$ eine lineare Kombination von $T(h_1), T(h_2), \ldots, T(h_n)$ deutet, wobei $h_1(s), \ldots, h_n(s)$ diejenigen Funktionen sind, aus denen $u_1(s), \ldots, u_n(s)$ linear zusammensetzen, so ist

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i(s)$$

diejenige, welche der Größe

$$S_n = \int \{\varphi(s) - \varphi_n(s)\}^2\, ds$$

den kleinsten Wert gibt.

Sind ferner b_i und c_i die Fourierkoeffizienten zweier stetigen auch nur quadratisch nach Lebesgue integrierbaren) Funktionen und $g(s)$ bezüglich $v_i(s)$ $(i = 1, 2, \ldots)$, und ist entweder $f(s)$ oder zu den etwaigen Nullösungen $\psi_i(s)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ orthogonal, s wegen der Vollständigkeit unseres dritten Funktionensystems

$$\int f(s) g(s)\, ds = \sum_{i=1}^{\infty} b_i c_i. \tag{10}$$

Setzen wir

$$\alpha_i(s) = \int K(s, t) v_i(t)\, dt \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) \tag{11}$$

so folgt aus (10):

$$\int K(s, t) \varphi(t)\, dt = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \alpha_i(s).$$

---

[6]) Die Funktion (8) unterscheidet sich von der Lösung höchstens auf Nullmenge.

Aus (1) *ergibt sich folglich die immer gültige Auflösungsformel*[7])

$$\varphi(s) = \frac{f(s) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \alpha_i(s)}{k(s)} \tag{12}$$

§ 3.

Diskussion der Lösung.

Wir wollen die Konvergenz der Reihe (12) etwas näher untersuchen. Bei dieser Diskussion soll die Gültigkeit der Fredholmschen Sätze und derjenigen unserer früheren Resultate, die darauf beruhen, nicht vorausgesetzt werden[8]). Vielmehr erhalten wir neue Beweise der wichtigsten[8]) dieser Sätze.

Nun ergibt sich leicht

Satz 1. *Wenn die Integralgleichung* (1) *eine Lösung* $\varphi(s)$ *mit beschränkter Norm hat, so ist die Reihe* $\sum a_i^2$ *konvergent. Wenn diese Reihe konvergiert, so ist die Reihe* $\sum a_i \alpha_i(s)$ *absolut und gleichmäßig konvergent.*

Da $a_1, a_2, \ldots$ die Fourierkoeffizienten von $\varphi(s)$ sind, so gilt für beliebiges n die Besselsche Ungleichung

$$\int \varphi^2(s)\,ds - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqq 0.$$

Daraus folgt der erste Teil unseres Satzes.

In derselben Weise ergibt sich

$$\int K^2(s,t)\,dt \geqq \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2(s), \tag{13}$$

wo die linke Seite kleiner als eine von s unabhängige Größe M ist. Es folgt daraus, wenn n und p beliebig große positive ganze Zahlen sind:

---

[7]) Vgl. die Einleitung.

[8]) (Zusatz bei der Korrektur.) Der Beweis der Fredholmschen Sätze 3 und 4 in § 3 gestaltet sich noch einfacher, wenn man von der Formel (8) ausgeht, unter Anwendung des Theorems von Riesz-Fischer. Wegen der Konvergenz von $\sum a_i^2$ konvergiert die Reihe (8) im Mittel gegen eine nach Lebesgue quadratisch integrierbare Grenzfunktion. Setzt man diese Funktion in (1) ein, so werden, wenn die Orthogonalitätsbedingungen erfüllt sind, die Fourierkoeffizienten beider Seiten bezüglich der Funktionen $h_i(s)$ (§ 1), die man als normiert und zueinander orthogonal voraussetzen kann, gleich groß. Diese Funktionen können ja nämlich als lineare Kombinationen endlich vieler $u_i(s)$ und $\chi(s)$ ausgedrückt werden. Daraus folgt dann, daß (8) bis auf eine Nullmenge und (12) für alle s-Werte die Lösung darstellen muß. (Vgl. F. Riesz, Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, S. 167, Paris 1913.)

Es ist mir inzwischen gelungen, u. a. die Fredholmschen Sätze vollständig zu beweisen.

$$\left\{\sum_{i=n}^{n+p} |a_i a_i(s)|\right\}^2 \leqq \sum_{n}^{n+p} a_i^2 \cdot \sum_{n}^{n+p} a_i^2(s) \leqq M \cdot \sum_{n}^{n+p} a_i^2,$$

und es gilt offenbar auch der zweite Teil des Satzes.

In der folgenden Diskussion dieses Paragraphen setzen wir $k(s) =$ was offenbar keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet.

Satz 2. *Wenn die Reihe* $\sum a_i^2$ *divergent ist, so hat die transponi homogene Integralgleichung* (4) *wenigstens eine nichtverschwindende Lösu*

Aus der Schwarzschen Ungleichung ergibt sich

$$\left[\int f(s) \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i u_i(s)\, ds\right]^2 \leqq \int f^2(s)\, ds \cdot \int \left[\sum_{i=1}^{n} a_i u_i(s)\right]^2 ds$$

also nach (7)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^2 \leqq \int f^2(s)\, ds \cdot \int \left[\sum_{i=1}^{n} a_i u_i(s)\right]^2 ds. \tag{14}$$

Ist die Reihe $\sum a_i^2$ divergent, so wächst folglich für zunehmendes n Norm von $\sum_{i=1}^{n} a_i u_i(s)$ über alle Grenzen.

Wir setzen, indem wir $k(s) = 1$ annehmen,

$$\beta_i(s) = \int u_i(t) K(t, s)\, dt = u_i(s) - v_i(s) \qquad (i = 1, 2, .$$

$$\chi_n(s) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \beta_i(s)}{\sqrt{\int \left[\sum_{i=1}^{n} a_i u_i(s)\right]^2 ds}} = \int K(t, s) \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i u_i(t)}{\sqrt{\int \left[\sum_{i=1}^{n} a_i u_i(s)\right]^2 ds}}\, dt. \tag{16}$$

Die Funktionen $\chi_n(s)$ sind quellenmäßig dargestellt vermittels Funktio der Norm 1. Sie sind daher gleichmäßig beschränkt und gleichm stetig und definieren als Limes einer gleichmäßig konvergenten Teilf eine stetige Grenzfunktion $\chi(s)$. Nach (15) wird

$$\chi_n(s) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i u_i(s)}{\sqrt{\int \left[\sum_{i=1}^{n} a_i u_i(s)\right]^2 ds}} - \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i v_i(s)}{\sqrt{\int \left[\sum_{i=1}^{n} a_i u_i(s)\right]^2 ds}}.$$

Die Norm des letzten Gliedes wird wegen der Normiertheit und O gonalität der $v_i(s)$ nach (14) für hinreichend großes n beliebig k Es ist folglich für die erwähnte Teilfolge

$$\lim_{n=\infty} \int K(t, s) \chi_n(t)\, dt = \lim_{n=\infty} \int K(t, s) \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i u_i(t)}{\sqrt{\int \left[\sum_{i=1}^{n} a_i u_i(s)\right]^2 ds}}\, dt = \lim_{n=\infty} \chi_n$$

$$\therefore \int K(t, s) \chi(t)\, dt = \chi(s)$$

nd

$$\int \chi^2(s)\,ds = 1.$$

Satz 3. *Wenn die transponierte homogene Integralgleichung* (4) *keine on Null verschiedene Lösung hat, so wird* (1) *durch die stetige Funkion* (12) *aufgelöst*[8]).

Nach Satz 2 ist die Reihe $\sum a_i^2$ konvergent. Die Reihe (12) ist laher gliedweise integrierbar und stellt eine stetige Funktion dar. Wir rhalten ferner nach (11)

17) $$\alpha_k(s) = v_k(s) - I(v_k)$$

nd daher

$$\int u_i(s)\alpha_k(s)\,ds = \int u_i(s)v_k(s)\,ds - \int v_k(s)T(u_i)\,ds$$
$$= \int u_i(s)v_k(s)\,ds - \delta_{ik}.$$

olglich ist nach (7) und (12)

$$\int u_i(s)\varphi(s)\,ds = a_i + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int u_i(s)v_k(s)\,ds - a_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int u_i(s)v_k(s)\,ds.$$

st $F_n(s)$ eine lineare Kombination von $u_1(s), u_2(s), \ldots, u_n(s)$, wo n eliebig groß ist, so gilt mithin

$$\int F_n(s)\varphi(s)\,ds = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int F_n(s)v_k(s)\,ds.$$

a jede stetige Funktion $F(s)$ durch lineare Kombinationen endlich vieler $_i(s)$ mit beliebiger mittlerer Genauigkeit darstellbar ist, so folgt durch nen leichten Grenzübergang

18) $$\int F(s)\varphi(s)\,ds = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int F(s)v_k(s)\,ds.$$

olglich ergibt sich auch

$$\int K(s,t)\,\varphi(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \alpha_k(s) = \varphi(s) - f(s).$$

Satz 4. *Wenn $f(s)$ zu jeder Lösung der transponierten homogenen ntegralgleichung* (4) *orthogonal ist, so konvergiert die Reihe $\sum a_i^2$, und ie Integralgleichung* (1) *wird durch die Funktion* (12) *aufgelöst.*

Zu jedem $u_i(s)$ kann man ohne $v_i(s)$ und a_i zu ändern eine Lösung er Gleichung (4) addieren, so daß die erhaltene Funktion $u_i'(s)$ zu jeder lchen Lösung orthogonal wird. Wäre jetzt die Reihe $\sum a_i^2$ divergent, könnte man mit Benutzung der Funktionen $u_i'(s)$ statt $u_i(s)$ nach tz 2 als limes einer gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge eine nor-

mierte Lösung der Gleichung (4) konstruieren. Da aber diese Lösung den Funktionen $u_i'(s)$ orthogonal ist, so wird offenbar

$$\lim_{n=\infty} \int \chi(s)\chi_n(s)\,ds = \int \chi^2(s)\,ds = 0,$$

was dem früheren widerspricht.

Die Reihe $\sum a_i^2$ ist folglich konvergent. Nun bilden die Funktion $u_i(s)$ zusammen mit den fortgefallenen Lösungen der Gleichung (4) (v § 1) ein vollständiges Funktionensystem (unser zweites Funktionensyste Für jede Lösung $\chi(s)$ von (4) gilt aber nach (17) und (3)

$$\int \chi(s)a_k(s)\,ds = \int \chi(s)v_k(s)\,ds$$

und, da $\chi(s)$ zu $f(s)$ orthogonal ist,

$$\int \chi(s)\varphi(s)\,ds = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int \chi(s)v_k(s)\,ds.$$

Ist $F(s)$ eine beliebige stetige Funktion, so gilt wieder (18), und es fo wie früher, daß (12) eine Lösung von (1) darstellt.

Aus (18) folgt noch, daß diese Lösung zu den Lösungen der hor genen Gleichung (6) orthogonal ist. Hiermit haben wir diejeni Fredholmschen Sätze bewiesen, auf welche unsere Resultate im letz Absatz von § 1 und in § 2 beruhen. —

Wir haben schon im § 1 von solchen *Nullösungen der transponier Gleichung* gesprochen, die *durch lineare Kombination endlich vieler h* entstehen können. Diese Lösungen haben offenbar die Form

$$u_k'(s) = h_\varkappa(s) + \sum_{i=1}^{k-1} c_i u_i(s), \tag{19}$$

und man findet leicht, daß

$$c_i = -\int T(h_\varkappa)\,T(u_i)\,ds \tag{20}$$

sein muß. Für jede aus der gegebenen Funktionenfolge fortgefallene Fu tion $h_\varkappa(s)$ gibt es eine durch diese Formeln gegebene, von den and linear unabhängige Nullösung. Damit hat man aber alle Nullösungen genannten Art erhalten. Denn gäbe es noch eine durch lineare Kor nation endlich vieler $h_i(s)$ darstellbare, so würde eine Nullösung die F

$$\chi'(s) = \sum_{i=1}^{n} d_i u_i(s)$$

haben, wo d_i Konstanten sind. Dann würde aber

$$0 = \int T^2(\chi')\,ds = \sum_1^n d_i^2$$

sein, was nur möglich ist, wenn $\chi'(s)$ identisch verschwindet. —

Es gilt nun weiter der

Satz 5. *Wenn die homogene Gleichung* (4) *eine zu* $f(s)$ *nicht orthogonale Lösung besitzt, die durch lineare Kombination endlich vieler* $u_i(s)$ *mit beliebiger mittlerer Genauigkeit dargestellt werden kann, so divergiert die Reihe* $\sum a_i^2$.

Wäre die Reihe konvergent, so würde nämlich nach (12), (17) und (3)

$$\int \varphi(s)\chi(s)\,ds = \int f(s)\chi(s)\,ds + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \int v_i(s)\chi(s)\,ds.$$

Nun kann unsere Nullösung durch lineare Kombination endlich vieler $u_i(s)$ mit beliebiger mittlerer Genauigkeit approximiert werden. Nach (18) muß folglich sein

$$\int \varphi(s)\chi(s)\,ds = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \int v_i(s)\chi(s)\,ds,$$

was der vorigen Gleichung widerspricht.

Setzt man $f(s) = K(s,\tau)$, wo τ ein beliebiger, zum Grundgebiet gehöriger konstanter Wert ist, für den $\chi(\tau)$ nicht verschwindet, so ist wegen $\int K(s,\tau)\chi(s)\,ds = \chi(\tau)$ dies $f(s)$ nicht zu $\chi(s)$ orthogonal. Nach Satz 5 divergiert die an Stelle von $\sum a_i^2$ tretende Reihe $\sum \beta_i^2(\tau)$, und man kann nach Satz 2 eine Nullösung konstruieren (vielleicht mehrere unabhängige, wenn man verschiedene Werte von τ anwendet).

Wir nehmen jetzt an, daß man die durch (19) und (20) dargestellten und vielleicht auch andere davon linear unabhängige Nullösungen kennt. Gibt es wenigstens eine zu den bekannten orthogonale Nullösung, so kann man eine und folglich jede solche in der folgenden Weise konstruieren, wenn sich geeignete Werte von τ angeben lassen. Wie im Beweis von Satz 4 kann man statt jedes $u_i(s)$ ein $u_i'(s)$ setzen, das zu allen bekannten Nullösungen orthogonal ist. Die Funktionen $u_1'(s), u_2'(s), \ldots$ erfüllen die Beziehung (3a) und bilden zusammen mit den bekannten Nullösungen ein vollständiges Funktionensystem. Wegen der Vollständigkeit dieses Systems kann die weitere Nullösung, deren Existenz wir vorausgesetzt haben, durch die Funktionen $u_i'(s)$ approximiert werden. Nach dem vorigen kann man daher mit einem geeigneten τ eine normierte Nullösung konstruieren. Diese Nullösung wird zu den schon bekannten orthogonal (vgl. den Beweis von Satz 4).

Satz 6. *Sind* $u_1(s), u_2(s), u_3(s), \ldots$ *zu allen etwaigen Lösungen der homogenen Gleichung* (4) *orthogonal, so konvergieren die Reihen* $\sum a_i^2$ *und* $\sum \beta_i^2(t)$, $a \leqq t \leqq b$.

Wenn $f(s)$ nicht zu den Lösungen von (4) orthogonal ist, so wird ein a_i geändert, wenn man zu $f(s)$ eine solche Lösung von (4) addiert,

daß man ein zu allen solchen Nullösungen orthogonales $f(s)$ erhält. N
Satz 4 ist dann die erstere der beiden Reihen konvergent.

Nimmt man hierbei speziell $f(s) = K(s, t)$ an, so erhellt, daß a
die zweite Reihe konvergent sein muß.

§ 4.

Andere Auflösung der Integralgleichung.

Wir können unsere Funktionensysteme auch zur Ermittelung
Lösung der transponierten Integralgleichung (2) benutzen, wobei wir
die bisherige Spezialisierung $k(s) = 1$ aufheben und beliebiges $k(s)$
mäß dem zweiten Absatz des § 1 zulassen. Dabei setzen wir vor
daß diese Gleichung lösbar ist, und stützen uns auf die schon bewiese
Sätze der Fredholmschen Theorie.

Die Funktionen $u_i(s)$ seien jetzt zu allen etwaigen Lösungen von
orthogonal angenommen. Ist $\varphi(s)$ die Lösung von (2), so suchen
eine Entwicklung der Form

$$\varphi(s) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i u_i(s). \tag{21}$$

Nach (2) entspricht dies formal der Entwicklung

$$g(s) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i T(u_i) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i v_i(s)$$

von $g(s)$. Ist b_i der Fourierkoeffizient von $g(s)$ in bezug auf v_i
d. h. ist

$$b_i = \int v_i(s) g(s)\, ds \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) \tag{22}$$

so stellt offenbar (21) die Lösung dar, wenn die Reihe gleichmäßig k
vergiert.

Wir vermuten hiernach, daß die zu allen etwaigen Lösungen von
orthogonale Lösung durch

$$\varphi(s) = \frac{g(s) + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \beta_i(s)}{k(s)} \tag{23}$$

gegeben wird, wo $\beta_i(s)$ die durch (15) definierte Funktion ist.

Wir können dies aus unseren früheren Resultaten beweisen. Es s
$\chi_1(s), \chi_2(s), \ldots, \chi_r(s)$ die normierten, zueinander orthogonalen Lösu
von (4), $F(s)$ eine beliebige stetige Funktion und

$$c_k = \int F(s) \chi_k(s)\, ds \qquad (k = 1, 2, \ldots$$

Dann ist die Integralgleichung

$$F(s) - \sum_{k=1}^{r} c_k \chi_k(s) = I(\Phi)$$

lösbar. Ist $\varphi(s)$ die, zu $\chi_1(s), \ldots, \chi_r(s)$ orthogonal angenommene, Lösung von (2), so gilt nach (3)

$$\int F(s)\varphi(s)ds = \int \{F(s) - \sum_{k=1}^{r} c_k \chi_k(s)\}\varphi(s)ds = \int \Phi(s)T(\varphi)ds$$
$$= \int \Phi(s)g(s)ds.$$

Der Fourierkoeffizient von $\Phi(s)$ bezüglich $v_i(s)$ ist nach (3)

$$\int u_i(s)\{F(s) - \sum_{k=1}^{r} c_k \chi_k(s)\}ds = \int u_i(s)F(s)ds.$$

Folglich wird nach (10) und (22), da $g(s)$ zu den Lösungen von (6) orthogonal ist,

24) $$\int F(s)\varphi(s)ds = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \int F(s)u_i(s)ds.$$

Daraus ergibt sich

$$\int K(t,s)\varphi(t)dt = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \beta_i(s),$$

und folglich ist diese Lösung $\varphi(s)$ mit der Funktion (23) identisch.

§ 5.

Die Güte der Approximation.

Wir nehmen zuerst an, daß die Integralgleichung (1) symmetrisch ist, daß $k(s) > 0$, und daß der Integralausdruck

$$\int \varphi(s)I(\varphi)ds$$

positiv definit ist. Es sei ferner λ_1 der kleinste positive, λ_{-1} der größte negative Eigenwert des Kernes

$$\frac{K(s,t)}{\sqrt{k(s)k(t)}}.$$

Dann gilt nach der Hilbertschen Theorie der symmetrischen Integralgleichung, wenn $u(s)$ eine beliebige stetige Funktion bedeutet,

$$\frac{1}{\lambda_{-1}}\int k(s)u^2(s)ds \leqq \iint K(s,t)u(s)u(t)ds\,dt \leqq \frac{1}{\lambda_1}\int k(s)u^2(s)ds.$$

Hieraus folgt, wenn wir statt unseres früheren I oder T jetzt J schreiben,

25) $$\left(1 - \frac{1}{\lambda_{-1}}\right)\int k(s)u^2(s)ds \geqq \int u(s)J(u)ds \geqq \left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right)\int k(s)u^2(s)ds.$$

Das Gleichheitszeichen gilt hierin für die zu dem betreffenden Eigenwert gehörige Nullösung.

In unserem Falle ist offenbar $\lambda_1 \geqq 1$.[9]) Ist 1 ein Eigenwert, so

[9]) Vgl. E. Hecke, Math. Zeitschr. 12 (1922), S. 279.

nehmen wir an, daß λ_1 den nächst größeren positiven Eigenwert bedeut und daß $u(s)$ orthogonal zu den $\lambda = 1$ entsprechenden Nullösungen i Dann gilt noch (25).

Mit Anwendung der Schwarzschen Ungleichung erhält man

$$\left[\int u(s) J(u)\, ds\right]^2 \leqq \int k(s) u^2(s)\, ds \cdot \int \frac{J^2(u)}{k(s)} ds$$

und daher nach (25)

$$\int u(s) J(u)\, ds \leqq \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1} \int \frac{J^2(u)}{k(s)} ds. \tag{26}$$

Nehmen wir jetzt wieder den allgemeinen Fall an, wo (1) unsy metrisch sein kann. Nach E. Schmidt[2]) wird sie gelöst durch

$$\varphi(s) = T(\chi),$$

wenn $\chi(s)$ die Lösung der Integralgleichung

$$f(s) = I[T(\chi)] \tag{27}$$

ist, welche ausführlicher geschrieben lautet

$$f(s) = k^2(s)\chi(s) - \int k(t) K(s,t) \chi(t)\, dt - \int k(s) K(t,s) \chi(t)\, dt + \iint K(s,r) K(t,r) \chi(t)\, dr\, dt$$

und offenbar symmetrisch ist. Es gilt ferner nach (3)

$$\int u(s) J(u)\, ds = \int u(s) I[T(u)]\, ds = \int T^2(u)\, ds \geqq 0.$$

Die transponierte Gleichung (2) hat, wenn sie lösbar ist, diesel Lösungen wie die immer lösbare symmetrische Integralgleichung

$$I(g) = I[T(\varphi)]. \tag{28}$$

Sind $\varphi_n(s)$ und $\chi_n(s)$ angenäherte, einander entsprechende Werte de (27) gehörigen Funktionen $\varphi(s)$ und $\chi(s)$, so gilt nach (26)

$$\int \{\chi(s) - \chi_n(s)\} \cdot I[T(\chi - \chi_n)]\, ds \leqq \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1} \int \frac{I^2[T(\chi - \chi_n)]}{k^2(s)} ds$$

oder

$$\int \{\varphi(s) - \varphi_n(s)\}^2 ds \leqq \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1} \int \frac{[f(s) - I(\varphi_n)]^2}{k^2(s)} ds. \tag{29}$$

Ist $\varphi_n(s)$ die n-te Partialsumme der Reihe (8), so hat man folglich obere Grenze der Summe

$$S_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i^2$$

gewonnen. Ist ferner $F(s)$ eine beliebige stetige Funktion und c_k Fourierkoeffizient derselben bezüglich $v_k(s)$, so wird

$$\left| \int F(s) \varphi(s)\, ds - \int F(s) \varphi_n(s)\, ds \right|$$

icht größer als das geometrische Mittel von

$$\int F^2(s)\,ds - \sum_{k=1}^{r} [\int F(s)\,\psi_k(s)\,ds]^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2$$

nd der rechten Seite von (29).

Nimmt man als angenäherte Darstellung von $\varphi(s)$ die Funktion

$$\frac{f(s)+\sum_{i=1}^{n} a_i\,\alpha_i(s)}{k(s)},$$

o wird der Fehler höchstens gleich

$$\left\{\frac{\lambda_1}{\lambda_1-1}\int \frac{\{f(t)-I[\varphi_n(t)]\}^2}{k^2(t)}\,dt\cdot\frac{\int K^2(s,t)\,dt-\sum_1^r k^2(s)\,\psi_i^2(s)-\sum_1^n \alpha_i^2(s)}{k^2(s)}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

In eben derselben Weise berechnet man obere Grenzen der Größen

$$\sum_{n+1}^{\infty} \beta_i^2(s), \quad \sum_{n+1}^{\infty} [\int F(s)\,u_i(s)\,ds]^2,$$

ie unser früheres S_n entsprechen (vgl. S. 680—681). Daraus ergeben sich bere Grenzen der Größen

$$\sum_{n+1}^{\infty} b_i\,\beta_i(s) \quad \text{und} \quad \sum_{n+1}^{\infty} b_i \int F(s)\,u_i(s)\,ds$$

(23) und (24).

§ 6.

Schlußbemerkung.

In unseren Entwicklungen haben wir bisher die Stetigkeit des Kernes nd der übrigen gegebenen Funktionen vorausgesetzt. Ohne hier die Bedingungen genau definieren zu wollen oder die nötigen Modifikationen angeben bemerken wir, daß keine wesentlichen Änderungen in der Methode der in den Resultaten daraus entspringen, daß man in üblicher Weise nstetigkeitsstellen oder Unendlichwerden des Grundgebiets zuläßt unter oraussetzung der quadratischen Integrierkarkeit dieser Funktionen und r Annahme, daß die Integrale $\int |K(s,t)|^2 dt$ und $\int |K(s,t)|^2 ds$ beschränkt sind.

Ferner ist unsere Methode offenbar auch auf Integralgleichungen für unktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, auf komplexe Kerne nd auf Gleichungssysteme mit mehreren unbekannten Funktionen anendbar.

(Eingegangen am 27. Juli 1924.)

Beitrag zu den Fundamentalsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von

H. Pollaczek-Geiringer in Berlin.

Unter dem Namen „Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnu hat Herr v. Mises[1]) eine Reihe von Aussagen über die Grenzwerte Wahrscheinlichkeitsfunktionen, die durch Kombination unendlich vi Kollektivs entstehen, zusammengefaßt. Eine Teilaussage des „er Fundamentalsatzes" bildet der Laplace-Tschebyscheffsche Grenzw satz; dieser von Laplace herrührende, seit seiner ersten präzisen Fass durch Tschebyscheff[2]) vielfach verfeinerte Satz[3]) besagt bekannt daß die Verteilungsfunktion $W_n(u)$ der Summe von n voneinander u hängigen Elementarfehlern $t_1, t_2, \ldots, t_n$, zu denen die einzelnen Ve lungsfunktionen $V_\nu(x)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ gehören, unter sehr weiten Vor setzungen, im Limes dem Gaußschen Gesetze folgt: Setzt man

$$W_n(u) = \int_{-\infty}^{\infty} V_n(x_n)\, dV_{n-1}(x_{n-1}) \ldots dV_1(x_1),$$

---

[1]) R. v. Mises, Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. schrift 4 (1919), S. 1–97, vgl. S. 78.

[2]) P. L. Tschebyscheff, Œuvres 2, S. 421 und 443.

[3]) Vgl. A. Liapounoff, Sur une proposition de la théorie des probabi Bull. de l'Ac. Pet. 13 (1900); nouvelle forme du théorème sur la limite de probab Mémoires de l'Ac. St. Pet. 18 (1901).

b) R. v. Mises, l. c. [1]), S. 24, Satz III.

c) G. Pólya, Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeits nung, Math. Zeitschr. 8 (1920), S. 171.

d) I. W. Lindeberg, Über das Gaußsche Fehlergesetz. Skand. Aktuari skrift 1922.

e) I. W. Lindeberg, Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes in Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Zeitschr. 15 (1922), S. 211.

f) G. Pólya, Herleitung des Gaußschen Fehlergesetzes aus einer Funkti gleichung, Math. Zeitschr. 18 (1923), S. 96; vgl. „Anhang".

g) P. Lévy, Sur le rôle de la loi de Gauß dans la théorie des erreurs, Co rendus 174 (1922), S. 855–857, sowie Comptes rendus 175 (1922), S. 854–856.

as $(n-1)$-fache Integral erstreckt über diejenigen x_i $(i=1,\ldots,n)$, für die $\sum_{i=1}^{n} x_i = r_n u + b_n$, wobei r_n und b_n geeignete Konstante sind, so ist

$$1) \quad \lim_{n\to\infty} \int V_n(r_n u + b_n - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1})\, dV_{n-1}(x_{n-1}) \ldots dV_1(x_1)$$
$$\equiv \lim_{n\to\infty} W_n(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-t^2} dt.$$

Von zwei weiteren, von v. Mises herrührenden, Teilaussagen des Fundamentalsatzes, die sich auf Spezialfälle der allgemeinen Verteilung, nämlich auf arithmetische und geometrische Wahrscheinlichkeiten beziehen [4]), interessiert hier vor allem die letztere. Diese besagt, daß falls die $V_\nu(x)$ beschränkte Ableitungen $v_\nu(x)$ (Wahrscheinlichkeitsdichten) besitzen $(\nu = 1, \ldots, n)$, dann außer dem Satz (1) noch der weitere gilt, daß die Ableitung $w_n(u)$ von $W_n(u)$ — die „Wahrscheinlichkeitsdichte" der Summenverteilung — unter geeigneten Voraussetzungen über die Dichten v_ν im Limes gegen die Ableitung der Gaußschen Funktion geht

$$2) \quad \lim_{n\to\infty} \int v_n(r_n u + b_n - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1}) v_{n-1}(x_{n-1}) \ldots v_1(x_1)\, dx_{n-1} \ldots dx_1$$
$$\equiv \lim_{n\to\infty} w_n(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}.$$

Sowohl diese Aussage wie auch (1) lassen unmittelbare Erweiterungen auf k Dimensionen zu und werden auch in diesem Umfange von v. Mises ausgesprochen [5]). Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, eine diesem Gedankenkreis angehörende, nicht unmittelbare Ausdehnung der Aussage (2) auf ein k-dimensionales Problem abzuleiten, die durch physikalische Fragestellungen nahegelegt wird.

Im k-dimensionalen Raum R_k sei eine l-dimensionale $(l < k)$ Hyperfläche durch die k-wertige Gleichung $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(\mathfrak{x})$, in der $\mathfrak{y}$ einen k-dimensionalen, $\mathfrak{x}$ einen l-dimensionalen Vektor bedeutet, gegeben [5a]), und auf dieser Fläche eine l-dimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte $v(\mathfrak{x})$. Denken wir

---

[4]) Vgl. l. c. [1]) S. 24, Satz V und IV.

[5]) Ein Beweis dieser Erweiterung findet sich bei J. L. Coolidge, The Gaussian law of error for any number of variables, Cambr. Soc. (1922), S. 135—143.

[5a]) Vektoren (d. h. Repräsentanten für mehrere Variable) werden im folgenden mit deutschen Buchstaben bezeichnet. Die einzelnen Variablen hierzu mit dem gleichen Kursivbuchstaben und einem Zahlenindex. Ein Vektor $\mathfrak{a}$ heißt „k-dimensional", wenn er k Variable $x_1, x_2, \ldots, x_k$ repräsentiert. Der „Summe" zweier k-dimensionaler Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ entsprechen die einzelnen Variablen $a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_k+b_k$. Für die Zahl $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_k b_k$ schreibt man $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ („skalares Produkt von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$"). — Durch zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, die der Bedingung $a_i \leqq b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ genügen, wird ein von Parallelen zu den Koordinatenebenen begrenzter Raumteil bestimmt, dessen Koordinaten x_i die Ungleichungen $a_i \leqq x_i \leqq b_i$ erfüllen.

uns das Ganze n-mal vorgelegt, d. h. n Dichtefunktionen $v_1(\xi_1), \ldots, v_n(\xi$ und n Hyperflächen $\eta_1(\xi_1), \ldots, \eta_n(\xi_n)$, so entsteht die Frage nach d *Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Summe der n Vektoren* η_r $(r = 1, \ldots, r$ *deren jeder auf der bestimmten Hyperfläche* $\eta_r(\xi_r)$ *variiert, in einen stimmten Raumteil* dS *des* R_k *fällt.* Der zu beweisende Satz beste darin, daß auch in diesem Fall unter geeigneten Voraussetzungen üb die Dichtefunktionen und Hyperflächen *die Dichtefunktion der Summ verteilung im Limes dem Gaußschen Gesetze folgt.* Der Gedankenga des Beweises schließt sich an die von v. Mises gegebene Ableitung der L ziehung (2) an; denn unser Problem gehört in *diesen* Bereich, in d Aussagen nicht nur über die Wahrscheinlichkeit wie in (1), sondern üb die Wahrscheinlichkeits*dichte* selbst gesucht werden. Daher kommen au die verschiedenen Vereinfachungen und Verfeinerungen[3]), die in neue Zeit in Richtung des Satzes (1) erzielt worden sind, für den vorliegend Fall nicht in Betracht; andererseits wird im folgenden bezüglich der A grenzung des zugelassenen Funktionenbereiches auch nicht die größte A gemeinheit angestrebt, sondern nur soweit gegangen als für die be sichtigte Anwendung auszureichen scheint.

Die physikalische Fragestellung, auf die unser Problem Anwendu findet, entstand durch eine Diskussion zwischen Herrn v. Laue und He Einstein[6]) über den Begriff der sogenannten „natürlichen Strahlun die auf folgende mathematische Frage führt: Gegeben seien n Ein schwingungen, dargestellt durch n *Fourrierreihen*; jeder Schwingung eine Parametergruppe zugeordnet, (z. B. die Raumkoordinaten des pun förmig gedachten schwingenden Resonators) und den n Parametergrup kommen n *Wahrscheinlichkeitsdichten* zu. Diese n Schwingungen set sich zu einer Resultantschwingung zusammen, die sich selbst wieder Fourierreihe darstellt; gefragt wird beim Übergang $n \to \infty$ nach Wahrscheinlichkeit dafür, daß die k ersten Fourrierkoeffizienten Resultantschwingung bestimmte Werte annehmen, oder, wie wir kurz sa wollen, nach dem *Wahrscheinlichkeitsgesetz der Fourierkoeffizienten Resultantschwingung*[6a]). Wie wir in Nr. 10 noch genauer sehen wer

[6]) Vgl. v. Laue, Ein Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und seine An dung auf die Strahlungstheorie, Ann. d. Phys. 47 (1915), S 853—878; A. Einst Antwort auf eine Abhandlung v. M. v. Laue, Ein Satz ..., Ann. d. Phys. 47 (1 S. 879—885; v. Laue, Zur Statistik der Fourierkoeffizienten der natürlichen St lung, Ann. d. Phys. 48 (1915), S. 668—680.

[6a]) Die Frage wird von v. Laue beantwortet [l. c. [6]), „Ein Satz der W scheinlichkeitsrechnung usf."] durch Aufstellung eines Wahrscheinlichkeitsgesetzes, mit dem in Nr. 10 vorliegender Arbeit gegebenen im großen und ganzen übe stimmt. Die Ableitung v. Laues mit Hilfe des sogenannten diskontinuierlichen Fal berührt nicht die eigentlichen Konvergenzfragen.

kommt dies auf die oben formulierte wahrscheinlichkeitstheoretische Fragestellung hinaus. — Wenn auch der bestimmte physikalische Anlaß, der damals zu dieser mathematischen Frage führte, heute als erledigt anzusehen ist, so besitzt doch die sich aus der Diskussion ergebende „Statistik der Fourierkoeffizienten" einer aus sehr vielen Einzelschwingungen resultierenden Strahlung auch für verschiedene aktuelle Fragen der theoretischen Physik ein gewisses Interesse.

§ 1.

Allgemeine Problemstellung.

1. Ansatz. Unsere Problemstellung im Rahmen der Fundamentalsätze zeigt sich am einfachsten durch Gegenüberstellung mit dem eingangs erwähnten Grenzwertsatz (2), dessen Fragestellung wir — gleich für l Dimensionen — so aussprechen: $v_\nu(\mathfrak{x}_\nu)$ sei eine l-dimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte im Punkte $\mathfrak{x}_\nu$ des R_l. Gefragt ist nach dem Grenzwert der Wahrscheinlichkeitsdichte für die Summe $\mathfrak{x}_1 + \ldots + \mathfrak{x}_n$ von n solchen Wahrscheinlichkeitsgrößen in einem Punkte $\mathfrak{u}$ des R_l. Wir wollen das der größern Deutlichkeit halber im „Urnenschema" veranschaulichen. Denken wir uns eine Urne mit Losen. Jedes Los sei durch l reelle Zahlen $(x^{(1)}, \ldots, x^{(l)})$ charakterisiert, als deren Symbol wir $\mathfrak{x}$ schreiben (vgl. Anm. [5a]), so daß ein solches Los einen „Punkt" einer l-dimensionalen Mannigfaltigkeit R_l repräsentiert, und es seien auf diese Weise Punkte eines bestimmten l-dimensionalen Kontinuums durch Lose dargestellt. Die Wahrscheinlichkeit ein Los zu ziehen, das einem im Intervall $(\mathfrak{x}, \mathfrak{x} + d\mathfrak{x})$ gelegenen Punkte entspricht, sei $v(\mathfrak{x})\,d\sigma$ oder, wie man auch sagt: $v(\mathfrak{x})$ bezeichne die *Wahrscheinlichkeitsdichte* im Punkte $\mathfrak{x}$. Wir können uns vorstellen, daß gewisse „Punkte" „wahrscheinlicher", andere „weniger wahrscheinlich" sind; dem gibt die Funktion $v(\mathfrak{x})$ Ausdruck. — Nun denken wir weiter, es seien n verschiedene Urnen gegeben, jede mit Losen gefüllt, die in geschilderter Weise durch l reelle Zahlen charakterisiert sind; die Lose der ersten enthalten Punkte $\mathfrak{x}_1(x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(l)})$ eines l-dimensionalen Kontinuums, die der zweiten ebenso Punkte $\mathfrak{x}_2$ desselben oder eines andern l-dimensionalen Kontinuums, die der n-ten Punkte $\mathfrak{x}_n(x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(l)})$; die wie oben erklärte Wahrscheinlichkeitsdichte sei für die ν-te Urne $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ durch $v_\nu(\mathfrak{x}_\nu)$ gegeben. Gefragt ist nach dem Grenzwert für $n \to \infty$ der Wahrscheinlichkeit, bei n Ziehungen, jede aus einer der Urnen, eine bestimmte zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x} + d\mathfrak{x}$ gelegene *Summe* der $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_n$ zu erhalten. Transformiert man in bekannter Weise den Punkt $\mathfrak{x}$ mittels einer Konstanten b_n (des „Mittelwerts") in den Punkt

$u = \frac{1}{\sqrt{n}}(\xi - b_n)$, so kann man unsere Frage auch kurz so stellen, daß d
Wahrscheinlichkeitsdichte $w_n(u)$ im Punkte u des R_l gesucht wird.

Genau so kommen bei *unserer* Problemstellung, die wir jetzt entwicke
wollen, den n-dimensionalen Wahrscheinlichkeitsgrößen ξ_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$ c
Wahrscheinlichkeitsdichten $v_\nu(\xi_\nu)$ in einem Punkte ξ_ν des R_l zu. Der Berei
für ξ_ν sei das beschränkte im Endlichen gelegene Intervall $(a\,b)$. D
l-dimensionalen Vektoren ξ_ν ist nun aber weiter durch eine Zuordnu
$\eta_\nu = \eta_\nu(\xi_\nu)$ der k-dimensionale Vektor η_ν zugeordnet, so daß also η_ν a
einer l-dimensionalen Hyperfläche im k-dimensionalen Raum variiert u
gefragt ist nach der k-dimensionalen Wahrscheinlichkeitsdichte der Sum

$$\eta_1(\xi_1) + \ldots + \eta_n(\xi_n)$$

in einem Punkt u des R_k.

Drücken wir auch diese Fragestellung im Urnenschema aus: W
wollen annehmen, daß in der ν-ten von n Urnen sich ein durch k Zahl
$(\eta_\nu^{(1)}, \ldots, \eta_\nu^{(k)}) \equiv \eta_\nu$ charakterisiertes Los befindet; es seien aber in die
Urne nur solche „Punkte" η_ν vertreten, die einer bestimmten *l-dime
sionalen Hyperfläche im k-dimensionalen Raum* angehören, die also ei
k-wertigen Parametergleichung $\eta_\nu = \eta_\nu(\xi_\nu)$ genügen (wobei ξ_ν die l Pa
meter $(x_\nu^{(1)}, \ldots, x_\nu^{(l)})$ repräsentiert, und sämtliche ξ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, v
wir zur Vereinfachung annehmen können, dem gleichen ganz im Endlich
gelegenen Intervall (a, b) angehören. $v_\nu(\xi_\nu)\,d\sigma_\nu$ ist die Wahrscheinli
keit dafür, aus der ν-ten Urne ein den Parametern zwischen ξ_ν u
$(\xi_\nu + d\xi_\nu)$ entsprechendes η_ν zu ziehen, bzw. $v_\nu(\xi_\nu)$ die Wahrscheinlichkei
dichte im Punkte ξ_ν. Gefragt wird nach dem Grenzwert der Wahrscheinli
keit dafür, bei n Ziehungen aus den n verschiedenen Urnen eine zwische
und $\eta + d\eta$ gelegene Summe der η_ν: $\eta_1(\xi_1) + \ldots + \eta_n(\xi_n)$ zu zieh
wenn n unbegrenzt wächst, oder wie wir auch sagen wollen, wenn m
$\eta = \sqrt{n}\,u + b_n$ setzt (bei geeigneter Wahl von b_n), gefragt ist nach
k-dimensionalen Wahrscheinlichkeitsdichte der fraglichen Summe für ei
Punkt u des R_k.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß für die fragliche Summe die
ziehung

$$\sqrt{n}\,u + b_n \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \eta_\nu(\xi_\nu) \leqq \sqrt{n}(u + du) + b_n \tag{3}$$

besteht, ist gegeben durch das $n \cdot l$-fache Integral

$$J_n(u) = \int v_1(\xi_1)\, v_2(\xi_2) \ldots v_n(\xi_n)\, d\sigma_1 \ldots d\sigma_n \tag{4}$$

rstreckt über denjenigen Teil eines nl-dimensionalen Parallelepipeds, in em (3) gilt[7]). (4′) hat nur einen Sinn, wenn $nl > k$.

Wir wollen im folgenden eine Vereinfachung vornehmen, die, ohne in inem wesentlichen Punkt etwas zu ändern, die Rechnungen und die chreibweise abkürzt. Es werde nämlich $l = 1$ angenommen, so daß also n Stelle der l-dimensionalen Flächen im R_k *Kurven* $\mathfrak{y}_r = \mathfrak{y}_r(x_r)$ $r = 1, \ldots, n$) treten; für die Vektoren $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ treten Skalare $x_1, \ldots, x_n$ $a \leqq x_r \leqq b$); (4′) geht dann über in das n-fache Integral.

$$4') \qquad J_n(\mathfrak{u}) = \int v_1(x_1)\, v_2(x_2) \ldots v_n(x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

rstreckt über *den* Teil des n-dimensionalen Würfels von der Kantenlänge $b - a$), in dem $\sqrt{n}\,\mathfrak{u} + \mathfrak{b}_n \leqq \sum_{r=1}^{n} \mathfrak{y}_r(x_r) \leqq \sqrt{n}\,(\mathfrak{u} + d\,\mathfrak{u}) + \mathfrak{b}_n$ gilt. Aus er Bedingung $nl > k$ wird $n > k$, *was im folgenden vorausgesetzt werde.* er Gang der Ableitung wird zeigen, daß das Resultat auch für $l \neq 1$ aber $\leqq k$) Gültigkeit besitzt.

Die gegebenen n Kurven $\mathfrak{y}_r(\mathfrak{x}_r)$ $(r = 1, \ldots, n)$ seien *stetig differenierbare,* ganz in einem *beschränkten Gebiet* des R_k verlaufende *geschlossene* urchaus reguläre Kurven C_r. (In unserer Anwendung auf Fourierkoeffienten, vgl. S. 700, werden sie für $k = 2$ konzentrische Kreise in der Ebene.) ir setzen nun

$$5) \qquad \mathfrak{y}_1(x_1) + \mathfrak{y}_2(x_2) + \ldots + \mathfrak{y}_n(x_n) = \sqrt{n}\,\mathfrak{u} + \mathfrak{b}_n,$$

o $\mathfrak{b}_n$ eine noch näher anzugebende Konstante den „Mittelwert" bezeichnet, h. wir beziehen die neue Veränderliche $\mathfrak{u}$ auf den „Punkt" $\mathfrak{b}_n$ als oordinatenursprung und verkleinern gleichzeitig den Maßstab wie $1 : \sqrt{n}$. us diesen k Gleichungen kann man, wenn man $(n - k)$ der x_i festhält, e übrigen durch die Komponenten $u_1, \ldots, u_k$ von $\mathfrak{u}$ ausdrücken[8]),

[7]) Die in (1) auftretende Wahrscheinlichkeit $W_n(\mathfrak{u})$ dafür, daß für die Summe $+ \ldots + \mathfrak{y}_n$ die Beziehung

$$3') \qquad \sum_{r=1}^{n} \mathfrak{y}_r \leqq \sqrt{n}\,\mathfrak{u} + \mathfrak{b}_n$$

steht, wäre gegeben durch das gleiche nl-fache Integral wie (4′), aber erstreckt er den Teil des unendlichen nl-dimensionalen Raums, in dem (3′) gilt. $J_n(\mathfrak{u})$ ist so eine Differenz von 2^k Ausdrücken $W_n(\mathfrak{u})$, z. B. für skalares u ist $J_n(u)$ $W_n(u + du) - W_n(u)$.

[8]) Im Falle die Kurven konzentrische Kreise der Ebene mit den Radien $r_1, \ldots, r_n$ id, bezeichnen die Parameter $x_1, \ldots, x_n$ die Polarwinkel im Bogenmaß; für feste stimmte Winkel $x_1, \ldots, x_{n-2}$ ergeben sich auf den $(n-2)$ Kreisen von den Radien $\ldots, r_{n-2}$ Vektoren $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{n-2}$, deren Polarkoordinaten $x_1, r_1, \ldots, x_{n-2}, r_{n-2}$ id. Heißt $\mathfrak{v}$ die Vektorsumme dieser $(n-2)$ Vektoren, so müssen wir den Vektor $- \mathfrak{v})$ — wobei $\mathfrak{x} = \mathfrak{u}\sqrt{n} + \mathfrak{b}_n$ und $\mathfrak{u}$ der Vektor ist, der nach dem gegebenen nkt $\mathfrak{u}$ führt — in die Summe zweier Vektoren von den absoluten Beträgen r_{n-1} d r_n zerlegen; die Parallelogrammkonstruktion ergibt die Parameter x_{n-1}, x_n.

falls die betreffende Funktionaldeterminante nicht verschwindet: Schreibt wir die k Gleichungen (5) in Komponentenform

$$(5') \qquad u_p = \frac{1}{\sqrt{n}}[y_{p1}(x_1) + \ldots + y_{pn}(x_n) - b_{pn}] \equiv \varphi_p(x_1, \ldots, x_n) \qquad (p = 1, \ldots, k),$$

so ist

$$(5'') \qquad \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_r} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial y_{pr}}{\partial x_r},$$

und die Funktionaldeterminante

$$(6) \qquad D \equiv \frac{d(u_1, \ldots, u_k)}{d(x_1, \ldots, x_{n-k+1})} = n^{-\frac{k}{2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial y_{1,n-k+1}}{\partial x_{n-k+1}}, & \ldots, & \frac{\partial y_{1,n}}{\partial x_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial y_{k,n-k+1}}{\partial x_{n-k+1}}, & \ldots, & \frac{\partial y_{k,n}}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Wenn die Funktionen $u_1, \ldots, u_k$ im Punkte $(x^0_{n-k+1}, \ldots, x^0_n)$ Werte $u^0_1, \ldots, u^0_k$ annehmen und D in diesem Punkte *nicht verschwind* so kann man umgekehrt $x_{n-k+1}, \ldots, x_n$ als Funktionen von $u_1, \ldots,$ auffassen, die für $(u^0_1, \ldots, u^0_k)$ die Werte $(x^0_{n-k+1}, \ldots, x^0_n)$ annehm daselbst stetig und differenzierbar sind, und es ist:

$$(7) \qquad 1 = \frac{d(u_1, \ldots, u_k)}{d(x_n, \ldots, x_{n-k+1})} \cdot \frac{d(x_n, \ldots, x_{n-k+1})}{d(u_1, \ldots, u_k)} = D \cdot D'.$$

Wir nehmen an, daß solche Transformationsbedingungen entweder ganzen Integrationsgebiet *erfüllt sind*, oder nach entsprechender Teilu in jedem der Teile (sie können in einer k-dimensionalen Nullmenge v sagen). Durch diese Transformation geht J_n über in

$$(4'') \qquad J_n = \int v_1(x_1) \ldots v_{n-k}(x_{n-k}) v_{n-k+1}[x_{n-k+1}(u)] \ldots v_n[x_n(u)] \, |D'| \, dx_1 \ldots dx_{n-k} \, du_1 \ldots du_k,$$

erstreckt über das n-dimensionale der Transformation entspreche Integrationsgebiet. Die Funktionen $x_{n-k+1}(u), \ldots, x_n(u)$ in den ecki Klammern im Integranden von (3″) hängen natürlich außer von $u_1, \ldots, u_k$ noch von den $(n-k)$ Variablen $x_1, \ldots, x_{n-k}$ ab. In d n-fachen Integral (4″) ist die k-fache Integration nach $du_1, \ldots,$ gerade über ein k-dimensionales Intervall von der Größe $du_1 \cdot du_2 \cdot \ldots$ erstreckt. Wir lassen nun den Punkt $(u + du)\sqrt{n} + b_n$ immer näher $u\sqrt{n} + b_n$ heranrücken, d. h. wir bilden, um von der Wahrscheinlichkeit zur Wahrscheinlichkeitsdichte w_n zu gelangen, den k-fachen Lim

[9]) Mit der Akürzung $\lim_{du \to 0}$ sei der k-fache Limes $\lim_{du_1 \to 0, \ldots, du_k \to 0}$ gemeint.

$\lim_{\mathfrak{h}\to 0} \frac{J_n}{du \dots du_k}$. Entsprechend der Formel

$$\lim_{\mathfrak{h}\to 0} \frac{1}{h_1 \dots h_k} \int_0^{h_1} \dots \int_0^{h_k} f(x_1, \dots, x_k)\, dx_1, \dots, dx_k = f(0, \dots, 0)$$

halten wir:

$$w_n(\mathfrak{u}) = \int v_1(x_1) \dots v_{n-k}(x_{n-k})\, v_{n-k+1}[x_{n-k+1}(\mathfrak{u})] \dots v_n[x_n(\mathfrak{u})]\, |D'|\, dx_1, \dots, dx_{n-k}.$$

Dieses $(n-k)$-fache Integral, das für unser Problem die Wahrscheinlichkeitsdichte für jeden Punkt $\mathfrak{u}$ *des R_k ausdrückt*, bildet unseren usgangspunkt. Ist $\mathfrak{r}$ ein Vektor, der absolut größer ist als alle Vekren $\mathfrak{y}_r$, die nach den sämtlichen Punkten der n Kurven $C_\nu : \mathfrak{y}_r = \mathfrak{y}_r(\xi_\nu)$ $= 1, \dots, n$) führen, so verschwindet $w_n(\mathfrak{u})$ bei jedem endlichen n für le $\mathfrak{u}$, für die $n\mathfrak{r} \leqq \sqrt{n}\,\mathfrak{u} + \mathfrak{b}_n$, also $\mathfrak{u} \geqq \sqrt{n}\cdot\mathfrak{r} - \frac{\mathfrak{b}_n}{\sqrt{n}}$, somit außerhalb nes bestimmten k-dimensionalen Gebietes. Denn die Wahrscheinlichkeit für, daß die Summe aus n Vektoren $\mathfrak{y}_\nu$ einen Vektor ergibt, der $n\mathfrak{r}$ erträfe, ist natürlich gleich Null. *Wir wollen den* $\lim_{n\to\infty} w_n(\mathfrak{u})$ *unterchen.* Dabei ist w_n zunächst nur definiert für $n > k$; für $n = k$ wird

$$w_k(\mathfrak{u}) = |D'|\, v_1[x_1(\mathfrak{u})] \dots v_k[x_k(\mathfrak{u})],$$

bei $x_1, \dots, x_k$ als Funktionen der $u_1, \dots, u_k$ aus den k Gleichungen it nicht verschwindender Funktionaldeterminante $\mathfrak{y}_1(x_1) + \mathfrak{y}_2(x_2) + \dots$ $\mathfrak{y}_k(x_k) = \mathfrak{u}\sqrt{k} + \mathfrak{b}_k$ folgen. Alle weiteren $w_{k-1}(\mathfrak{u}), \dots, w_1(\mathfrak{u})$ sind eich Null anzusetzen.

2. Bezeichnungen und Voraussetzungen. Wir wollen im folgenn, wie wir es auch bisher getan haben, als laufenden Index für die hlen $1, 2, \dots, n$ den Index r oder ν, für die Zahlen $1, 2, \dots, k$ die dizes p, q oder λ, μ verwenden; mit i sei $\sqrt{-1}$ gemeint. Ein Integral ne spezielle Angabe der Grenzen sei über das skalare Intervall $(a\,b)$ streckt. — Zu unseren Verteilungen v_r definieren wir den „Mittelwert" a_r k-dimensionalen Vektor

$$a_r = \int \mathfrak{y}_r v_r\, dx; \qquad \sum_{r=1}^{n} a_r = \mathfrak{b}_n$$

d die „Streuung" $\{s_{\lambda\mu}^{(r)}\}$ als k-reihige *symmetrische* Matrix

$$s_{\lambda\mu}^{(r)} = \int v_r (y_{\lambda r} - a_{\lambda r})(y_{\mu r} - a_{\mu r})\, dx,$$

wir als positiv definit voraussetzen.

Die Reihe der Mittelwerte und Streuungen sei *beschränkt*, und wachse die Summe der letzteren wie n ins Unendliche.

$$(10') \quad \begin{cases} |a_r| < a; \qquad |s_{\lambda\mu}^{(r)}| < s \\ \sum_{r=1}^{n} s_{\lambda\mu}^{(r)} = t_{\lambda\mu}^{(n)}; \qquad \frac{t_{\lambda\mu}^{(n)}}{n} = h_{\lambda\mu}^{(n)}; \qquad \lim_{n\to\infty} h_{\lambda\mu}^{(n)} = h_{\lambda\mu}. \end{cases}$$

$h_{\lambda\mu}$ sei *endlich*. Die $h_{\lambda\mu}$ bilden die *positiv definite* Matrix der „rec zierten" Streuungen, die im folgenden eine wichtige Rolle spielt. — I $v_r(x)$ mögen *gleichmäßig für alle* r einer Lipschitzbedingung genüg d. h. die zu den einzelnen v_r gehörigen Zahlen M_r besitzen eine ob Schranke M.

3. Gang des Beweises. Beim Beweise von Sätzen wie (1) und kann man sich bekanntlich — im Falle mehrerer Variablen ebenso im Eindimensionalen — der Methode der „charakteristischen Funktione (Laplacesche Transformierte) oder „Adjunkten" einer Verteilung V_r b eines Integralproduktes W_n bedienen. Das sind gewisse den V_r bzw. W_n geordnete Funktionen f_r bzw. p_n von k Veränderlichen, für die die wicht Beziehung gilt, daß die Adjunkte des Integralproduktes gleich ist d gewöhnlichen Produkt der Adjunkten der einzelnen Verteilungen. So w die Untersuchung des Integralproduktes auf die eines gewöhnlichen P duktes zurückgeführt. Denn die Beziehung zwischen den Adjunkten Verteilungen spricht sich in dem — in dieser Schärfe wohl zuerst Herrn G. Pólya[10]) und Herrn P. Lévy[10]) bewiesenen — Satze aus (sich auf mehrdimensionale Adjunkten überträgt), daß die *notwendige hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Integralproduktes* W_n g *die Gaußsche Funktion* Φ *in der Konvergenz der Adjunkte von* W_n g *die Adjunkte von* Φ *besteht*. Daß schließlich das letztere (nämlich Konvergenz der Adjunkte von W_n gegen die Adjunkte von Φ) unter eigneten Voraussetzungen der Fall ist, ist mit Hilfe eines Satzes v. Mises über gewöhnliche Produkte leicht zu zeigen[11]).

Beim Beweis des Satzes (2), der ja gegenüber (1) eine Aussage die Konvergenz der Ableitungen macht, treten an Stelle des Pólya-L schen Satzes zwei andere Schritte: Man muß hier, wenn man weite Adjunkten verwendet, einerseits aus deren Definition, die diese aus Verteilungen ableitet, eine „Umkehrformel" gewinnen — diese vermi das Fouriersche Integraltheorem —, sodann den genannten Hilf über gewöhnliche Produkte noch etwas erweitern. — Wir wollen, da in unserem Fall ein analoger Beweisgang darbietet, den genannten

[10]) Vgl. l. c. [3]).

[11]) Vgl. l. c. [1]) Satz I S. 9, S. 15 und S. 18.

uktsatz sowie das Fouriersche Integraltheorem für k Dimensionen aus-
prechen, um mit ihrer Hilfe die Umkehrformel aufzustellen, die zum
esuchten Grenzwertsatz führt.

4. Satz von v. Mises über gewöhnliche Produkte[11]). Der bei
. Mises auch für mehrere Veränderliche ausgesprochene Satz lautet für
ehrere Variable: „Seien $f_r(\mathfrak{x})$ n Funktionen von je k Variablen $x_1, \ldots, x_k$,
indeutig definiert für alle endlichen und unendlichen $\mathfrak{x}$, sie mögen an einer
estimmten Stelle $\mathfrak{a}_r$ von $\mathfrak{x}$ jede den Wert 1 annehmen und seien dort
weimal stetig differenzierbar. Die ersten Ableitungen mögen dort ver-
chwinden, die zweiten seien durch die reelle nicht negative Matrix $\{s_{\lambda\mu}^{(r)}\}$
egeben, also

$$12) \qquad f_r(\mathfrak{a}_r) = 1; \quad \left(\frac{\partial f_r}{\partial x_\lambda}\right)_{\mathfrak{a}_r} = 0; \quad \left(\frac{\partial f_r}{\partial x_\lambda \partial x_\mu}\right)_{\mathfrak{a}_r} = -2 s_{\lambda\mu}^{(r)}.$$

ie dritten Ableitungen von $f_r(\mathfrak{x})$ haben an der Stelle $\mathfrak{a}_r$ eine endliche
bere Schranke gleichmäßig für alle f_r. Die Folge der $\mathfrak{a}_r$ und $s_{\lambda\mu}^{(r)}$ sei be-
chränkt, und es gelte:

$$13) \quad |\mathfrak{a}_r| < \mathfrak{a}; \quad |s_{\lambda\mu}^{(r)}| < s; \quad \sum_{r=1}^{n} s_{\lambda\mu}^{(r)} = t_{\lambda\mu}^{(n)}; \quad \frac{1}{n} t_{\lambda\mu}^{(n)} = h_{\lambda\mu}^{(n)}; \quad \lim_{n\to\infty} h_{\lambda\mu}^{(n)} = h_{\lambda\mu},$$

obei die $h_{\lambda\mu}$ eine positiv definite quadratische Form bilden. Dann gilt

$$14) \qquad \lim_{n\to\infty} p_n(\mathfrak{u}) = \lim_{n\to\infty} \left[f_1\left(\mathfrak{a}_1 + \frac{\mathfrak{u}}{\sqrt{n}}\right) \ldots . \; f_n\left(\mathfrak{a}_n + \frac{\mathfrak{u}}{\sqrt{n}}\right)\right] = e^{-\sum_{\lambda,\mu=1}^{k} h_{\lambda\mu} u_\lambda u_\mu}.$$

14) genügt zum Beweise des Satzes (1). Für unseren Fall (ebenso
ie für Satz (2)) braucht man noch die folgende *Erweiterung*, deren
eweis, falls das Grundintervall unendlich groß ist, einige Schwierigkeiten
reitet, die aber auch durch den zitierten Satz von v. Mises gedeckt wird:
Kommt zu den Voraussetzungen des eben genannten Satzes noch dazu:

1. An allen Stellen die von $\mathfrak{a}_r$ verschieden sind, sei der Absolutwert
n $f_r(\mathfrak{x})$ *kleiner als* 1 und habe auch nicht den Grenzwert 1 und zwar
lte das gleichmäßig für alle $f_r(\mathfrak{x})$.

2. Ist $\psi(\mathfrak{u})$ eine für alle reellen $\mathfrak{u}$ definierte in jedem endlichen
tervall integrable Funktion und ist

$$14') \qquad \lim_{n\to\infty} \int \ldots \int_{\mathfrak{x}}^{\infty} |p_n(\mathfrak{u}) \psi(\mathfrak{u}) d\mathfrak{u}| \to 0,$$

nn das k-fache Integrationsgebiet nach mindestens einer der Inte-
ationsvariablen bei hinlänglich großem X von X bis ∞ erstreckt wird,
gilt außer (14) auch:

$$15) \qquad \lim_{n\to\infty} \int p_n(\mathfrak{u}) \psi(\mathfrak{u}) d\mathfrak{u} = \int e^{-\sum_{1}^{k} h_{\lambda\mu} u_\lambda u_\mu} \psi(\mathfrak{u}) du_1 \ldots du_k$$

die k-dimensionalen Integrale erstreckt über jedes beliebige endliche od unendliche Intervall $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})$.

5. Funktionen von beschränkten Variationen (A)[12]. D Fouriersche Integraltheorem gilt auch im Mehrdimensionalen für Fun tionen von beschränkter Schwankung. Wir benutzen hier die Definiti von Herrn Arzelà, die allgemeiner als die Hardysche ist, weil sich diese die beschränkte Schwankung des Integralproduktes $w_n(u)$, auf die uns ankommt, leichter zeigen läßt; doch ist dies auch noch für Hardysche Definition möglich. — Arzelà führt die Definition Schwankung einer Funktion von k Variablen auf die einer Funkti von einer Variablen zurück. Sei $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})$ das k-dimensionale Definitio intervall von $f(\xi)$. Sei $\xi = \xi(t)$ die Gleichung einer die Punkte $\mathfrak{a}$ u $\mathfrak{b}$ verbindenden Kurve, deren sämtliche Komponenten *stetig* und *nicht nehmend* sind, also

$$\xi = \xi(t); \quad \xi(a) = \mathfrak{a}; \quad \xi(b) = \mathfrak{b}, \tag{16}$$

dann nennt man $\xi = \xi(t)$ einen *steigenden Kurvenbogen*. Durch

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b \tag{17}$$

ist eine Zerlegung Z dieses Bogens C gegeben. Wir bilden

$$V(Z) = \sum_{\nu=1}^{n} |f[\xi(t_\nu)] - f[\xi(t_{\nu-1})]| = \sum_{\nu=1}^{n} |\chi(t_\nu) - \chi(t_{\nu-1})|$$

$$P(Z) = \text{Summe der positiven Glieder}, \tag{18}$$

$$N(Z) = \text{Summe der negativen Glieder}.$$

Die obere Schranke aller $V(Z)$ für alle möglichen Zerlegungen von C heiße die *Variation von* $f(\xi)$ *auf* C. Sie ist endlich, w $\chi(t) = f[\xi(t)]$ von beschränkter Variation ist. Wir bezeichnen sie mit und es ist

$$V_C = P_C + N_C, \qquad f(\mathfrak{a}) - f(\mathfrak{b}) = P_C - N_C. \tag{19}$$

Wir betrachten nun alle möglichen stetigen steigenden $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{b}$ ver denden Kurvenbögen und berechnen die Variation auf ihnen; die ob Schranke all dieser Variationen heißt V. *Ist V endlich, so heißt* $f(\xi)$ *beschränkter Variation* (A) *in* $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})$; oder auch: $f(\xi)$ ist von beschrän Variation (A) in $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})$, wenn die für alle steigenden $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{b}$ verbinden Kurven $\xi = \xi(t)$ gebildeten Funktionen $\chi(t) = f[\xi(t)]$ von gleichm beschränkter Variation sind.

---

[12]) Funktionen von b. V. (A) lassen sich zerlegen in die Differenz von zwei F tionen, die im gewöhnlichen Sinne monoton sind; vgl. P. Arzelà, Sulle funcio variazione limitate. Rend. di Bol. (1904/5 und 1907).

6. Das Fouriersche Integraltheorem. Aus den Definitionen und Resultaten der mehrfachen Fourierreihen ergibt sich das Fouriersche Integraltheorem: „Ist $\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ im positiv Unendlichen absolut integrabel, so gilt

$$20) \quad \int_0^\infty d m_1 \ldots d m_k \int_0^\infty \varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \cos m_1 \alpha_1 \ldots \cos m_k \alpha_k \, d\alpha_1 \ldots d\alpha_k = \left(\frac{\pi}{2}\right)^k \varphi(+0, \ldots, +0),$$

falls $\varphi(\alpha_1 \ldots \alpha_k)$ noch in einer positiven „kreuzförmigen“ [13]) Umgebung des Nullpunktes von b. V. (A) ist.“ Und nach bekannter einfacher Substitution gilt die weitere Formel:

$$21) \quad \int_0^\infty d m_1 \ldots d m_k \int_{-\infty}^\infty f(\alpha_1 \ldots \alpha_k) \cos m_1 (\alpha_1 - x_1) \ldots \cos m_k (\alpha_k - x_k) \, d\alpha_1 \ldots d\alpha_k = \left(\frac{\pi}{2}\right)^k [f(x_1 + 0, \ldots, x_k + 0) + \ldots + f(x_1 - 0, \ldots, x_k - 0)],$$

„falls $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ im Unendlichen absolut summierbar ist, und in einer „kreuzförmigen“ Umgebung des Punktes $(x_1, \ldots, x_k)$ von b. V. (A) ist. Wir benötigen (21) zufolge des beschränkten Definitionsintervalls der Kurven C_ν unter spezielleren Voraussetzungen; wir werden nämlich zeigen, daß unsere Funktion $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ — als solche tritt, wie schon erwähnt, das Integralprodukt w_n auf — überall, wo sie nicht verschwindet, von beschränkter Schwankung ist.

7. Komplexe Adjunkte von $V_r(x)$ und $W_n(\mathfrak{u})$. Komplexe Adjunkte von V_r heiße (die Multiplikationspunkte bezeichnen „skalare Produkte“)

$$22) \quad f_r(\mathfrak{u}) = \int e^{i(\mathfrak{u} - \mathfrak{a}_r) \cdot (\mathfrak{v}_r(t) - \mathfrak{a}_r)} v_r(t) \, dt,$$

dann ist

$$23) \quad f_r(\mathfrak{a}_r) = 1; \quad \left(\frac{\partial f_r}{\partial x_\lambda}\right)_{\mathfrak{a}_r} = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 f_r}{\partial x_\lambda \partial x_\mu}\right)_{\mathfrak{a}_r} = -s^{(r)}_{\lambda\mu}$$

und analog die komplexe Adjunkte des Integralprodukts:

$$24) \quad p_n(\mathfrak{u}) = \int e^{i \mathfrak{z} \cdot \mathfrak{u}} w_n(\mathfrak{z}) \, dz_1 \ldots dz_k,$$

integriert über den endlichen Bereich, in dem $w_n(\mathfrak{u})$ von Null verschieden ist. Setzt man in (24) an Stelle von $z_1, \ldots, z_k$ nach (5) wieder $x_n, \ldots, x_{n-k+1}$

$$5'') \quad z_\lambda = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{r=1}^{n} (y_{\lambda r} - a_{\lambda r}),$$

---

[13]) Vgl. H. Geiringer, Trigonometrische Doppelreihen, Monatshefte f. Math. u. Phys. 29 (1917), S. 65—144.

so wird (24), wenn für w_n sein Wert nach (8) steht:

$$p_n(u) = \int D \cdot \frac{1}{D} e^{i\sqrt{n}\left[u_1 \sum_{r=1}^{n}(y_{1r}-a_{1r})+\ldots+u_k(y_{kr}-a_{kr})\right]} v_1(x_1)\ldots v_n(x_n)dx_1\ldots dx_n$$

$$(25) \quad = \int e^{i\sqrt{n}\,u\cdot(y_1-a_1)} v_1(x_1)dx_1 \ldots \int e^{i\sqrt{n}\,u\cdot(y_n-a_n)} v_n(x_n)dx_n$$

$$= f_1\left(a_1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\cdots f_n\left(a_n+\frac{u}{\sqrt{n}}\right).$$

Durch das in (25) gegebene *Multiplikationsgesetz der komplexen A junkten* wird die *Zurückführung des Integralprodukts auf gewöhnlic Produkte* vermittelt. — Man sieht aus (23), daß f_r und p_n die für gleichbezeichneten Funktionen in Nr. 4 gestellten Bedingungen (12) u (13) erfüllen, auch die dritten Ableitungen von (22) (das sind ja die dritt Momente) sind beschränkt[13a]), also ergibt (14) — mit Rücksicht auf ein kleinen Unterschied in der Normierung in (23) und (12) — für das du (24) definierte p_n:

$$(26) \qquad \lim_{n\to\infty} p_n(u) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{1}^{k} h_{\lambda\mu}u_\lambda u_\mu},$$

wobei man, da auch die Zusatzbedingungen des Korollars von Nr. 4, man analog zum gewöhnlichen eindimensionalen Fall (l. c. [1]) S. 32) na weisen kann, erfüllt sind, (26) ebenso, wie in (15) geschah, üb $\psi(u)du_1, \ldots, du_k$ auf beiden Seiten integrieren darf.

8. Ableitung einer Umkehrformel zu (24). Dies geschieht du Anwendung des Fourierschen Theorems (21) auf den in (8) definier Ausdruck $w_n(u)$. Wir wollen zeigen, daß $w_n(u)$ in jedem endlich Gebiet von beschränkter Schwankung ist. Die $u_1, \ldots, u_k$ treten in nur in $v_{n-k+1}[x_{n-k+1}(u)], \ldots, v_n[x_n(u)]$ auf; wir untersuchen also beliebiges $v_r(x_r(u))$ $(r = 1, \ldots, n)$.

Nach Voraussetzung genügen die v_r einer Lipschitzbedingung; M_r die Konstante der Lipschitzbedingung. Weiters folgt aus der vora gesetzten Stetigkeit und Differenzierbarkeit der gegebenen Kurven (Nr. 1), daß in den aus (5′) sich ergebenden Gleichungen

$$(5''') \qquad x_{n-k+1} = x_{n-k+1}(u), \ \ldots, \ x_n = x_n(u)$$

die $\frac{\partial x_{n-k+1}}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial u_\lambda}$ sicher beschränkt sind. Wir wollen eine Zahl, die alle übertrifft, A nennen. Wir betrachten nun eine beliebige „steigen

---

[13a]) Die Beschränktheit sämtlicher Momente zeigt v. Mises l. c. [1]) S. 28 u der Voraussetzung, daß die Wahrscheinlichkeitsdichten v_r sämtlich im Unendlic genug stark gegen Null gehen. Da unsere $v_r(x_r)$ $(r = 1, \ldots, n)$, nur in einem lichen Intervall $(a\,b)$ von Null verschieden sind, so können wir dies Resultat — sich auch leicht direkt ergäbe — übernehmen.

ei beliebige im Endlichen gelegene Punkte des R_k verbindende Kurve $= \mathfrak{u}(t)$ und wollen auf dieser die Variation von $v_r[x_r(u_1, \ldots, u_k)]$ berechnen. Wir können hier statt $v_r(x_r)$: $v(x)$ schreiben. Es ist

$$7) \quad \sum_{\nu=1}^{n} |v(x_\nu) - v(x_{\nu-1})| = \sum_{\nu=1}^{n} \left| \frac{v(x_\nu) - v(x_{\nu-1})}{x_\nu - x_{\nu-1}} \right| |x_\nu - x_{\nu-1}| < M \sum_{\nu=1}^{n} |\Delta x_\nu|,$$

enn $x_\nu - x_{\nu-1} = \Delta x_\nu$ und weiters

$$8) \quad \Delta x_\nu = \left[\sum_{p=1}^{k} \frac{\partial x}{\partial u_p} \Delta u_p \right]_\nu.$$

abei bedeutet der Index ν folgendes: Der Parameter t der steigenden urve, der von t_0 nach t_n geht, habe den Wert t_ν, somit ist der ν-te unkt $u_1^{(\nu)}, \ldots, u_k^{(\nu)}$ der steigenden Kurve betrachtet, und x_ν ist eine Abirzung für $x(u_1^{(\nu)}, \ldots, u_k^{(\nu)}) \equiv x[u_1(t_\nu), \ldots, u_k(t_\nu)]$. Nach (28) ist

$$9) \quad |\Delta x_\nu| < A[|\Delta u_1| + \ldots + |\Delta u_k|].$$

nd da $|\Delta u_p| \leqq \sqrt{(\Delta u_1)^2 + \ldots + (\Delta u_k)^2} = \Delta s$, so ist, da die betrachtete urve als steigende jedenfalls rektifizierbar ist, wenn L ihre Länge bedeutet, i immer dichter werdenden Teilungspunkten

$$0) \quad \lim_{\nu \to \infty} \sum_{\nu=1}^{n} |\Delta x_\nu| \leqq A \cdot k \cdot L,$$

mit ist auf dieser steigenden Kurve

$$1) \quad \mathrm{Var}[v[x(u_1, \ldots, u_k)]] \leqq M A k L,$$

d da alle Größen rechts in (31) auf allen steigenden Kurven beschränkt nd, so ist $v_r[x_r(\mathfrak{u})]$ nach $u_1, \ldots, u_k$ in jedem endlichen Intervall von V. (*A.*). Dasselbe gilt für das Produkt der $v_n[x_n(\mathfrak{u})]$, $v_{n-1}[x_{n-1}(\mathfrak{u})]$, ., $v_{n-k+1}[x_{n-k+1}(\mathfrak{u})]$ und damit bei endlichem n für $w_n(\mathfrak{u})$.[14])

Da überdies $w_n(\mathfrak{u})$ seiner Bedeutung gemäß außerhalb eines bemmten beschränkten Raumteiles des R_k verschwindet, können wir nun

[14]) Man hätte auch voraussetzen können, daß die $v_r(x_r)$ alle von gleichmäßig schränkter Variation nach x_r sind; dann ist das Produkt von k von ihnen sicher n k dimensionaler beschränkter Variation (sowohl nach Arzelà wie nach Hardy) ch durch Integration wie in w_n wird das nicht gestört, und es wäre zu zeigen, daß, nn man die k Parameter $x_n, \ldots, x_{n-k+1}$ durch eine reguläre Transformation in $\ldots, u_k$ transformiert, die so entstehende Funktion von $u_1, \ldots, u_k$ noch immer n beschränkter Variation ist.

auf $w_n(\mathfrak{u})$ das Fouriersche Integraltheorem (21) anwenden. Dies ergi
da alle Sinusglieder verschwinden:

$$w_n(\mathfrak{u}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^k \int e^{i(\mathfrak{x}-\mathfrak{u})\cdot\mathfrak{z}}\, w_n(\mathfrak{x})\, dx_1 \dots dx_k\, dz_1 \dots dz_k$$

$$(32') \qquad = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^k \int e^{-i\mathfrak{z}\cdot\mathfrak{u}}\, dz_1 \dots dz_k \int w_n(\mathfrak{x})\, e^{i\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{z}}\, dx_1 \dots dx_k$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\mathfrak{z}\cdot\mathfrak{u}}\, p_n(\mathfrak{z})\, dz_1 \dots dz_k.$$

Somit lautet die gesuchte Umkehrformel

$$w_n(\mathfrak{u}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^k \int e^{-i\mathfrak{z}\cdot\mathfrak{u}}\, p_n(\mathfrak{z})\, dz_1 \dots dz_k.$$

9. Aus (26) und (32′) folgt unter Anwendung des Korollars v
Nr. 4 mit $\psi(\mathfrak{z}) = e^{i\mathfrak{z}\cdot\mathfrak{u}}$

$$(32) \qquad \lim_{n\to\infty} w_n(\mathfrak{u}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\mathfrak{z}\cdot\mathfrak{u}}\, e^{-\frac{1}{2}\sum_1^k h_{\lambda\mu} z_\lambda z_\mu}\, dz_1 \dots dz_k.$$

Hier läßt sich das k-fache Integral noch ausrechnen. Dies geschieht e
weder durch k-fache Anwendung der Formel

$$(33) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pz^2 - 2qz}\, dz = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{\frac{q^2}{p}},$$

oder indem man $\sum_1^k h_{\lambda\mu} z_\lambda z_\mu$ durch die orthogonale Transformat
$\zeta_\lambda = \sum_1^k \alpha_{\lambda\mu} z_\mu$ auf eine reine Quadratform $\sum_1^k h_p \zeta_p^2$ bringt, wo die h_p
reziproken Eigenwerte der betrachteten quadratischen Form sind. Dann v

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sum_1^k (\zeta_p \eta_p - \frac{1}{2} h_p \zeta_p^2)}\, d\zeta_1 \dots d\zeta_p$$

$$(34) \qquad = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\zeta_1\eta_1 - \frac{1}{2}h_1\zeta_1^2}\, d\zeta_1, \dots \cdot \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\zeta_k\eta_k - \frac{1}{2}h_k\zeta_k^2}\, d\zeta_k$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k h_1 \dots h_k}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\eta_1^2}{h_1} + \dots +\right.}$$

it $\eta_\lambda = \sum_1^k \alpha_{\lambda\mu} u_\mu$, und wenn man schließlich wieder zu den ursprüng-
hen Variablen zurückkehrt, ergibt sich

$$w(\mathfrak{u}) \equiv \lim_{n\to\infty} w_n(\mathfrak{u}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k H}}\, e^{-\frac{\sum_1^k H_{\lambda\mu} u_\lambda u_\mu}{2H}} \tag{35}$$

abei ist H die k-reihige Determinante aus den $h_{\lambda\mu}$, und $H_{\lambda\mu}$ die zu
$_\mu$ gehörige Unterdeterminante. Wir haben somit die gewünschte Ver-
lgemeinerung der Formel (2) auf unser Kurvenproblem bewiesen. Den
erhaltenen Satz wollen wir nun *ohne* die in Nr. 1 zur Vereinfachung
er Rechnung gemachte Einschränkung auf Kurven, d. h. auf den Fall
on *skalaren* Parametern x_r aussprechen:

*Kommen den n l-dimensionalen Vektoren $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ die l-dimen-
onalen Wahrscheinlichkeitsdichten $v_\nu(\mathfrak{x}_\nu)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ zu und sind
$= \mathfrak{y}_1(\mathfrak{x}_1), \ldots, \mathfrak{y}_n = \mathfrak{y}_n(\mathfrak{x}_n)$ die Gleichungen von n l-dimensionalen
lächen im k-dimensionalen Raum, so besteht für den k-dimen-
onalen Summenvektor $\mathfrak{y} = \sum_{r=1}^n \mathfrak{y}_r(\mathfrak{x}_r) = \sqrt{n}\,\mathfrak{u} + \mathfrak{b}_n$ dieser n Vektoren $\mathfrak{y}_r$,
ie jeder auf ihrer Fläche variieren, die durch (8) gegebene Wahrschein-
chkeitsdichte $w_n(\mathfrak{u})$; beim Übergang $n \to \infty$ gilt in jedem endlichen
ereich von $\mathfrak{u}$ in allen Stetigkeitspunkten die Gleichung (35) für*
$(\mathfrak{u}) \equiv \lim_{n\to\infty} w_n(\mathfrak{u})$, *während in anderen Punkten*[15]) *an Stelle von* $w(\mathfrak{u})$
as arithmetische Mittel aus den 2^k *Werten* $w(u_1 \pm 0, \ldots, u_k \pm 0)$ *tritt.*
ie Voraussetzungen über die $\mathfrak{y}_r$ *und* v_r *sind im Falle* $l = 1$ in Nr. 1
zw. 2 formuliert. Im Falle $l \neq 1$ erleiden sie naheliegende Modifikationen.

ie $\mathfrak{b}_n = \sum_1^n \mathfrak{a}_r$ und $h_{\lambda\mu}$ sind dann wie in Nr. 2 doch als l-dimensionale
ntegrale zu definieren. — Für $l = k$ geht unser l-dimensionales Flächen-
roblem über in ein „Transformationsproblem", für das noch immer (35)
lt. Doch ist für diesen Fall die ganze hier gegebene Ableitung unnötig,
ielmehr ist die Lösung schon durch die in der Einleitung erwähnte
nmittelbare Verallgemeinerung der Formel (2) auf k Dimensionen ge-
eben.

---

[15]) Auch für Funktionen von k Veränderlichen $f(x_1, \ldots, x_k)$ gilt ebenso wie im
indimensionalen, daß Funktionen „von beschränkter Schwankung" nur Stetigkeits-
unkte oder Unstetigkeitspunkte erster Art besitzen. (Die letzteren sind solche, in
nen die 2^k limiten $f(x_1 + 0, \ldots, x_k + 0), \ldots, f(x_1 - 0, \ldots, x_k - 0)$ existieren.)

§ 2.

Die Laue-Einsteinsche Fragestellung.

10. Die Statistik der Fourierkoeffizienten. In der unter zitierten ersten Arbeit behandelt v. Laue das folgende Problem: Ei Reihe von n Resonatoren strahlen in der Zeit von $-T$ bis $+T$ a die gleiche Schwingung in der gleichen Richtung aus, die durch die Rei

$$\Re\left\{\sum_p a'_p e^{i\left(\frac{\pi p t}{T}-\vartheta_p\right)}\right\} \tag{36}$$

dargestellt ist. Vom Aufpunkt aus gesehen, liegen die Strahlungsquell alle auf einer Geraden oder, wie man vielleicht anschaulicher sagen kan in einem sehr kleinen körperlichen Winkel und sind innerhalb dieses Wink über eine gegen die Wellenlänge große Strecke von der Länge $l = 2$ (c = Lichtgeschwindigkeit) gleichmäßig verteilt. Der Mittelpunkt der v den Resonatoren erfüllten Strecke habe vom Aufpunkt den Abstand so daß der Radiusvektor r_ν des ν-ten Resonators, der vom Mittelpun der Resonatorenstrecke den Abstand ϱ_ν hat, durch $r_\nu = R + \varrho_\nu$ gegeb ist. Die Schwingung des ν-ten Resonators kommt dann mit einer gewiss *Verzögerung* t_ν im Aufpunkt an, wobei $\varrho_\nu = 2ct_\nu$ gesetzt ist. Der Absta aller Resonatoren vom Aufpunkt, also die Strecke R wird als so gr gegen die Strecke l betrachtet, daß die Abstandsunterschiede keinen me lichen Einfluß auf die Intensitäten a_p der im Aufpunkt ankommend Strahlung haben. Die Gesamtschwingung im Aufpunkt wird dann d gestellt durch

$$\begin{aligned}&\Re\left\{\sum_{p=1}^{\infty} a_p \sum_{r=1}^{n} e^{i\left(\frac{\pi p (t-t_r)}{T}-\vartheta_p\right)}\right\}\\ &= \Re\left\{\sum_{p=1}^{\infty} a_p e^{i\frac{\pi p t}{T}} \sum_{r=1}^{n}\left[\cos\left(\frac{\pi p t_r}{T}+\vartheta_p\right) - i\sin\left(\frac{\pi p t_r}{T}+\vartheta_p\right)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{37}$$

Entsprechend der gleichmäßigen Verteilung der Resonatoren sind a die Verzögerungszeiten t_r gleichmäßig über die Zeitstrecke $(-\tau, +\tau)$ v teilt. τ muß, da sich die betrachteten n Schwingungen nur in einem Z raum von der Länge $T - \tau$ überlagern, kleiner als T sein. Die Koe zienten der Reihe (37) sind

$$A_p = a_p \sum_{r=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi p t_r}{T}+\vartheta_p\right), \qquad B_p = a_p \sum_{r=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi p t_r}{T}+\vartheta_p\right). \tag{38}$$

Gefragt ist nach dem *Wahrscheinlichkeitsgesetz der Koeffizienten* A_p, Unser Satz (35) beantwortet diese Frage für die ersten $2k$ Koeffizien

$_p$ und B_p; $t_1, \ldots, t_n$ sind die hier — tatsächlich skalaren — Wahrscheinlichkeitsgrößen. Die ihnen zukommenden Wahrscheinlichkeitsdichten v_r ind zufolge der über die statistische Gleichförmigkeit des Zeitraums $(-\tau, +\tau)$ emachten Annahme einfach konstant gleich $\frac{1}{2\tau}$. Die A_p und B_p zuammen fassen wir als die Komponenten eines $(2k)$-dimensionalen Vektors $= \mathfrak{u}\sqrt{n} + \mathfrak{b}_n$ auf; die Komponenten der $(2k)$-dimensionalen Vektoren $\mathfrak{y}_r(t_r)$ nseres Satzes sind die Funktionen

39) $$\bar{y}_{pr} = a_p \cos\left(\frac{\pi p t_r}{T} + \vartheta_p\right); \qquad y_{pr} = a_p \sin\left(\frac{\pi p t_r}{T} + \vartheta_p\right),$$

nd gefragt wird gerade nach der Wahrscheinlichkeitsdichte der Summe $\sum_{r=1}^{n} \mathfrak{y}_r(t_r)$ im Punkte $\mathfrak{u} = \frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{b}_n}{\sqrt{n}}$, d. h. nach dem Wahrscheinlichkeitsesetz der $(2k)$ ersten Fourierkoeffizienten.

Unser Satz beantwortet also tatsächlich die Frage nach dem statistichen Gesetz der ersten $2k$ Fourierkoeffizienten einer Schwingung, die urch Überlagerung sehr vieler Einzelstrahlungen entsteht. Man sieht, aß in dem eben besprochenen Beispiel eine besondere Spezialisierung ieser Fragestellung vorliegt, z. B. in der hier gemachten Annahme, daß ie n Resonatoren alle die *gleiche* Schwingung (36) ausführten; läßt man iese fallen, so tritt an Stelle von (36)

36′) $$\Re\left\{\sum_{p=1}^{\infty} a'_{pr} e^{i\left(\frac{\pi p t_r}{T} - \vartheta_{pr}\right)}\right\};$$

odann vor allem in der Vorstellung der gleichmäßigen Verteilung der esonatoren, der zufolge die t_r gleichmäßig über die Strecke $(-\tau, +\tau)$ erteilt waren, und die Wahrscheinlichkeitsdichte v_r einfach konstant urde (was, wenn etwa der die Strahlungsquellen enthaltende Körper von eränderlicher Dichte ist, nicht zutrifft); unser Satz von S. 699 läßt hingegen eine beliebige Funktion zu, die einer Lipschitzbedingung genügt der allgemeiner von beschränkter Schwankung ist. Schließlich lag hier er Spezialfall einer eindimensionalen Gruppe von Wahrscheinlichkeitsarametern t_r vor (also der von uns in § 1 durchgerechnete Fall von Kurven“ im R_{2k}); charakterisiert man etwa die Lage jedes Resonators urch drei Koordinaten — bis jetzt nahmen wir alle Resonatoren linear erteilt oder „innerhalb eines so kleinen körperlichen Winkels“ an, daß ur eine Koordinate ϱ_r auftrat —, so liegt schon eine dreidimensionale arametergruppe ξ_r vor; und unser Satz gilt, wie wir am Ende von Nr. 9 eststellten, für beliebige Dimensionszahl l der Parametergruppe, wenn ur $l \leqq 2k$. Von Herrn v. Laue werden in der gleichen Arbeit auch llgemeinere Beispiele durchgeführt.

Zusammengefaßt ergibt die Anwendung von (35) auf die Statistik d Fourierkoeffizienten einer aus Einzelschwingungen resultierenden Strahlu folgendes Resultat, das wir, um wieder k statt $2k$ schreiben zu könn so aussprechen wollen, als ob etwa nur Cosinus-Koeffizienten in den Schwingungen auftreten würden:

Man betrachte n Schwingungen von n Resonatoren, die jede dur ihre k ersten Fourierkoeffizienten a_{pr} gegeben sind, sowie n den Reson toren zugeordnete l-dimensionale Parametergruppen $\mathfrak{x}_r$, z. B. Verzögerun zeiten, Raumkoordinaten, die die Lage der Resonatoren festlegen, od. dgl *die l-dimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte der r-ten Parametergrup sei gegeben durch $v_r(\mathfrak{x}_r)$. Die ersten k Koeffizienten der resultierend Strahlung sind $A_1, \ldots, A_k$* wobei A_p sich als Summe: mit $A_p = y_{p1}($ $+ \ldots + y_{pn}(\mathfrak{x}_n)$ $(p = 1, \ldots, k)$ ergibt (wir schreiben in den Funktionen nur die Parameter $\mathfrak{x}$ explizit an). *Dann ist, wenn man die $A_1, \ldots,$ zu einem Vektor $\mathfrak{A}$ zusammenfaßt, und $\mathfrak{A} = \sqrt{n}\,\mathfrak{u} + \mathfrak{b}_n$* setzt, das *Wa scheinlichkeitsgesetz der k ersten Koeffizienten A_p* gegeben durch Gaußsche Gesetz

$$(40) \qquad \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k H}} \cdot e^{-\sum_1^k \frac{H_{\lambda\mu}}{2H} u_\lambda u_\mu},$$

für alle im Endlichen gelegenen $\mathfrak{u}$, *wenn für die y_{pr} und v_r die Vora setzungen des Satzes Nr.* 10 *erfüllt sind* — die z. B. in allen von v. La durchgerechneten Fällen reichlich zutreffen[16]); *dabei sind die $h_{\lambda\mu}$ aus den y_{pr} und v_r zu berechnenden, in Nr.* 2 *definierten „reduzier Streuungen", und die $\frac{H_{\lambda\mu}}{H}$ die Glieder der zu der k-reihigen Determina aus den $h_{\lambda\mu}$ „reziproken" Determinante.*

11. Der Spezialfall statistischer Unabhängigkeit. v. Laue u Einstein beschäftigen sich speziell mit der Frage der sogenannten „s tistischen Unabhängigkeit der Fourierkoeffizienten. Ein Koeffizient A_p he von den vorangehenden *statistisch unabhängig*, wenn das Wahrscheinli keitsgesetz der Koeffizienten $A_1, \ldots, A_p$ aus dem der Koeffizien $A_1, \ldots, A_{p-1}$ durch Multiplikation mit $\frac{1}{\sqrt{h_{pp}}} e^{-\frac{u_p^2}{2h_{pp}}}$ entsteht (wobei n der in Nr. 2 gegebenen Definition $h_{pp}^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} \int v_r y_{pr}^2 \, dx$), also du

[16]) Die von v. Laue gegebene Ableitung des Wahrscheinlichkeitssatzes bed sich des Dirichletschen diskontinuierlichen Faktors. Sie ist rein formal. Über verwendete Methode sagt Markoff, der sich ihrer in dem „Lehrbuch der W scheinlichkeitsrechnung" bedient: Der Fehler dieser näherungsweisen Berechn bleibe dahingestellt.

ultiplikation mit der A_p zukommenden Wahrscheinlichkeitsdichte; man eht, daß eine notwendige und hinreichende Bedingung für die statistische nabhängigkeit aller Koeffizienten $A_1, \ldots, A_k$ voneinander in dem *Verhwinden der reduzierten Streuungen* $h_{\lambda\mu}$ *mit gemischten Indizes* besteht. s ist klar — und eben das wird in der v. Laueschen ersten Arbeit an ehreren Einzelfällen dargetan und in der Einsteinschen Erwiderung estätigt —, daß aus der bloßen Tatsache, daß eine Fourierreihe als esultantenreihe aus vielen Einzelschwingungen entsteht, *keineswegs* [außer nter recht speziellen Annahmen (vgl. v. Laue, l. c. [6] a) § 4: „Die ragestellung von Einstein und Hopf")] die statistische Unabhängigkeit er Fourierkoeffizienten folgt. Nimmt man aber mit Einstein an, daß r die Koeffizienten einer Fourierreihe, gleichgültig ob diese aus Einzelhwingungen entstanden sei oder nicht, das statistische Gesetz (35) nun nmal bestehe, so gilt jedenfalls

$$h_{\lambda\mu} = \int w(u_1, \ldots, u_k)\, u_\lambda u_\mu\, du_1 \ldots du_k. \tag{1}$$

instein zeigt dann (l. c. [6] b), daß unter gewissen physikalisch plaublen Voraussetzungen die $h_{\lambda\mu}$ mit gemischten Indizes tatsächlich verhwinden, also statistische Unabhängigkeit vorhanden ist. Wir wollen rauf nicht näher eingehen.

12. Übergang vom Fourierschen Polynom zur Fourierreihe. der zweiten dem Gegenstand gewidmeten Arbeit wird dieses Einsteinhe Resultat von v. Laue aufgenommen und der Beweisgang etwas odifiziert und verallgemeinert. v. Laue bemerkt bei dieser Gelegenheit, daß r ein Wahrscheinlichkeitsgesetz eigentlich für *unendlich viele* Veränderliche $, \ldots, A_k, \ldots$ (resp. $u_1, \ldots, u_k, \ldots$) benötigen, da wir es im allgemeinen it den unendlich vielen Koeffizienten der resultierenden Fourier*reihe*, cht mit den endlich vielen eines Polynoms zu tun haben, also daß in serer früheren Ausdrucksweise unendlich-dimensionale Flächendichten abzählbar-unendlich-dimensionalen Raum R_∞ betrachtet werden müßten d auch eine Wahrscheinlichkeitsdichte $w(u_1, u_2, \ldots)$ im R_∞ gesucht wäre. bei ist aber zu beachten, daß, — wenn wir mit $H^{(p)}$ resp. $H^{(p)}_{\lambda\mu}$ die Determinante p-ter Ordnung aus den $h_{\lambda\mu}$ resp. die in $H^{(p)}$ zu $h_{\lambda\mu}$ adjungierte nterdeterminante bezeichnen, — wir es bei wachsendem p mit einer *Folge* n Ausdrücken

$$\frac{1}{\sqrt{H^{(p)}}}\, e^{-\sum_1^p u_\lambda u_\mu \frac{H^{(p)}_{\lambda\mu}}{H^{(p)}}} \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{10'}$$

tun haben. Nur im Fall *statistischer Unabhängigkeit* der Fourierffizienten verändert sich bei Hinzunahme eines weiteren $(k+1)$-ten

Koeffizienten A_{k+1} das Wahrscheinlichkeitsgesetz, das ja in diesem Fall ein k-faches Produkt zerfällt:

$$w(u_1, \ldots, u_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k h_{11} h_{22} \ldots h_{kk}}} \cdot e^{-\sum_1^k \frac{u_p^2}{h_{pp}}} \tag{42}$$

definitionsgemäß nur durch Hinzutreten eines weiteren $(k+1)$-ten Fakt

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi h_{k+1,k+1}}} \cdot e^{\frac{u_{k+1}^2}{h_{k+1}}}$$

(Eine von v. Laue in der genannten Arbeit für unendl viele Veränderliche angestellte Betrachtung ist nicht stichhaltig. Sie geht von aus, die quadratische Form $\sum \frac{H_{\lambda\mu}^{(p)}}{H^{(p)}} u_\lambda u_\mu$ — bei v. Laue Formel (der zweiten zitierten Abhandlung — in die Form $\iint K(ut) f(u) f(t)\, du$ zu setzen. Eine solche Formel — das Parsevalsche Theorem für Fu tionen von zwei Variablen auch als „Vollständigkeitsrelation" in der Theo der unendlich vielen Variablen bezeichnet — ist aber hier sicher nicht wendbar. Denn erstens wird gar nicht berücksichtigt, daß doch in unser Fall die $\frac{H_{\lambda\mu}^{(p)}}{H^{(p)}}$ eine von p abhängige Folge bilden. Sollte aber statt der $\lim_{p\to\infty} \frac{H_{\lambda\mu}^{(p)}}{H^{(p)}} \equiv \frac{H_{\lambda\mu}}{H}$ zu verstehen sein, so wäre noch die Konvergenz Doppelfolge $\sum \left(\frac{H_{\lambda\mu}}{H}\right)^2$ zu zeigen. Diese aber ist z. B. in allen v. Laue durchgerechneten Fällen nicht vorhanden. Hingegen konverg in diesen Fällen die „reziproke" Doppelfolge $\{h_{\lambda\mu}^2\}$, da die $h_{\lambda\mu}$, wie ausrechnen kann, im wesentlichen Fourierkoeffizienten der erzeugen Resonatoren sind; die $h_{\lambda\mu}$ haben auch — anders als die $\frac{H_{\lambda\mu}^{(p)}}{H^{(p)}}$ — Bedeutung unabhängig von p, was man zufolge der Gestalt von $w^{(k)}$ Gaußsches Exponentialgesetz aus

$$\begin{aligned} h_{\lambda\mu}^{(k+1)} &= \int w^{(k+1)}(u_1, \ldots, v_{k+1})\, u_\lambda u_\mu\, du_1 \ldots du_{k+1} \\ &= \int w^{(k)}(u_1, \ldots, u_1 \quad u_\lambda u_\mu\, du_1 \ldots du_k = h_{\lambda\mu}^{(k)} \end{aligned} \tag{43}$$

sieht. Die Folge der $h_{\lambda\mu}$ ist eine gewöhnliche Doppefolge, und $\sum h_{\lambda\mu}^2$ konvergiert, gibt es eine „Streuungsfunktion" $H(ut)$, als d Fourierkoeffizienten die $h_{\lambda\mu}$ von beliebigem Index berechnet wer können. Im Falle statistischer Unabhängigkeit, wo nur die h_{pp} $(p = 1, 2$ von Null verschieden sind, reduziert sich auch die Streuungsfunktion H auf eine Funktion *einer* Variablen $H(t)$, deren Fourierkoeffizienten h_{pp} sind; dahin ist die diesbezügliche in Formel (21) bei v. Laue gesprochenen Bemerkung zu modifizieren.)

Aber eigentlich ist eine Untersuchung von $\lim_{k\to\infty} w^{(k)}$ weder vom phy-
kalischen noch vom mathematischen Standpunkt geboten. Denn wir
brauchen ja nicht ein Wahrscheinlichkeitsgesetz $w^{(\infty)}$ für aktual unendlich
viele Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots$, sondern wollen nur wissen, ob man das
Gesetz für beliebig viele aber endlich viele Koeffizienten richtig erhält,
wenn man es ohne Rücksicht auf weitere Koeffizienten berechnet. Diese
Frage aber *ist, wieder nach der speziellen Gestalt von* (40) *als Gaußsches*
Gesetz, zu bejahen, auch sogar im Falle statistischer Abhängigkeit. Denn ist

$$w^{(k)}(u_1, \ldots, u_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k H^{(k)}}} e^{-\sum_1^k u_\lambda u_\mu \frac{H_{\lambda\mu}^{(k)}}{H^{(k)}}} \tag{40''}$$

das Wahrscheinlichkeitsgesetz der ersten k Koeffizienten, berechnet ohne
Rücksicht auf alle folgenden,

$$w^{(k+s)}(u_1, \ldots, u_{k+s}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k+s} H^{(k+s)}}} e^{-\sum_1^{k+s} u_\lambda u_\mu \frac{H_{\lambda\mu}^{k+s}}{H^{(k+s)}}}, \tag{40'''}$$

denn so das Gesetz für die ersten $(k+s)$ Koeffizienten, so erhält man das
Wahrscheinlichkeitsgesetz $\bar{w}^{(k)}$ der ersten k Koeffizienten berechnet aus
(40'''), also ein $\bar{w}^{(k)}$ für k Koeffizienten abgeleitet aus dem $w^{(k+s)}$, in
dem um s Koeffizienten mehr berücksichtigt sind, definitionsgemäß durch
$s$fache Integration von $-\infty$ bis $+\infty$ über $du_{k+1} \ldots du_{k+s}$, wobei sich
durch Ausrechnen unter Benutzung der Formel (33)

$$\bar{w}^{(k)} \equiv \int w^{(k+s)}(u_1, \ldots, u_{k+s})\, du_{k+1} \ldots du_{k+s} = w^{(k)} \tag{43}$$

ergibt. Es hat also einen Sinn, *ein Wahrscheinlichkeitsgesetz für die*
ersten k Koeffizienten der unendlichen Reihe zu betrachten; dieses kann
man so berechnen, als ab an Stelle einer Reihe nur ein trigonometrisches
Polynom vorhanden wäre. Für jede endliche Anzahl von Koeffizienten
besitzen wir also das Wahrscheinlichkeitsgesetz.

Berlin, im Oktober 1924.

(Eingegangen am 23. Oktober 1924.)

Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen.

Von

A. Khintchine in Moskau.

Nach einem bekannten Satze von Dirichlet haben die Ungleichung

$$\left|\theta_i - \frac{p_i}{q}\right| < \frac{1}{q^{1+\frac{1}{s}}} \qquad (i = 1, 2, \ldots$$

für jedes reelle Zahlensystem $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ unendlich viele Lösungen ganzen $q > 0$, p_i. Daß dieses Dirichletsche Approximationsgesetz jedes s auch das beste ist, hat vor kurzem Herr Perron bewiesen will man nämlich ein Gesetz angeben, das für *alle* Systeme $(\theta_1, \theta_2, \ldots,$ Gültigkeit hat, so darf man in den hingeschriebenen Ungleichun höchstens den Zähler rechts durch eine kleinere Konstante ersetzen; Ordnung in bezug auf q kann aber nicht erhöht werden.

Für die metrische Theorie entsteht naturgemäß die Frage: Wie v kann die Ordnung der Approximation gefördert werden, wenn man eine Menge von Zahlensystemen verzichten will, deren (s-dimensiona Maß gleich Null ist? Mit anderen Worten: Ist $\psi(q)$ eine gegebene p tive Funktion, so soll die notwendige und hinreichende Bedingung gegeben werden, damit die Ungleichungen

$$(1) \qquad \left|\theta_i - \frac{p_i}{q}\right| < \frac{\psi(q)}{q} \qquad (i = 1, 2, \ldots$$

für *fast alle* Zahlensysteme $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ unendlich viele Lösunge ganzen $q > 0$, p_i besitzen.

Wir wollen annehmen, daß für $q \to \infty$ das Produkt

$$q\{\psi(q)\}^s$$

---

[1]) Math. Ann. 83 (1921), S. 77.

nonoton gegen Null abnimmt (es ist leicht einzusehen, daß die Frage in rster Linie nur für solche $\psi(q)$ ein Interesse hat). Unter dieser Annahme abe ich kürzlich für den Fall $s = 1$ bewiesen[2]), daß die gesuchte Bedingung in der Divergenz des Integrals

$$\int^{\infty} \psi(q)\,dq$$

esteht. Es lag die Vermutung nahe, daß im Falle eines beliebigen s die Divergenz des Integrals

$$\int^{\infty} \{\psi(q)\}^s\,dq$$

asselbe leisten wird. Der Beweis gestattete aber keine Verallgemeinerung, a er wesentlich auf kettenbruchtheoretischen Betrachtungen gegründet ar. Es ist mir jetzt gelungen, einen neuen Beweis zu finden, der sich uf ein beliebiges s direkt anwenden läßt. Das Ergebnis lautet:

Satz. *Die Funktion $\psi(q)$ sei stetig und positiv, und für $q \to \infty$ ehme $q\{\psi(q)\}^s$ monoton gegen Null ab; dann haben die Ungleichungen* (1) *ür fast alle Zahlensysteme $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ eine unendliche oder für fast lle Systeme eine höchstens endliche Anzahl von Lösungen in ganzen > 0, p_i, je nachdem das Integral*

$$\int^{\infty} \{\psi(q)\}^s\,dq$$

ivergent oder konvergent ist.

abei ist zu bemerken, daß die zweite Behauptung (der Konvergenzfall) eines neuen Beweises bedarf; denn der betreffende, in meiner unter [2]) tierten Abhandlung enthaltene Beweis für den Fall $s = 1$, ist von ettenbruchtheoretischen Betrachtungen frei und kann unmittelbar auf den lgemeinen Fall angewandt werden. Im folgenden werden wir also nur en Divergenzfall betrachten und den betreffenden Teil des Satzes beweisen.

Hilfssatz 1. *Es sei $s > 0$ ganz, und $\varphi(n)$ bedeute die Eulersche unktion, welche die Anzahl der unterhalb n liegenden und zu n teileremden Zahlen angibt*[3]); *dann gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{\frac{\varphi(k)}{k}\right\}^s > Cn,$$

o $C = C(s)$ eine nur von s abhängende positive Zahl ist.

---

[2]) Math. Ann. 92 (1924), S. 115.

[3]) Mit der üblichen Ergänzung $\varphi(1) = 1$.

Beweis. Aus der bekannten Abschätzung[4])

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi(k) = \frac{3}{\pi^2} n^2 + O(n \log n)$$

erhält man leicht durch partielle Summation

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi(k)}{k} = \frac{6}{\pi^2} n + O(\log^2 n),$$

womit der Hilfssatz für $s = 1$ bewiesen ist; für $s > 1$ folgt aus der vo Hölder verallgemeinerten[5]) Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi(k)}{k} \right\}^s \leqq n^{s-1} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{\varphi(k)}{k} \right\}^s,$$

also

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{\varphi(k)}{k} \right\}^s \geqq \frac{1}{n^{s-1}} \left\{ \frac{6}{\pi^2} n + O(\lg^2 n) \right\}^s = \left\{ \frac{6}{\pi^2} \right\}^s n + O(\lg^2 n),$$

womit Hilfssatz 1 allgemein bewiesen ist.

Hilfssatz 2. *Es sei $u(n)$ eine positive stetige Funktion, und $n u($ nehme monoton gegen Null ab für unendlich großes n; ferner soll d Integral*

$$\int^{\infty} u(n)\, dn$$

divergent sein. Dann gibt es eine stetige Funktion $\pi(n)$ mit folgend Eigenschaften:

1. $\pi(n) \to +\infty$ *monoton für* $n \to +\infty$.
2. *Das Integral*

$$\int^{\infty} u\{n\pi(n)\}\, dn$$

ist divergent.

Beweis. Unter den getroffenen Voraussetzungen existiert bekanntl eine stetige, monoton gegen Null abnehmende Funktion $\varepsilon(n)$ von Beschaffenheit, daß

$$\int^{\infty} u(n)\varepsilon(n)\, dn$$

divergiert; man setze

$$\chi(n) = \int_{0}^{n} \varepsilon(x)\, dx;$$

---

[4]) Mertens, Crelles Journ. 77 (1874), S. 291.

[5]) Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1889, S. 38.

offenbar ist die Funktion $\chi(n)$ monoton, und für $n \to \infty$ ist

$$\chi(n) \to \infty, \quad \text{aber} \quad \chi(n) = o(n);$$

$n = \tau(w)$ sei die zu $w = \chi(n)$ inverse Funktion; offenbar wächst $\tau(w)$ mit w monoton ins Unendliche, und es ist dabei

$$\frac{\tau(w)}{w} \to \infty.$$

Man setze

$$\pi(n) = \frac{\tau(n)}{n},$$

wodurch die Forderung 1. schon erfüllt ist. Ferner ist

$$\int^{N} u\{n\pi(n)\}\,dn = \int^{N} u\{\tau(n)\}\,dn = \int^{\tau(N)} u(k)\chi'(k)\,dk = \int^{\tau(N)} u(k)\varepsilon(k)\,dk \to \infty$$

für $N \to \infty$, womit auch 2. bewiesen ist.

Nun kommen wir zu den metrischen Hilfssätzen, welche den Beweis des Hauptsatzes unmittelbar vorbereiten sollen. Wir betrachten einen s-dimensionalen Einheitswürfel und bezeichnen mit $x_1, x_2, \ldots, x_s$ die Koordinaten seiner Punkte. Ferner denken wir uns eine positive, stetige, monoton gegen Null abnehmende Funktion $\omega(n)$ von der Beschaffenheit, daß $n\{\omega(n)\}^s \to 0$ für $n \to \infty$ und daß das Integral

$$\int^{\infty} \{\omega(n)\}^s\,dn$$

divergiert. Wir bezeichnen mit

$$W^{(n)}_{r_1, r_2, \ldots, r_s} \quad (0 \leqq r_l < n;\ l = 1, 2, \ldots, s;\ n = 1, 2, \ldots)$$

den durch die Ungleichungen

$$\left| x_l - \frac{r_l}{n} \right| < \frac{\omega(n)}{n} \qquad (l = 1, 2, \ldots, s)$$

definierten Würfel. Die Vereinigung aller $W^{(n)}_{r_1, r_2, \ldots, r_s}$ für ein festes n soll E_n heißen. Endlich bezeichnen wir mit $F_{n,k}$ die Menge der Punkte, welche E_{n+k}, aber keiner von den Mengen $E_n, E_{n+1}, \cdots, E_{n+k-1}$ angehören (dabei soll $F_{n,0} = E_n$ sein).

Hilfssatz 3. *Es ist*[6])

$$\mathfrak{M} F_{n,k} \geqq 2^s \{\omega(n+k)\}^s \left(\left\{ \frac{\varphi(n+k)}{n+k} \right\}^s - 4^s \sum_{i=0}^{k-1} \{\omega(n+i)\}^s \right).$$

Beweis. Die Menge $F_{n,k}$ enthält vollständig jeden Würfel $W^{(n+k)}$, der mit keinem von den Würfeln $W^{(n+i)}$ $(0 \leqq i < k)$ gemeinsame Punkte hat.

[6]) $\mathfrak{M} E$ bedeutet das Lebesguesche Maß der Menge E.

Wir wollen eine untere Grenze für die Anzahl solcher Würfel $W^{(n+k)}$ a
geben. Dazu bemerken wir, daß, falls der Würfel $W^{(n+k)}_{r_1, r_2, \ldots, r_s}$ mit de
Würfel $W^{(n+i)}_{r_1', r_2', \ldots, r_s'}$ gemeinsame Punkte hat, notwendig

$$\left|\frac{r_l'}{n+i} - \frac{r_l}{n+k}\right| < \frac{\omega(n+k)}{n+k} + \frac{\omega(n+i)}{n+i} \qquad (l=1,2,\ldots,s$$

also a fortiori

$$|n+k)r_l' - (n+i)r_l| < 2(n+k)\omega(n+i) \qquad (l=1,2,\ldots, \tag{2}$$

sein muß.

Wir fixieren zunächst die Zahl i und fragen, wie viele unter d
Würfeln $W^{(n+k)}$ bei passend gewählten r_l' den Ungleichungen (2) genüg
können. Bezeichnet man mit d den größten gemeinsamen Teiler d
Zahlen $n+k$ und $n+i$, so kann die linke Seite von (2) nur ein Vie
faches von d sein, die Null mit verstanden; die Anzahl der nichtnegativ
Vielfachen von d, die kleiner als $2(n+k)\omega(n+i)$ sind, ist ab
höchstens

$$\left[\frac{2(n+k)\omega(n+i)}{d}\right] + 1,$$

wenn man die Null mitzählt, und um eine Einheit kleiner anderenfal
Durchläuft nun r_l die Reihe $0, 1, \ldots, n+k-1$, und wird jedesm
r_l' dazu passend gewählt, so tritt jedes Vielfache von d links in (2), w
man sofort einsieht, höchstens $2d$-mal auf. Nun beschränken wir uns a
solche r_l-Werte, die zu $n+k$ relativ prim sind; dann kann die Null lin
in (2) unmöglich auftreten. Deswegen ist die Anzahl der möglichen We
dieser linken Seite höchstens

$$\left[\frac{2(n+k)\omega(n+i)}{d}\right];$$

jeder von diesen Werten wird bei der angenommenen Beschränku
a fortiori höchstens $2d$-mal auftreten. Somit ist die gesuchte Anzahl
zu $n+k$ relativ primen r_l-Werte, welche (2) Genüge leisten könn
höchstens

$$2d\left[\frac{2(n+k)\omega(n+i)}{d}\right] \leqq 4(n+k)\omega(n+i),$$

und folglich die Anzahl der betreffenden Würfel $W^{(n+k)}$ höchstens

$$4^s(n+k)^s\{\omega(n+i)\}^s.$$

Indem wir diesen Ausdruck über i von 0 bis $k-1$ summieren, erken
wir, daß höchstens

$$4^s(n+k)^s\sum_{i=0}^{k-1}\{\omega(n+i)\}^s$$

on solchen Würfeln $W^{(n+k)}_{r_1, r_2, \ldots, r_s}$, bei denen alle r_l zu $n+k$ relativ prim nd, mit Würfeln $W^{(n+i)}$ $(0 \leqq i < k)$ gemeinsame Punkte haben können. eachtet man nun, daß die Anzahl aller solcher $W^{(n+k)}_{r_1, r_2, \ldots, r_s}$ (mit zu $+k$ relativ primen r_l) $\{\varphi(n+k)\}^s$ beträgt, und daß das Volumen eines inzelnen Würfels

$$\frac{2^s}{(n+k)^s}\{\omega(n+k)\}^s$$

t, so erhält man

$$\mathfrak{M} F_{n,k} \geqq \frac{2^s}{(n+k)^s}\{\omega(n+k)\}^s\left(\{\varphi(n+k)\}^s - 4^s(n+k)^s\sum_{i=0}^{k-1}\{\omega(n+i)\}^s\right)$$

$$= 2^s\{\omega(n+k)\}^s\left(\left\{\frac{\varphi(n+k)}{n+k}\right\}^s - 4^s\sum_{i=0}^{k-1}\{\omega(n+i)\}^s\right), \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Hilfssatz 4. *Für genügend großes n und passend dazu gewähltes K ist*

$$\mathfrak{M}\left(\sum_{i=0}^{K-1} E_{n+i}\right) > \frac{1}{6}\frac{C^2}{2^s};$$

abei ist $C = C(s)$ die in Hilfssatz 1 eingeführte positive Konstante.

Beweis. Da $F_{n,i}$ eine Teilmenge von E_{n+i} bildet, ist

$$\mathfrak{M}\left(\sum_{i=0}^{K-1} E_{n+i}\right) \geqq \mathfrak{M}\left(\sum_{k=0}^{K-1} F_{n,k}\right) = \sum_{k=0}^{K-1}\mathfrak{M} F_{n,k},$$

obei die letzte Gleichung aus dem Umstande folgt, daß die Mengen $F_{n,k}$ ach ihrer Definition paarweise ohne gemeinsame Punkte sind. Es genügt omit, für genügend großes n und passend dazu gewähltes K

$$\sum_{k=0}^{K-1}\mathfrak{M} F_{n,k} > \frac{1}{6}\frac{C^2}{2^s}$$

1 beweisen.

Zu dem Ende bestimme man die ganze positive Zahl K durch die ngleichungen

$$\sum_{i=0}^{K-1}\{\omega(n+i)\}^s \leqq \frac{C}{2\cdot 4^s} < \sum_{i=0}^{K}\{\omega(n+i)\}^s,$$

as wegen der vorausgesetzten Eigenschaften von $\omega(n)$ für genügend roßes n immer möglich ist. Hilfssatz 3 ergibt dann für $k < K$

$$\mathfrak{M} F_{n,k} \geqq 2^s\{\omega(n+k)\}^s\left(\left\{\frac{\varphi(n+k)}{n+k}\right\}^s - 4^s\cdot\frac{C}{2\cdot 4^s}\right),$$

und folglich

$$(3)\quad \sum_{k=0}^{K-1} \mathfrak{M} F_{n,k} \geqq 2^s \sum_{k=0}^{K-1} \{\omega(n+k)\}^s \left\{\frac{\varphi(n+k)}{n+k}\right\}^s - \frac{2^s C}{2} \sum_{k=0}^{K-1} \{\omega(n+k)\}$$

$$\geqq 2^s \sum_{k=0}^{K-1} \{\omega(n+k)\}^s \left\{\frac{\varphi(n+k)}{n+k}\right\}^s - \frac{C^2}{4 \cdot 2^s}.$$

Setzt man

$$\sum_{k=1}^{p} \left\{\frac{\varphi(k)}{k}\right\}^s = \sigma_p,$$

so ist nach Hilfssatz 1

$$\sum_{k=0}^{K-1} \{\omega(n+k)\}^s \left\{\frac{\varphi(n+k)}{n+k}\right\}^s = \sum_{k=0}^{K-1} \sigma_{n+k} (\{\omega(n+k)\}^s - \{\omega(n+k+1)\}^s) + o(1)$$

$$> C \sum_{k=0}^{K-1} (n+k)(\{\omega(n+k)\}^s - \{\omega(n+k+1)\}^s) + o(1)$$

$$= C \sum_{=0}^{K-1} \{\omega(n+k)\}^s + o(1) > C\left(\frac{C}{2 \cdot 4^s} - \{\omega(n+K)\}^s\right) + o(1) = \frac{C^2}{2 \cdot 4^s} +$$

Demnach ergibt (3) für genügend großes n

$$\sum_{k=0}^{K-1} \mathfrak{M} F_{n,k} > \frac{C^2}{2 \cdot 2^s} + o(1) - \frac{C^2}{4 \cdot 2^s} > \frac{C^2}{6 \cdot 2^s}, \qquad \text{w. z. b.}$$

Beweis des Hauptsatzes. Zu der gegebenen Funktion $\{\psi(q)\}^s = u$ bestimmen wir zunächst nach Hilfssatz 2 eine Funktion $\pi(q)$, die d daselbst aufgezählten Forderungen genügt, und setzen

$$\omega(q) = \psi\{q\pi(q)\};$$

dann erfüllt die Funktion $\omega(q)$ alle Voraussetzungen, die uns zum Hi satz 4 hingeführt haben; wir wenden diesen Hilfssatz an, und erhal folgendes: Es kann eine unendliche Folge ganzer positiver Zah $n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots$ angegeben werden, so daß für geeignet gewäh $K_1, K_2, \ldots, K_i, \ldots$

$$\mathfrak{M}\left(\sum_{k=0}^{K_i-1} E_{n_i+k}\right) > \frac{1}{6} \frac{C^2}{2^s} \qquad (i = 1, 2,$$

ist; dabei kann natürlich $n_{i+1} > n_i + K_i$ vorausgesetzt werden. Bedeu nun E die Menge der Punkte im s-dimensionalen Einheitswürfel, de

der einer unendlichen Folge von Mengen E_n angehört, so folgt daraus ach einem bekannten Satz der metrischen Mengenlehre, daß

$$\mathfrak{M}E \geqq \frac{1}{6}\frac{C^s}{2^s}$$

t. Jeder Punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ der Menge E genügt aber unendlich ft den Ungleichungen

$$\left| x_i - \frac{s_i}{n} \right| < \frac{\omega(n)}{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{4}$$

ei passend gewählten ganzen s_i. Andererseits hat die Menge E ein ositives Maß, und daraus schließen wir nach bekannten Sätzen, daß für edes noch so kleine $\beta > 0$ der Einheitswürfel in eine so große Anzahl λ^s leicher Teilwürfel zerlegt werden kann, daß wenigstens in einem dieser eilwürfel das Maß der hineinfallenden Teilmenge von E größer als $1-\beta)\lambda^{-s}$ ausfällt. Dieser Teilwürfel soll W heißen und $x(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ ei ein Punkt von W, der zugleich der Menge E angehört. In einem eliebigen anderen Teilwürfel können wir diesem Punkt einen ganz be- immten anderen Punkt

$$y(y_1, y_2, \ldots, y_s) = y\left(x_1 + \frac{a_1}{\lambda}, x_2 + \frac{a_2}{\lambda}, \ldots, x_s + \frac{a_s}{\lambda}\right)$$

uordnen, wobei $a_1, a_2, \ldots, a_s$ gewisse ganze Zahlen bedeuten. Ist nun n gewählt, daß alle Ungleichungen (4) für passende s_i erfüllt werden was auf unendlich viele Weisen geschehen kann), so ist

$$|n x_i - s_i| < \omega(n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

lso

$$|n\lambda x_i - \lambda s_i + n a_i - n a_i| = \left| n\lambda\left(x_i + \frac{a_i}{\lambda}\right) - (\lambda s_i + n a_i) \right| < \lambda\omega(n)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, s).$$

un ist wegen der vorausgesetzten Eigenschaften von $\psi(n)$

$$n\pi(n)\{\psi(n\pi(n))\}^s < \frac{n}{\lambda^s}\pi\left(\frac{n}{\lambda^s}\right)\left\{\psi\left(\frac{n}{\lambda^s}\pi\left(\frac{n}{\lambda^s}\right)\right)\right\}^s,$$

der

$$n\{\omega(n)\}^s < \frac{n}{\lambda^s}\cdot\frac{\pi\left(\frac{n}{\lambda^s}\right)}{\pi(n)}\left\{\omega\left(\frac{n}{\lambda^s}\right)\right\}^s < \frac{n}{\lambda^s}\left\{\omega\left(\frac{n}{\lambda^s}\right)\right\}^s,$$

lso

$$\{\omega(n)\}^s < \frac{1}{\lambda^s}\left\{\omega\left(\frac{n}{\lambda^s}\right)\right\}^s$$

nd folglich

$$\lambda\omega(n) < \omega\left(\frac{n}{\lambda^s}\right);$$

wir erhalten also, $\lambda s_i + n a_i = r_i$ gesetzt,

$$|n\lambda y_i - r_i| < \omega\left(\frac{n}{\lambda^s}\right) = \psi\left(\frac{n}{\lambda^s}\pi\left(\frac{n}{\lambda^s}\right)\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots,$$

Ist n so groß, daß $\lambda^{-s}\pi(n\lambda^{-s}) > \lambda$ wird, so folgt

$$\left|y_i - \frac{r_i}{n\lambda}\right| < \frac{\psi(n\lambda)}{n\lambda} \qquad (i = 1, 2, \ldots,$$

Da nun diese Ungleichungen für beliebig große n zutreffen müssen, ergibt sich, daß der Punkt y der Behauptung des zu beweisenden Satz Genüge leistet. Es bilden aber die Punkte y im Einheitswürfel ei Menge, deren Maß größer als $1 - \beta$ ist; denn diese Menge entsteht dur die kongruente Translation der in W enthaltenen Teilmenge von E (der Maß größer als $(1 - \beta)\lambda^{-s}$ ist) nach allen λ^s Teilwürfeln. Wegen der Wi kürlichkeit von β ist damit der Satz bewiesen.

Ivanowo-Wosniessensk, den 28. 5. 1925.

(Eingegangen am 6. Juni 1925.)

Über bedingt konvergente Reihen.

Von

Vojtěch Jarník in Göttingen.

Ein wohlbekannter Satz von Riemann lautet: Es sei

$$c_1 + c_2 + c_3 + \ldots = s \tag{c}$$

ne bedingt konvergente Reihe mit reellen Gliedern; es seien

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \tag{a}$$

e nichtnegativen Glieder der Reihe (c),

$$b_1, b_2, b_3, \ldots \tag{b}$$

e übrigen Glieder von (c), wobei die a_ν in (a) und die b_ν in (b) in rselben Reihenfolge auftreten wie in der Reihe (c). Dann läßt sich die eihe (c) zu jeder reellen Summe umordnen und zwar so, daß dabei die eihenfolge der a_ν untereinander und die der b_ν untereinander ungeändert eibt.

Ich stelle mir hier eine verwandte Frage; ich setze aber über die olge (a) nur voraus, daß $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \to +\infty$ bei $n \to \infty$, statt vorauszusetzen, ß (a) genau aus allen nichtnegativen Gliedern der Reihe (c) besteht; d ich frage nach der Menge M der Werte, zu welchen sich die Reihe (c) ter Beibehaltung der Reihenfolge der a_ν untereinander und der b_ν unternander umordnen läßt. Ohne die Allgemeinheit wesentlich zu beeinträchgen, setze ich im folgenden $s = 0$ voraus.

Im § 1 werde ich nach einigen einleitenden Erläuterungen und nach ei Sätzen, die eine formale Vereinfachung der Frage gestatten, den tz 3 beweisen: die Menge M ist ein Modul.

Im § 2 beweise ich im Satz 4 eine naheliegende Verallgemeinerung s Riemannschen Satzes und gebe dann (Satz 5 und 6) für gewisse lle eine untere Schranke für die kleinste positive in M enthaltene Zahl , welche nach Satz 7 und 8 die „wahre Schranke“ ist.

§ 1.

Es sei eine Folge reeller Zahlen

(1) $$c_1, c_2, c_3, \dots$$

gegeben;

(2) $$a_1, a_2, a_3, \dots,$$

(3) $$b_1, b_2, b_3, \dots$$

seien zwei unendliche Teilfolgen aus (1), und zwar seien in (3) alle E mente von (1) enthalten, die nicht in (2) enthalten sind und keine ande (d. h. (2) und (3) geben zusammen genau alle Elemente von (1)). Wei setze ich voraus: Wenn $0 < n < m$, m, n ganz, so soll in (1) das E ment a_n vor dem Element a_m und ebenso b_n vor b_m stehen; d. h. Elemente der Folge (2), und ebenso die der Folge (3), sollen ebenso geordnet sein, wie sie in (1) angeordnet waren.

Endlich sei die Reihe

(4) $$c_1 + c_2 + c_3 + \dots$$

konvergent und habe die Summe Null; dagegen sei

(4a) $$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \to +\infty \text{ bei } n \to \infty,$$

also

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \to -\infty.$$

Wegen (4a) ist (4) bedingt konvergent.

Wir nennen eine Funktion $f(n)$, die für alle ganzen $n \geqq 0$ defini ist, eine *A-Funktion*, wenn folgendes gilt:

1. $f(0) = 0$.
2. $f(n)$ ist ganz und nicht negativ für jedes ganze $n > 0$.
3. Aus n, m ganz, $n > m \geqq 0$ folgt
$$f(n) \geqq f(m).$$
4. $f(n) \to +\infty$ bei $n \to \infty$.

Eine formal aufgeschriebene (nicht notwendig konvergente) Reihe

(5) $$d_1 + d_2 + d_3 + \dots$$

nennen wir „*eine Umordnung der Reihe* (4) *in bezug auf die Teilfol* (2), (3)“, wenn folgendes gilt:

1. Die Reihe (5) entsteht durch Umordnung der Reihe (4) (d. h. enthält als Glieder alle Elemente der Folge (1), jedes nur einmal keine anderen).

2. Wenn n, m ganz, $0 < n < m$, so steht in der Reihe (5) das lied a_n vor a_m und b_n vor b_m (d. h. jede der beiden Teilfolgen (2), (3) ll in (5) in ihrer ursprünglichen Anordnung auftreten).

Wenn wir die Anzahl der b_ν, die in (5) vor a_n stehen, mit $f(n)$ bezeichnen und $f(0) = 0$ setzen, so ist $f(n)$ offenbar eine A-Funktion; und ngekehrt wird durch jede A-Funktion auf diese Weise eine Umordnung r Reihe (4) in bezug auf (2), (3) definiert, und zwar eindeutig.

Ebenso, wenn wir die Anzahl der a_ν, die in (5) vor b_n stehen, mit (n) bezeichnen und $F(0) = 0$ setzen, so ist $F(n)$ eine A-Funktion; id umgekehrt wird durch jede A-Funktion auf diese Weise eine Umordıng der Reihe (4) in bezug auf (2), (3) definiert, und zwar eindeutig.

Auch zu der ursprünglichen Anordnung (4) gehört je eine solche -Funktion.

Wir wollen sagen, daß sich die Reihe (4) in bezug auf (2), (3) zur ımme a umordnen läßt, wenn es eine Umordnung von (4) in bezug auf), (3) gibt, die gegen a konvergiert. Im folgenden wollen wir die Menge M r Werte untersuchen, zu welchen sich (4) in bezug auf (2), (3) umdnen läßt.

Nach dem, was über die A-Funktionen gesagt wurde, sind folgende ei Aussagen äquivalent:

I. Die Reihe (4) läßt sich in bezug auf die Teilfolgen (2), (3) zur ımme a umordnen.

II. Es gibt eine A-Funktion $f(n)$ mit folgender Eigenschaft:

Zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein $n_0(\delta)$, so daß

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu + \sum_{\mu=1}^{m} b_\mu - a \right| < \delta$$

r alle $n > n_0(\delta)$ und alle m mit

$$f(n) \leqq m \leqq f(n+1).$$

III. Es gibt eine A-Funktion $F(m)$ mit folgender Eigenschaft:

Zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein $m_0(\delta)$, so daß

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu + \sum_{\mu=1}^{m} b_\mu - a \right| < \delta$$

r alle $m > m_0(\delta)$ und alle n mit

$$F(m) \leqq n \leqq F(m+1).$$

Ich werde im folgenden die Sätze der Aussage I entsprechend formueren, dagegen benutze ich bei den Beweisen die Aussagen II bzw. III.

Satz 1. *Voraussetzung: Es sei möglich, die Reihe* (4) *in bezug auf*), (3) *zur Summe a umzuordnen.*

Behauptung: *Dann läßt sich die Reihe*

$$a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + a_3 - a_3 + \ldots = 0 \tag{6}$$

in bezug auf die Teilfolgen

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, \tag{7}$$

$$-a_1, -a_2, -a_3, \ldots \tag{8}$$

zur Summe a umordnen.

Beweis. Weil (4) die Summe 0 hat, gibt es eine A-Funktion $\varphi(n)$ so daß für jedes $\delta > 0$ und für alle ganzen n, m mit $n > n_0(\delta)$ $\varphi(n) \leqq m \leqq \varphi(n+1)$ gilt:

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu + \sum_{\mu=1}^{m} b_\mu \right| < \delta. \tag{9}$$

Weiter gibt es nach Voraussetzung eine A-Funktion $\psi(m)$, so daß für jed $\delta > 0$ und für alle ganzen m, l mit $m > m_0(\delta)$, $\psi(m) \leqq l \leqq \psi(m+1)$ gi

$$\left| \sum_{\nu=1}^{l} a_\nu + \sum_{\mu=1}^{m} b_\mu - a \right| < \delta. \tag{10}$$

Es sei nun $n_0'(\delta)$ die kleinste ganze Zahl mit $n_0'(\delta) > n_0($ $\varphi(n_0'(\delta)) > m_0(\delta)$; n, l seien zwei ganze Zahlen mit $n > n_0'($ $\psi(\varphi(n)) \leqq l \leqq \psi(\varphi(n+1))$. Weil die Funktion $\psi(m)$ nicht abnimm läßt sich eine ganze Zahl m so finden, daß $\varphi(n) \leqq m \leqq \varphi(n+1)$ u $\psi(m) \leqq l \leqq \psi(m+1)$. Dann gilt gleichzeitig (9) und (10), also ist

$$\left| \sum_{\nu=1}^{l} a_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} (-a_\nu) - a \right| < 2\delta.$$

Damit ist aber der Satz bewiesen, denn $\varrho(n) = \psi(\varphi(n))$ ist offenb eine A-Funktion.

Satz 2. *Voraussetzung*: *Es sei möglich, die Reihe* (6) *in bezug a* (7), (8) *zur Summe a umzuordnen.*

Behauptung: *Dann läßt sich die Reihe* (4) *in bezug auf* (2), *zur Summe a umordnen.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine A-Funktion $\varphi(n)$, daß für jedes $\delta > 0$ und alle ganzen n, m mit $n > n_0(\delta)$, $\varphi(n) \leqq$ $\leqq \varphi(n+1)$ gilt

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu - \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu - a \right| < \delta. \tag{11}$$

Weiter (weil (4) zu Null konvergiert) gibt es eine A-Funktion $\psi(m)$,

aß für jedes $\delta > 0$ und alle ganzen m, l mit $m > m_0(\delta)$, $\psi(m) \leqq l \leqq \psi(m+1)$ gilt

12) $$\left| \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu + \sum_{\mu=1}^{l} b_\mu \right| < \delta.$$

s sei nun die ganze Zahl n so groß, daß $n > n_0(\delta)$, $\varphi(n) > m_0(\delta)$, nd es sei die ganze Zahl l so beschaffen, daß $\psi(\varphi(n)) \leqq l \leqq \psi(\varphi(n+1))$. ann läßt sich ein ganzes m so finden, daß $\varphi(n) \leqq m \leqq \varphi(n+1)$, $(m) \leqq l \leqq \psi(m+1)$; also gilt dann sowohl (11) als (12), woraus

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu + \sum_{\mu=1}^{l} b_\mu - a \right| < 2\delta$$

lgt, w. z. b. w.

Nach diesen beiden Sätzen genügt es, die Menge der Werte zu unterchen, zu welchen sich (6) in bezug auf (7), (8) umordnen läßt; denn iese Menge ist mit M identisch. Ich werde im folgenden also ausschließlich die Umordnungen von (6) in bezug auf (7), (8) betrachten; ie Worte „in bezug auf (7), (8)“ lasse ich im folgenden weg, da ja ein Mißverständnis mehr möglich ist.

Satz 3. *Die Menge M ist ein Modul.*

Beweis. Ich soll zeigen:

Wenn a und b zu M gehören, so gehört auch $a - b$ zu M.

Das beweise ich so: Wenn a zu M gehört, so gibt es eine A-Funktion (n), so daß für jedes $\delta > 0$ und alle ganzen n, m mit $n > n_0(\delta)$, $(n) \leqq m \leqq \varphi(n+1)$ gilt

13) $$\left| \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu - \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu - a \right| < \delta.$$

Wenn b zu M gehört, so gibt es eine A-Funktion $\psi(m)$, so daß für des $\delta > 0$ und alle ganzen m, l mit $m > m_0(\delta)$, $\psi(m) \leqq l \leqq \psi(m+1)$ gilt

14) $$\left| \sum_{\nu=1}^{l} a_\nu - \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu - b \right| < \delta.$$

Wenn nun die ganze Zahl n so groß ist, daß $n > n_0(\delta)$, $\varphi(n) > m_0(\delta)$ nd wenn die ganze Zahl l so beschaffen ist, daß

$$\psi(\varphi(n)) \leqq l \leqq \psi(\varphi(n+1)),$$

gibt es ein ganzes m mit

$$\varphi(n) \leqq m \leqq \varphi(n+1), \qquad \psi(m) \leqq l \leqq \psi(m+1);$$

so gilt dann sowohl (13) als (14), woraus

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu - \sum_{\mu=1}^{l} a_\mu - (a - b) \right| < 2\delta$$

lgt, w. z. b. w.

Nach Satz 3 sieht also die Menge M folgendermaßen aus:

1. Entweder besteht M aus der einzigen Zahl Null.

2. Oder es enthält M auch andere Zahlen, unter welchen dann sich auch positive Zahlen vorkommen. Dann sind zwei Fälle möglich:

a) Entweder gibt es unter den positiven Zahlen aus M eine kleinste; dann ist M mit der Menge der Zahlen $n\varrho$ $\left(n \gtreqless 0,\ n \text{ ganz}\right)$ identisch.

b) Oder es gibt in M beliebig kleine positive Zahlen; dann ist auf der Achse der reellen Zahlen überall dicht[1]).

Ich werde im § 2 einige Sätze ableiten, die uns weitere Aussage über die Beschaffenheit der Menge M gestatten.

§ 2.

In diesem Paragraph werde ich zeigen, was man aus der Struktur der Folge $a_1, a_2, \ldots$ auf den Modul M schließen kann. Dazu sind zuer einige Begriffe notwendig, die mit dem infinitären Verhalten dieser Fol zusammenhängen.

Definition von α. Es sei $n > 0$ und ganz; ich betrachte die kleins unter den Zahlen

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots) \tag{15}$$

eine solche gibt es, da die Zahlen (15) mit $p \to \infty$ gegen $+\infty$ strebe und bezeichne sie mit $-\alpha_n$; also ist $\alpha_n \geqq 0$. Ich setze $\alpha = \limsup_{n=\infty} \alpha_n$.

Ich werde folgenden Satz beweisen:

Satz 4. *Wenn $\alpha = 0$, so läßt sich die Reihe (6) zu jedem reell Wert s umordnen.*

Wenn $\alpha > 0$ (worin auch der Fall $\alpha = +\infty$ enthalten ist), füh ich eine neue Konstante β folgendermaßen ein:

Definition von β. Es sei $n > 0$ und ganz, $k > 1$. Ich betrach alle Quotienten

$$\frac{\sum_{\nu=n+1}^{n+p} |a_\nu|}{\sum_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu} \qquad (p > 0 \text{ gan} \tag{16}$$

---

[1]) Ob dann M mit der Menge aller reeller Zahlen identisch sein muß, d. h. die Menge M immer abgeschlossen ist, weiß ich nicht. Vgl. allerdings besonders d folgenden Satz 4.

[2]) $\sum_{n+1}^{n}$ bedeutet immer Null.

[3]) Für lim sup und lim wird im folgenden auch der Wert $+\infty$ zugelassen.

ir welche

17) $$\sum_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu > k.$$

Die obere Grenze der Zahlen (16), wenn p alle positiven ganzen ahlen mit (17) durchläuft, bezeiche ich mit $\beta^*_{k,n}$ und setze

$$\beta_k = \limsup_{n=\infty} \beta^*_{k,n},$$

$$\beta = \lim_{k=\infty} \beta_k.$$ [4])

Der letztgenannte Limes existiert, da $\beta^*_{k,n}$, und also auch β_k, mit wachendem k nicht zunimmt.)

Satz 5. *Es sei $\alpha > 0$, β endlich; dann ist auch α endlich. Wenn $= 1$, so läßt sich* (6) *zu keiner anderen Summe als zu Null umordnen; enn $\beta > 1$, so läßt sich* (6) *zu keiner positiven Summe umordnen, die einer als $\frac{2\alpha}{\beta - 1}$ ist.*

Dieser Satz versagt in dem Fall $\beta = +\infty$. Um auch in diesem all einen brauchbaren Satz zu bekommen, führe ich folgende Konstante γ n, deren Definition leider nicht ganz einfach ist.

Definition von γ. Es sei $n > 0$ und ganz, $k > 1$. Ich betrachte ieder die Folge

15) $$\sum_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots);$$

sei p_1 die kleinste positive Zahl, für welche

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+p_1} a_\nu > 0.$$

ann bezeichne ich mit t die kleinste der Zahlen

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu \qquad (p = 0, 1, \ldots, p_1 - 1).$$

Wenn $t \leqq -\frac{1}{k}$, setze ich $\alpha_{k,n} = -t$; wenn $t > -\frac{1}{k}$, definiere ich $_n$ überhaupt nicht.

Nun führe ich noch eine Konstante $\beta_{k,n}$ ein. Ich betrachte alle nzen positiven p, für welche

8) $$k < \sum_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu < 2k;$$

tweder gibt es kein solches p [5]); dann definiere ich $\beta_{k,n}$ überhaupt nicht.

---

[4]) Offenbar ist $1 \leqq \beta \leqq +\infty$.

[5]) Das kann, wegen $k > 1$, $a_n \to 0$, nur für endlich viele n der Fall sein.

Oder es gibt mindestens ein solches p (und dann notwendig nur endlich viele). Dann betrachte ich den Quotienten

$$\frac{\sum_{\nu=n+1}^{n+p} |a_\nu|}{\sum_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu}$$

für alle p, die (18) erfüllen; den größten Wert dieses Quotienten setze ich gleich $\beta_{k,n}$.[6])

Ich behaupte noch: Wenn für ein Wertepaar k, n die Größen $\alpha_{k,n}$, $\beta_{k,n}$ beide definiert sind, so ist $\beta_{k,n} > 1$. Denn, wenn $\alpha_{k,n}$ definiert ist, so ist die erste von Null verschiedene Zahl der Folge

$$a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots$$

negativ; also treten in jeder Summe $\sum_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu$, für welche (18) gilt, sowohl negative wie positive Glieder auf, also ist $\beta_{k,n} > 1$. Also hat folgende Definition einen Sinn:

Wenn für ein Wertepaar k, n sowohl $\alpha_{k,n}$ als $\beta_{k,n}$ definiert sind, so sei

$$\gamma_{k,n} = \frac{2\alpha_{k,n}}{\beta_{k,n} - 1};$$

sonst sei

$$\gamma_{k,n} = 0.$$

Endlich sei

$$\gamma_k = \limsup_{n=\infty} \gamma_{k,n}, \qquad \gamma = \limsup_{k=\infty} \gamma_k.$$

Dann lautet der

Satz 6. *Es sei $\alpha > 0$. Wenn $\gamma = +\infty$, so läßt sich* (6) *zu keiner anderen Summe als zu Null umordnen. Wenn γ endlich, so läßt sich* (6) *zu keiner positiven Summe umordnen, die kleiner als γ ist.*

Ehe ich zu den Beweisen dieser Sätze übergehe, werde ich zeigen, *daß Satz* 5 *aus Satz* 6 *folgt.* Dazu genügt es, zweierlei zu zeigen:

1. Wenn $\alpha = +\infty$, so ist auch $\beta = +\infty$.

2. Wenn $\beta = 1$, so ist $\gamma = +\infty$; wenn β endlich, $\beta > 1$, so $\gamma \geqq \frac{2\alpha}{\beta - 1}$ (alles unter der Voraussetzung $\alpha > 0$).

Beweis von 1. Es genügt folgendes zu zeigen: Es sei $\alpha = +\infty$, dann gibt es zu jedem $R > 0$, zu jedem $k > 1$ und zu jedem ganzen $n_0 > 0$ ein $n > n_0$ und ein $p > 0$ (n, p ganz), so daß

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu > k, \qquad \frac{\sum_{\nu=n+1}^{n+p} |a_\nu|}{\sum_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu} > R.$$

[6]) Offenbar ist $1 \leqq \beta_{k,n} \leqq \beta^*_{k,n}$.

enn daraus folgt $\beta^*_{k,n} > R$, also

$$\beta_k = \limsup_{n=\infty} \beta^*_{k,n} \geqq R$$

ir jedes $R > 0$ und jedes $k > 1$. Also ist $\beta_k = +\infty$ für alle $k > 1$, lso $\beta = +\infty$.

Es sei also ein $R > 0$, ein $k > 1$ und ein ganzes $n_0 > 0$ gegeben. s sei n_1 so gewählt, daß $|a_n| < 1$ für alle $n > n_1$. Wegen $\alpha = +\infty$ ann ich ein $n > \mathrm{Max}(n_0, n_1)$ und ein $p_1 > 0$ so finden, daß

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+p_1} a_\nu < -R(k+1).$$

Es sei p die kleinste positive ganze Zahl, für welche gilt

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu > k, \qquad p > p_1.$$

ann ist $\sum_{\nu=n+1}^{n+p-1} a_\nu \leqq k$, also $\sum_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu < k+1$; weiter ist aber

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+p} |a_\nu| \geqq -\sum_{\nu=n+1}^{n+p_1} a_\nu > R(k+1),$$

so

$$\frac{\sum_{\nu=n+1}^{n+p} |a_\nu|}{\sum_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu} > R,$$

z. b. w.

Beweis von 2. Es genügt, folgendes zu zeigen: Es sei $\alpha > 0$, β end- h; es sei eine Zahl ε gegeben, $0 < \varepsilon < 1$, $\varepsilon < \frac{\alpha}{2}$. Dann gibt es eine hl $k_0 > 1$ mit folgender Eigenschaft:

Wenn ein $k > k_0$ und ein ganzes $n_0 > 0$ gegeben sind, so läßt sich ne ganze Zahl $n' > n_0$ so finden, daß

$$\frac{\alpha_{k,n'}}{\beta_{k,n'} - 1} > \frac{\alpha - \varepsilon}{\beta + 2\varepsilon - 1}.$$

enn daraus folgt

$$\gamma_{k,n'} > \frac{2(\alpha-\varepsilon)}{\beta+2\varepsilon-1}, \qquad \gamma_k = \limsup_{n=\infty} \gamma_{k,n} \geqq \frac{2(\alpha-\varepsilon)}{\beta+2\varepsilon-1}$$

r alle $k > k_0$, also

$$\gamma = \limsup_{k=\infty} \gamma_k \geqq \frac{2(\alpha-\varepsilon)}{\beta+2\varepsilon-1},$$

d daraus, für $\varepsilon \to 0$:

$$\gamma \geqq \frac{2\alpha}{\beta-1}, \quad \text{falls } \beta > 1,$$

$$\gamma = +\infty, \quad \text{falls } \beta = 1.$$

Es sei also ein ε mit $0 < \varepsilon < 1$, $\varepsilon < \frac{\alpha}{2}$ gegeben; ich setze $k_1 =$ und wähle ein $k_2 > 1$ so, daß $\beta_k < \beta + \varepsilon$ für $k > k_2$; dann setze i $k_0 = \mathrm{Max}(k_1, k_2)$. Nun sei ein $k > k_0$ und ein $n_0 > 0$ gegeben; ich wäh ein n_1 so, daß erstens $n_1 > n_0$, zweitens $\beta^*_{k,n} < \beta_k + \varepsilon$ für alle $n > n$ drittens $|a_n| < 1$ für $n > n_1$. Dann gibt es ein $n_2 > n_1$ mit $\alpha_{n_2} > \alpha -$ d. h. es gibt eine ganze Zahl $p > 0$, so daß

$$\sum_{\nu=n_2+1}^{n_2+p} a_\nu < -\alpha + \varepsilon.$$

Ich betrachte alle Zahlen

$$\sum_{\nu=n_2+1}^{n_2+p'} a_\nu \quad \text{mit} \quad p' = 0, 1, \ldots, p-1;$$

es sei $\sum_{\nu=n_2+1}^{n_2+q} a_\nu$ die größte unter ihnen; diese Zahl ist nicht negativ $\left(\text{w}\right.$ $\left.\sum_{\nu=n_2+1}^{n_2} a_\nu = 0\right)$ und keine der Zahlen $\sum_{\nu=n_2+q+1}^{n_2+q'} a_\nu$ mit $q' = q+1, q+2, \ldots$ ist positiv $\left(\text{sonst wäre } \sum_{\nu=n_2+1}^{n_2+q'} > \sum_{\nu=n_2+1}^{n_2+q}\right)$; endlich ist

$$\sum_{\nu=n_2+q+1}^{n_2+p} a_\nu \leqq \sum_{\nu=n_2+1}^{n_2+p} a_\nu < -\alpha + \varepsilon.$$

Wegen $\alpha - \varepsilon > \varepsilon > \frac{1}{k}$ ist also α_{k,n_2+q} definiert und größer als $\alpha - \varepsilon$.

Weil $|a_n| < 1$ für $n > n_1$, so ist auch β_{k,n_2+q} definiert, und zwar

$$\beta_{k,n_2+q} \leqq \beta^*_{k,n_2+q} < \beta_k + \varepsilon < \beta + 2\varepsilon.$$

Daher ist (mit $n' = n_2 + q$)

$$\frac{\alpha_{k,n'}}{\beta_{k,n'} - 1} = \frac{\alpha_{k,n_2+q}}{\beta_{k,n_2+q} - 1} > \frac{\alpha - \varepsilon}{\beta + 2\varepsilon - 1},$$

w. z. b. w.

Nach dem eben Gesagten genügt es also, die Sätze 4 und 6 zu beweis

Beweis des Satzes 4. Der Beweis ist vollkommen analog d üblichen Beweise des Riemannschen Satzes. Nach Satz 3 genügt es, Beweis für positive s zu führen.

Es sei n_1 die kleinste Zahl, für welche $\sum_{\nu=1}^{n_1} a_\nu > s$ ist; es sei n_1' kleinste Zahl, für welche $\sum_{\nu=1}^{n_1} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_1'} a_\nu < s$ ist; dann sei n_2 die klei Zahl, die größer als n_1 ist, und für welche $\sum_{\nu=1}^{n_2} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_1'} a_\nu > s$ ist; dann

n_2' die kleinste Zahl, die größer als n_1' ist, und für welche $\sum_{\nu=1}^{n_2} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_2'} a_\nu < s$
t. So fahre ich fort und bekomme eine Umordnung der Reihe (6)

19) $$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1} - a_1 - \ldots - a_{n_1'} + a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2} - a_{n_1'+1} - \ldots - a_{n_2'} + \ldots .$$

ach der Wahl der Zahlen n_k, n_k' ist wegen $a_n \to 0$ klar, daß

20) $$\sum_{\nu=1}^{n_k} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_k'} a_\nu \to s,$$

21) $$\sum_{\nu=1}^{n_{k+1}} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_k'} a_\nu \to s$$

ei $k \to \infty$.

Jede Partialsumme von (19) hat entweder die Form

$$\sum_{\nu=1}^{n_{k+1}} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{m'} a_\nu,$$

o $n_k' \leqq m' \leqq n_{k+1}'$, oder die Form

$$\sum_{\nu=1}^{m} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_k'} a_\nu,$$

o $n_k < m \leqq n_{k+1}$.

Es ist aber

22) $$\sum_{\nu=1}^{n_{k+1}} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{m'} a_\nu = \sum_{\nu=1}^{n_{k+1}} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_k'} a_\nu - \sum_{\nu=n_k'+1}^{m'} a_\nu \leqq \sum_{\nu=1}^{n_{k+1}} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_k'} a_\nu + \alpha_{n_k'},$$

23) $$\sum_{\nu=1}^{n_{k+1}} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{m'} a_\nu = \sum_{\nu=1}^{n_{k+1}} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_{k+1}'} a_\nu + \sum_{\nu=m'+1}^{n_{k+1}'} a_\nu \geqq \sum_{\nu=1}^{n_{k+1}} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_{k+1}'} a_\nu - \alpha_{m'},$$

24) $$\sum_{\nu=1}^{m} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_k'} a_\nu = \sum_{\nu=1}^{n_{k+1}} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_k'} a_\nu - \sum_{\nu=m+1}^{n_{k+1}} a_\nu \leqq \sum_{\nu=1}^{n_{k+1}} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_k'} a_\nu + \alpha_m,$$

25) $$\sum_{\nu=1}^{m} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_k'} a_\nu = \sum_{\nu=1}^{n_k} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_k'} a_\nu + \sum_{\nu=n_k+1}^{m} a_\nu \geqq \sum_{\nu=1}^{n_k} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_k'} a_\nu - \alpha_{n_k}.$$

Aus (22), (23), (24), (25) folgt aber wegen (20), (21) und wegen
n $\alpha_n = 0$, daß (19) konvergiert, und zwar zur Summe s, w. z. b. w.
∞

Dem Beweise des Satzes 6 schicke ich folgenden Hilfssatz voraus:

Hilfssatz. *Voraussetzung: Es sei eine Umordnung der Reihe* (6
i bezug auf (7), (8)) *vorgelegt, die zu einer positiven Summe a kon-*
rgiert. Es sei $\varphi(n)$ *die A-Funktion, welche angibt, wie viele Glieder* a_ν
r Folge (7) *vor dem Glied* $-a_n$ *der Folge* (8) *in dieser Anordnung stehen.*

Behauptung: *Es gibt ein n^*, so daß für jedes $n > n^*$ (n ganz) gu*

$$\varphi(n) > n.$$

Beweis. Nach der Definition von $\varphi(n)$ läßt sich eine Zahl n_1 finden, daß für alle ganzen n, m mit $n > n_1$, $\varphi(n) \leqq m \leqq \varphi(n+1)$ gi

$$\left| \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu - a \right| < \frac{a}{2},$$

also insbesondere

$$\sum_{\nu=1}^{\varphi(n)} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu > \frac{a}{2} \tag{26}$$

für alle $n > n_1$.

Wir wählen dann eine Zahl $A > 0$ so, daß $A > \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$ für alle $n \leqq n$

dann gibt es $\left(\text{wegen } \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \to +\infty\right)$ eine ganze Zahl $n^* > n_1$, so daß

$$\sum_{\nu=1}^{n^*} a_\nu \geqq A,$$

aber $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu < A$ für alle $n < n^*$. Wegen $n^* > n_1$ ist nach (2

$\sum_{\nu=1}^{\varphi(n^*)} a_\nu > \sum_{\nu=1}^{n^*} a_\nu \geqq A$, also $\varphi(n^*) > n^*$. Es sei nun $n > n^*$, und es

per absurdum $\varphi(n) \leqq n$.

Es sei n' die erste der Zahlen

$$n^*, n^*+1, \ldots, n,$$

für welche $\varphi(n') \leqq n'$ ist. Dann ist $n' > n^*$, also $n'-1 \geqq n^*$; na der Definition von n' ist also $\varphi(n'-1) > n'-1$. Weil $\varphi(n)$ nicht a nimmt, ist also

$$n' \geqq \varphi(n') \geqq \varphi(n'-1) > n'-1,$$

also $\varphi(n') = n'$, also

$$\sum_{\nu=1}^{\varphi(n')} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n'} a_\nu = 0,$$

was mit (26) im Widerspruch steht.

Beweis des Satzes 6. Um Satz 6 zu beweisen, genügt es, folgend zu zeigen: Wenn eine Umordnung der Reihe (6) vorliegt, die zu ei positiven Summe a konvergiert, so gilt folgendes:

Zu jeder Zahl ε mit $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ läßt sich eine Zahl $k_0 = k_0(\varepsilon)$ finden mit folgender Eigenschaft:

Zu jedem $k > k_0$ gibt es eine Zahl $n_0 = n_0(k, \varepsilon)$, so daß für je ganze $n > n_0$ gilt

$$a \geqq (1 - 2\varepsilon)\gamma_{k,n} - \varepsilon.$$

araus folgt nämlich

$$a \geqq (1-2\varepsilon) \limsup_{n=\infty} \gamma_{k,n} - \varepsilon = (1-2\varepsilon)\gamma_k - \varepsilon$$

ir jedes $k > k_0$, also

$$a \geqq (1-2\varepsilon) \limsup_{k=\infty} \gamma_k - \varepsilon = (1-2\varepsilon)\gamma - \varepsilon,$$

lso entweder ein Widerspruch, wenn $\gamma = +\infty$, oder (durch $\varepsilon \to 0$) $a \geqq \gamma$, enn γ endlich. Das sind aber genau die Behauptungen des Satzes 6.

Es sei also eine Umordnung von (6) vorgelegt, die gegen eine posi-ive Zahl a konvergiert; $\varphi(n)$ sei die A-Funktion, die angibt, wie viele $_\nu$ in dieser Umordnung vor $-a_n$ stehen. Dann gibt es nach dem eben ewiesenen Hilfssatz ein n^*, so daß $\varphi(n) > n$ für $n > n^*$.

Es sei weiter eine Zahl ε gegeben; $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Ich wähle zunächst ine Zahl $k_0 > 1$, so daß es für jedes $k > k_0$ eine ganze Zahl $r > 1$ gibt, ir welche

27) $$k < \frac{3}{4} ar < \frac{5}{4} ar < 2k$$

ilt[7]).

Es sei nun ein $k > k_0$ gegeben; ich nehme eine ganze Zahl $r = r(k) > 1$, ie (27) erfüllt, und halte sie im Verlauf des Beweises fest. Dann wähle h eine Zahl $\delta = \delta(k, \varepsilon) > 0$, so daß

28) $$\delta < a, \quad kr\delta < \varepsilon.$$

un wähle ich eine Zahl $n_0 = n_0(k, \varepsilon)$, so daß für jedes ganze $n > n_0$ gilt:

29) $$\varphi(n) > n, \quad \left| \sum_{\nu=1}^{\varphi(n)} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu - a \right| < \delta.$$

ch behaupte nun: für jedes ganze $n > n_0$ ist

30) $$a \geqq (1-2\varepsilon)\gamma_{k,n} - \varepsilon.$$

Beweis: a) Entweder ist $\gamma_{k,n} = 0$; dann ist (30) trivial.

b) Oder sind die beiden Zahlen $\alpha_{k,n}$, $\beta_{k,n}$ definiert, also $\gamma_{k,n} = \frac{2\alpha_{k,n}}{\beta_{k,n}-1}$. annn ist (nach der Definition von $\alpha_{k,n}$) erstens

31) $$\alpha_{k,n} \geqq \frac{1}{k}.$$

---

[7]) Eine solche Zahl k_0 gibt es, da die Bedingung besagt: Auf der offenen trecke $\frac{4}{3}\cdot\frac{k}{a} \ldots \frac{8}{5}\cdot\frac{k}{a}$ soll es mindestens eine ganze Zahl $r > 1$ geben; das ist sicher füllt, wenn $\frac{4}{3}\cdot\frac{k}{a} > 1$, $\left(\frac{8}{5} - \frac{4}{3}\right)\frac{k}{a} > 1$; also kann ich — sogar unabhängig von ε — B. setzen $k_0 = \mathrm{Max}\left(\frac{15}{4}a, 2\right)$.

Zweitens gibt es eine ganze Zahl $n' > n$, so daß

$$\sum_{\nu=n+1}^{n'} a_\nu = -\alpha_{k,n} \tag{32}$$

und

$$\sum_{\nu=n+1}^{m} a_\nu \leqq 0 \quad \text{für} \quad m = n, n+1, \ldots, n'. \tag{33}$$

Ich setze nun

$$n_1 = n, \quad n_2 = \varphi(n_1), \quad n_3 = \varphi(n_2), \quad \ldots, \quad n_{r+1} = \varphi(n_r);$$
$$n_1' = n', \quad n_2' = \varphi(n_1'), \quad n_3' = \varphi(n_2'), \quad \ldots, \quad n_r' \quad = \varphi(n_{r-1}').$$

Wegen $n' > n_0$, $n > n_0$ ist nach (29)

$$\begin{cases} n = n_1 < n_2 < \ldots < n_r < n_{r+1}, \\ n' = n_1' < n_2' < \ldots < n_{r-1}' < n_r' \end{cases} \tag{34}$$

und

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n_{i+1}} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_i} a_\nu - a \right| < \delta \qquad (i = 1, 2, \ldots, r), \tag{35}$$

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n_{i+1}'} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_i'} a_\nu - a \right| < \delta \qquad (i = 1, 2, \ldots, r-1 \tag{36}$$

Insbesondere ist also

$$\sum_{\nu=1}^{n_2} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_1} a_\nu = \sum_{\nu=n_1+1}^{n_2} a_\nu > a - \delta > 0$$

(nach (28)), woraus wegen (33) folgt

$$n_1' < n_2.$$

Wegen der Monotonie der Funktion $\varphi(n)$ und wegen (34) folgt daraus

$$n_1 < n_1' < n_2 \leqq n_2' \leqq n_3 \leqq \ldots \leqq n_r \leqq n_r' \leqq n_{r+1}.$$

Aus (35) folgt für $i = 2, 3, \ldots, r+1$

$$(a-\delta)(i-1) < \sum_{\nu=n_1+1}^{n_i} a_\nu < (a+\delta)(i-1) \tag{37}$$

und aus (36) für $i = 2, 3, \ldots, r$

$$(a-\delta)(i-1) < \sum_{\nu=n_1'+1}^{n_i'} a_\nu < (a+\delta)(i-1). \tag{38}$$

Daraus folgt erstens für $i = 1, 2, \ldots, r$:

$$\begin{cases} \sum_{\nu=n_i+1}^{n_i'} a_\nu = \sum_{\nu=n_1'+1}^{n_i'} a_\nu - \sum_{\nu=n_1+1}^{n_i} a_\nu + \sum_{\nu=n_1+1}^{n_1'} a_\nu = \\ \leqq (a+\delta)(i-1) - (a-\delta)(i-1) - \alpha_{k,n} = 2\delta(i-1) - \alpha_{k,n} \end{cases} \tag{39}$$

ür $i = 1$ ist (39) trivial wegen (32)), also

$$\text{40)} \qquad \sum_{\nu=n_i+1}^{n_i'} |a_\nu| \geqq \alpha_{k,n} - 2\delta(i-1);$$

nd zweitens für $i = 1, 2, \ldots, r$

$$\sum_{\nu=n_i'+1}^{n_{i+1}} a_\nu = \sum_{\nu=n_i+1}^{n_{i+1}} a_\nu - \sum_{\nu=n_i+1}^{n_i'} a_\nu \geqq a - \delta + \alpha_{k,n} - 2\delta(i-1)$$

ach (35) und (39)), also

$$\text{41)} \qquad \sum_{\nu=n_i'+1}^{n_{i+1}} |a_\nu| \geqq a + \alpha_{k,n} - \delta(2i-1).$$

ach (40), (41) ist

$$\text{42)} \qquad \sum_{\nu=n_1+1}^{n_{r+1}} |a_\nu| \geqq r\,a + 2r\,\alpha_{k,n} - 2\delta \sum_{i=1}^{r}(i-1) - \delta \sum_{i=1}^{r}(2i-1)$$

$$= r\,a + 2r\,\alpha_{k,n} - r(2r-1)\delta.$$

ndererseits gibt (37), auf $i = r+1$ angewandt,

$$\text{43)} \qquad (a-\delta)r < \sum_{\nu=n_1+1}^{n_{r+1}} a_\nu < (a+\delta)r.$$

egen (28) ist $\delta < \frac{1}{4}$ (weil $k > 1$, $r \geqq 2$, $\varepsilon < \frac{1}{2}$), also ist nach (27)

$$k < \frac{3}{4}ar < \sum_{\nu=n_1+1}^{n_{r+1}} a_\nu < \frac{5}{4}ar < 2k.$$

lso muß gelten

$$\frac{\sum_{\nu=n_1+1}^{n_{r+1}} |a_\nu|}{\sum_{\nu=n_1+1}^{n_{r+1}} a_\nu} \leqq \beta_{k,n}.$$

ach (42), (43) ist also um so mehr

$$\beta_{k,n} > \frac{a + 2\alpha_{k,n} - (2r-1)\delta}{a+\delta}$$

so

$$a > \frac{2\alpha_{k,n} - (2r-1)\delta - \delta\cdot\beta_{k,n}}{\beta_{k,n} - 1};$$

so

$$\text{44)} \qquad a > \frac{2(\alpha_{k,n} - r\delta)}{\beta_{k,n} - 1} - \delta\frac{\beta_{k,n}}{\beta_{k,n}-1}.$$

ach (31) ist $\alpha_{k,n} \geqq \frac{1}{k}$, also wegen (28) $r\delta < \frac{\varepsilon}{k} \leqq \varepsilon\,\alpha_{k,n}$.

Andererseits ist aber für $\beta_{k,n} > 2$: $\delta \frac{\beta_{k,n}}{\beta_{k,n}-1} < 2\delta < \varepsilon$; für $1 < \beta_{k,n} \leqq$ ist aber $\delta \frac{\beta_{k,n}}{\beta_{k,n}-1} < \frac{2\delta}{\beta_{k,n}-1} < \frac{2\varepsilon\alpha_{k,n}}{\beta_{k,n}-1}$, jedenfalls ist also $\delta \frac{\beta_{k,n}}{\beta_{k,n}-1} < \varepsilon + \frac{2\varepsilon\alpha_{k,}}{\beta_{k,n}-}$ woraus nach (44)

$$\alpha > \frac{2\alpha_{k,n}(1-2\varepsilon)}{\beta_{k,n}-1} - \varepsilon = (1-2\varepsilon)\gamma_{k,n} - \varepsilon$$

folgt, w. z. b. w.

Ich will noch zeigen, daß die Schranke $\frac{2\alpha}{\beta-1}$ im Satz 5 und d Schranke γ im Satz 6 im Falle $\gamma > 0$ die „wahren Schranken" sind[8]). D wird durch folgende zwei Sätze geleistet:

Satz 7. *Es seien α_0, β_0 zwei endliche Zahlen, $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 1$. Dan läßt sich eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ mit*

$$a_n \to 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \to +\infty \tag{45}$$

und mit $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ konstruieren, so daß sich die Reihe (6) in bezu auf (7), (8) zur Summe $\frac{2\alpha_0}{\beta_0-1}$ umordnen läßt.

Satz 8. *Es sei γ_0 eine endliche Zahl, $\gamma_0 > 0$, dann läßt sich ei Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ mit*

$$a_n \to 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \to +\infty \tag{45}$$

und mit $\gamma = \gamma_0$ konstruieren, so daß sich die Reihe (6) in bezug a (7), (8) zur Summe γ_0 umordnen läßt.

Der Satz 8 folgt aus dem Satz 7. Denn es sei $0 < \gamma_0 < +\infty$ und es sei β_0 durch die Gleichung $\gamma_0 = \frac{2}{\beta_0-1}$ bestimmt (also $1 < \beta_0 < +\infty$ Nach Satz 7 gibt es eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$, für welche (45) gilt, n $\alpha = 1$, $\beta = \beta_0$, so daß sich die Reihe $a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + \ldots$ zum W $\frac{2}{\beta_0-1} = \gamma_0$ umordnen läßt.

Nach dem, was gesagt wurde, als wir den Satz 5 aus dem Satz gefolgert haben, ist für diese Folge notwendig $\gamma \geqq \frac{2}{\beta_0-1} = \gamma_0$. Weil s aber unsere Reihe nach Satz 6 zu keinem kleineren Wert als zu γ u ordnen läßt, so muß $\gamma = \gamma_0$ sein; damit ist also Satz 8 aus Satz 7 geleitet.

---

[8]) Auch im Fall $\gamma = 0$ kann man gewissermaßen sagen, daß Satz 6 die wa Schranke liefert; denn nach Satz 4 gibt es Reihen (6), die sich zu *jeder* reel Summe umordnen lassen; für solche Reihen muß aber nach Satz 6 $\gamma = 0$ sein (m kann sich auch leicht direkt überzeugen, daß aus $\alpha = 0$ folgt $\gamma = 0$).

Beweis des Satzes 7. Ich setze $\delta_0 = \alpha_0 \frac{\beta_0+1}{\beta_0-1}$; dann wähle ich für $a_1, a_2, a_3, \ldots$ diese Folge:

$$a_1 = \delta_0; \qquad a_2 = -\alpha_0; \qquad a_3 = a_4 = \frac{\delta_0}{2}; \qquad a_5 = a_6 = -\frac{\alpha_0}{2};$$

$$a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = \frac{\delta_0}{4}; \qquad a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{14} = -\frac{\alpha_0}{4};$$

usw. Allgemein sei für jedes ganze $m \geqq 0$:

$$a_{2^{m+1}-1} = a_{2^{m+1}} = \ldots = a_{2^{m+1}+2^m-2} = \frac{\delta_0}{2^m};$$

$$a_{2^{m+1}+2^m-1} = a_{2^{m+1}+2^m} = \ldots = a_{2^{m+2}-2} = -\frac{\alpha_0}{2^m}.$$

Es kommen also immer nacheinander 2^m Glieder $\frac{\delta_0}{2^m}$, dann 2^m Glieder $-\frac{\alpha_0}{2^m}$. Es ist $a_n \to 0$; wegen $\delta_0 > \alpha_0$ ist offenbar $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \to +\infty$ und $\beta = \limsup_{n=\infty} \alpha_n = \alpha_0$; weiter sieht man fast unmittelbar, daß $\beta = \frac{\delta_0+\alpha_0}{\delta_0-\alpha_0} = \beta_0$ ist; endlich läßt sich aber die Reihe $a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + \ldots$ zur Summe $\delta_0 - \alpha_0$ umordnen. Man nehme nämlich zuerst die beiden Elemente δ_0, $-\alpha_0$ der Folge

$$a_1, a_2, a_3, \ldots; \tag{7}$$

dann immer zwei Elemente der Folge (7) und nach ihnen ein Element der Folge

$$-a_1, -a_2, -a_3, \ldots; \tag{8}$$

dadurch bekommt man folgende Umordnung:

$$\delta_0 - \alpha_0 + \frac{\delta_0}{2} + \frac{\delta_0}{2} - \delta_0 - \frac{\alpha_0}{2} - \frac{\alpha_0}{2} + \alpha_0 + \frac{\delta_0}{4} + \frac{\delta_0}{4} - \frac{\delta_0}{2}$$
$$+ \frac{\delta_0}{4} + \frac{\delta_0}{4} - \frac{\delta_0}{2} - \frac{\alpha_0}{4} - \frac{\alpha_0}{4} + \frac{\alpha_0}{2} - \frac{\alpha_0}{4} - \frac{\alpha_0}{4} + \frac{\alpha_0}{2} + \ldots,$$

und es ist klar, daß diese Reihe gegen $\delta_0 - \alpha_0$ konvergiert. Es ist aber $\delta_0 - \alpha_0 = \frac{2\alpha_0}{\beta_0-1}$, womit der Satz 7 bewiesen ist.

Schlußbemerkungen.

I. Die Untersuchungen des § 1 hängen gar nicht davon ab, daß

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \to +\infty \tag{a}$$

vorausgesetzt wurde. Daher kann diese Bedingung ohne weiteres fortgelassen werden, und die Sätze 1, 2, 3 bleiben richtig. Eine unmittelbare Folge dieser Bemerkung ist folgender

Satz 9. *Es sei*

$$c_1 + c_2 + c_3 + \ldots = s \tag{46}$$

eine bedingt konvergente Reihe mit reellen Gliedern;

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \tag{47}$$

$$b_1, b_2, b_3, \ldots \tag{48}$$

seien zwei Teilfolgen der Folge

$$c_1, c_2, c_3, \ldots,$$

die allen am Anfang des § 1 ausgesprochenen Bedingungen genügen, b auf die Bedingung (4a); im Gegenteil, es soll jetzt zwei endliche Zahl (A, B) geben, so daß für alle ganzen $n \geqq 1$ ist

$$A < \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu < B. \tag{49}$$

Behauptung. *Die Reihe (46) läßt sich in bezug auf (47), (4 zu keiner anderen Summe als zu s umformen.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $s = 0$. Wege (46) und (49) gibt es zwei Zahlen C, D, so daß für alle ganzen $n \geqq$

$$C < \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu < D.$$

Also liegen bei jeder Umordnung von (46) in bezug auf (47), (48) al Partialsummen zwischen $A + C$ und $B + D$. Also gilt für alle Zahlen s zu welchen sich (46) in bezug auf (47), (48) umordnen läßt,

$$A + C \leqq s' \leqq B + D. \tag{50}$$

Die Zahlen s' bilden aber nach Satz 3 einen Modul, der also nach (5 aus der einzigen Zahl Null besteht, w. z. b. w.

II. Endlich ist klar, daß auch die Realität der Glieder der b trachteten Reihen bei den Untersuchungen des § 1 keine Rolle spiel

(Eingegangen am 31. 1. 1925.)

Note on the location of the roots of a polynomial.

By

J. L. Walsh, of Cambridge, Massachusetts.

It is the object of this note to extend some recent results due to zegö [1]) concerning the location of the roots of the polynomial

:) $$a_0 b_0 + \binom{n}{1} a_1 b_1 x + \binom{n}{2} a_2 b_2 x^2 + \ldots + a_n b_n x^n,$$

hen the roots of the polynomials

:) $$a_0 + \binom{n}{1} a_1 x + \binom{n}{2} a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

:) $$b_0 + \binom{n}{1} b_1 x + \binom{n}{2} b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n$$

e known.

Thus Szegö shows that if the roots of (2) lie in a circular region[2]) C_1 nd if ξ is any root of (1), then we have

:) $$\xi = -\alpha\beta_i$$

here α is some point of the region C_1 and β_i is a root of (3). It follows mmediately, as Szegö points out, that if all the roots of (2) and of (3) e inside [or outside] the unit circle whose center in the origin, then all e roots of (1) likewise lie inside [or outside] that unit circle. It is tural to inquire what can be said of the roots of (1) if it is known erely that the roots of (2) lie in a given circular region C_1 and those (3) in a given circular region C_2. Thus we can state

Theorem I. *Let S denote the locus of the variable point $z = -\alpha\beta$ hen the variable points α and β (varying independently) have as their*

[1]) G. Szegö, Bemerkungen zu einem Satz von J. H. Grace über die Wurzeln gebraischer Gleichungen, Math. Zeitschr. 13 (1922), S. 28—55.

[2]) A circular region is a closed region bounded by a single circle or by a straight e. We use the same notation for the region as for its boundary.

respective loci the circular regions C_1 and C_2. If C_1 is the locus of t roots of (2) *and C_2 the locus of the roots of* (3), *then S is the locus the roots of* (1).

Theorem I includes the results of Szegö stated above concerni the roots of (1). Let us proceed to show that Theorem I includes al the following:

Theorem II. *If all the roots of a polynomial lie on or within circle, then all the roots of its derivative also lie on or within that circ*

Denote by $f(x)$ the polynomial of Theorem II and by n its degre the polynomial (2) of Theorem I is to be identified with $f(x)$. The circ of Theorem II shall be the circle C_1 of Theorem I; we choose the cent of C_1 as the origin of co-ordinates. This choice involves no loss of gen rality, for if any translation is made of the roots of $f(x)$, then the roo of the derivative $f'(x)$ undergo the same translation. Set (3) equal the polynomial

$$n x (x+1)^{n-1}$$

so that (1) becomes $x f'(x)$. For the circular region C_2 we choose t region $|x| \leqq 1$. Then the region S is the region C_1 itself, so Theorem is established. Theorem II is equivalent to the well-known theorem Lucas:

If all the roots of a polynomial lie in a convex region, then all t roots of its derivative also lie in that region.

Theorem I suggests that the determination of the locus S in mo general cases than that of the unit circle used by Szegö or of the trivi case just used in connection with Theorem II. *We devote the remaind of this paper to the determination of the locus S for all possible choic of the circular regions C_1 and C_2.*[3])

If we are determining the locus S *merely for use in connection wi Theorem* I, we must according to the convention of Szegö's theorem co sider infinity as an ordinary value of the variables α and β, so that circular region which extends to infinity contains as one of its points t point at infinity. Thus if C_1 contains the origin and C_2 the point

[3]) The determination of the locus of $z = \alpha'\beta'$ when α' and β' have assign circular regions as their loci can of course be easily found from the locus of $z = -$ worked out in detail in the text. The determination of the locus of $z = \frac{\alpha'}{\beta'}$ under th same conditions can be made to depend on the problem worked out in the text, means of the subsitution $\beta' = -\frac{1}{\beta}$; indeed we may similarly study the locus of product of any linear rational function of α' by any linear rational function of β

finity, the locus S must be considered to include all points of the plane. or if in (2) and (3) we set

$$a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0, \qquad a_n \neq 0,$$
$$b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = b_n = 0, \qquad b_0 \neq 0,$$

ie polynomial (1) vanishes identically and S includes all points of the lane. If we are determining the locus S *for its own sake*, we may rule ut the possibility that α or β should be infinite; thus the point sets C_1 nd C_2 need not be closed so far as concerns the point at infinity, from hich it follows that the point set S need not be closed even so far as oncerns its finite points. *In the remainder of the present paper we adopt is latter point of view*, but the locus S according to the former con- ention is readily determined from the locus S according to the latter onvention. It is sufficient to consider the point set S to be closed with eference to the point at infinity, and to be the entire plane if the region $_1$ [or C_2] includes the origin and the region C_2 [or C_1] includes the oint at infinity.

There are some trivial cases which should be treated before we pro- eed to those which are more involved. If C_1 is the null-circle at the rigin O, the locus S coincides with C_1, no matter what may be the gion C_2. If C_1 is any other null-circle, the region S is the interior of circle, the exterior of a circle, or a half-plane according as the region $_2$ is the interior of a circle, the exterior of a circle, or a half-plane; ie boundary of S is readily found from the boundary of C_2. If C_1 is ot the null-circle at the origin and if C_2 is the entire plane, the region is also the entire plane.

If the region C_1 contains (though it may not consist of) all points terior to a circle C_1' whose center is the origin, and the region C_2 con- ins all points exterior to a circle C_2' whose center is the origin, the cus S of z is the entire plane. For if z is any point whatever, there n be found α interior to C_1' and β exterior to C_2' such that $z = -\alpha\beta$. similar fact holds if the circle C_1' passes through the origin and the nter of the circle C_2' is the origin, or if the center of C_1' is the origin d the region C_2 is a half-plane. These degenerate cases are henceforth cluded.

In the case where the region S is not merely a null-circle and is ot the entire plane, we notice that since the regions C_1 and C_2 are both osed point sets, the region S is also a closed point set except possibly the case that the origin is on the boundary of one of the regions C_1, C_2 d the point at infinity on the boundary of the other. Here the locus S ed not be closed, as is seen from 3. 1. below. Whenever the point z

belongs to the locus and is on the boundary of its locus S, the co responding points α and β must lie on the boundaries of the regions C and C_2 respectively. For if α for instance is interior to the region C_1 we may fix β and move α over a two-dimensional regio in its ow neighborhood. By the conformality of the transformation $z = -\alpha\beta$, th point z then moves over a two-dimensional region in its neighborhoo and so is not on the boundary of its locus. We shall consider, then, is natural, the problem of determining all points z which correspond t boundary points α and β.

The problem of the determination of S is divided into three maj cases, namely, 1. the regions C_1 and C_2 both bounded by proper circle 2. the region C_1 bounded by a circle but C_2 bounded by a straight lin 3. the regions C_1 and C_2 both bounded by straight lines.

1.0. Let the circles C_1 and C_2 which are the respective boundari of the loci of α and β have the centers $\bar{\alpha}$ and $\bar{\beta}$ and radii r_1 and r Let β be fixed on the circle C_2. Then all points z corresponding to th particular value of β and to points α on C_1 lie on the circle C who center is the point $-\bar{\alpha}\beta$ and whose radius is $r_1|\beta|$. As β varies ov the circle C_2, the circle C is a variable circle whose center lies on t fixed circle whose center is $-\bar{\alpha}\bar{\beta}$ and radius $|\bar{\alpha}|r_2$. Moreover, the radi of C is constantly proportional to $|\beta|$ and hence to the distance fro the origin of the center of C. Hence the envelope of C consists of tw conjugate cartesian ovals. For in general, we have the theorem:[4])

If a variable circle C moves so that its center traces a fixed cir and its radius is constantly proportional to the distance of the cen from a fixed point, then the envelope of C consists of two conjug cartesian ovals.

It will be convenient for us to prove this theorem; we restr ourselves first to the general case that neither C_1 nor C_2 passes throu the origin O.

For the proof of the theorem, we introduce new co-ordinate ax the fixed circle shall be C', whose center is the origin and radius the variable circle shall be C, whose radius is hD, where h is the c

---

[4]) This theorem and its proof which follows are from F. Gomes Teixei Courbes spéciales remarquables 1 (Coïmbre 1908), S. 232—233.

There is no universal agreement in the literature as to whether a cartesian o is an algebraic curve (in general irreducible) of certain type or whether this a braic curve is composed of two conjugate but distinct cartesian ovals. In the pres paper we adopt as more convenient the latter convention.

ant of proportionality and D the distance from the center of C to the xed point A: (a, o). The circle C is the circle

5) $(x - R\cos\varphi)^2 + (y - R\sin\varphi)^2 = h^2 D^2 = h^2(R^2 + a^2 - 2aR\cos\varphi)$,

nd the equation of the envelope is found by the elimination of φ from (5) nd the equation obtained from (5) by partial differentiation with respect o φ:

6) $$x\sin\varphi - y\cos\varphi = ah^2\sin\varphi.$$

he equation of the envelope is thus

7) $$[x^2 + y^2 + R^2 - h^2(R^2 + a^2)]^2 - 4R^2[(x - ah^2)^2 + y^2] = 0.$$

This curve actually consists of two real conjugate ovals, for the curve symmetric in the x-axis and cuts the x-axis in four real points. These ur points are distinct unless at least one of the following relations is tisfied:

$$R = \pm a, \quad R = \pm ah, \quad h = 1.$$

one of these relations is satisfied, the curve is a limaçon. The curve 7) can have no finite double points unless the curve reduces to a limaçon[5]), except in that case the two ovals have no point in common.

If equation (5) is satisfied, substitution for the first bracket in (7) its value as found by (5) gives for the left-hand member of (7) the xpression

$$4R^2[(x - ah^2)\cos\varphi + y\sin\varphi]^2 - 4R^2[(x - ah^2)^2 + y^2],$$

hich is always less than or equal to zero. If x and y are very large, e left-hand member of (7) is positive. Thus the variable circle C whose uation is (5), is separated from the point at infinity by one and only ie of the ovals which form its envelope. Hence those two ovals must e one within the other, and the circle C always lies between them. The rcle C may or may not surround the inner oval.

There is, moreover, a real circle (5) which passes through every point her on the curve (7) or between the two ovals of (7). For the reader ll notice that when (x, y) is given, the condition that it be possible solve (5) for a real angle φ is precisely the condition that the left- nd member of (7) should be less than or equal to zero.

It will be noticed that we have not stated that every circle (5) is ngent to the curve (7) in two real points. Indeed this is not true[6])

[5]) Teixeira, loc. cit. p. 222.

[6]) For particular curves it occurs that as the circle C varies it is successively ngent to the outer oval of (7) at two real distinct joints, tangent to that outer

nor is it essential in the argument to be used. We now proceed to d termine the locus S in the various cases which arise. Our division in sub-cases depends on whether the loci C_1 and C_2 are interior or exteri to their bounding circles. We return to the original co-ordinate syste for α and β, although we shall not attempt to transform the curve (to the original system.

1.1. If neither of the circles C_1, C_2 passes through the origin, a if the loci of α and β are interior to the circles C_1 and C_2 then t locus S consists of the entire interior (boundary included) of the out oval of the curve (7). In fact, all points z which correspond to tw points α and β on the boundaries of their loci lie on C in some positi and hence lie on or between the two ovals. Therefore the boundary S, if any, must consist of points of one oval or the other or both. T region S has a boundary, for if $|z|$ is very large it is impossible to fi α and β in their proper regions so that $z = -\alpha\beta$. Moreover, the regi S is a closed point set.

No point P of the interior oval can be a boundary point of S, there is a circle C tangent to the oval at P. Then motion of the c responding point β from the circle C_2 into the interior of C_2 moves t circle C into the interior of the inner oval, unless C surrounds the inn oval. If the circle C surrounds the inner oval, the point P cannot a point of the boundary of S. For the entire interior of C correspon to the fixed point β and the points α interior to C_1 and hence belon to the locus S.

The locus S has a boundary; every point of the boundary belon to one oval or the other; no point of the inner oval is on the boundar no arc not the entire exterior oval can be the complete boundary, so t locus S consists precisely of the points on and interior to the outer ov This discussion is in its essential features, valid even if the curve (7) a limaçon.

If in a particular case the loci of α and β are interior to circles C_1 and C_2 and the circle C_1 passes through the origin O, circle C will also constantly pass through O, and in this case the velope of the circle C is a limaçon of Pascal[7]). The locus S consists the closed region bounded by and interior to the limaçon if the cu consists of a single oval and the isolated point O. The locus S is closed region bounded by the outer loop if the curve consists of two loo

---

oval at merely one real point, tangent to neither oval in a real point, tangent the inner oval at merely one point, tangent to the inner oval at two real dist points, and the process is reversed.

[7]) See Teixeira, loc. cit. pp. 233, 200.

If both the circles C_1 and C_2 pass through O, the loci of α and β nterior to C_1 and C_2, the envelope of C is a cardiod. The locus S of z the interior of this cardiod.

It is perhaps worth while to treat in the general case an approximation to S which is rough, but which is much more easily determined than S itself. Thus the maximum radius of C is $r_1[|\beta| + r_2]$, he radius of the circle traced by the center of C is $r_2|\bar{\alpha}|$, so all the oints of the locus S are on or within the circle whose center is the oint $-\bar{\alpha}\bar{\beta}$ and whose radius is $r_1 r_2 + r_1|\bar{\beta}| + r_2|\bar{\alpha}|$. In particular, if $= 0$, this radius reduces to $r_1 r_2 + r_1|\bar{\beta}|$, and the curve (7) degenerates o two circles the radius of the larger of which is precisely $r_1 r_2 + r_1|\bar{\beta}|$. f $\bar{\alpha} = \bar{\beta} = 0$, this radius reduces to $r_1 r_2$, which brings us back to the esults of Szegö already mentioned.

If, in the general situation that the loci C_1 and C_2 are interiors of roper circles, the two circles C_1 and C_2 coincide, the envelope of the ircle C is a limaçon. The locus S consists of the interior of the outer oop if there are two loops, the interior of the curve if there is but one. t is interesting to note, and by no means obvious, that if the two loci $_1$ and C_2 are the interiors of circles and coincide, then the locus S is he same as the locus of the point $-\omega^2$ when the point ω has as its ocus the circular region consisting of the interior and circumference of C_1. Whenever a point ω traces a circle, the point $-\omega^2$ (and also the oint ω^2) traces a limaçon. We omit the detailed proofs of these staements.

1. 2. If the regions which are the loci of α and β are the regions *xterior* to the circles C_1 and C_2 just considered, the situation is to be imilarly treated. If O is not actually within both the circles C_1 and C_2 he locus of z is the entire plane. For assume O not within the circle C_2. Then when the point β is very near the origin (β not necessarily on C_2), he corresponding circle C is very small and very near the origin, and here are points z in the entire circular region exterior to C. The eighborhood of O consists of points z of the locus, so the locus S is the ntire plane.

If the circles C_1 and C_2 both surround O, the loci of α and β being xterior to their bounding circles, the point O and neighboring points do ot belong to the locus S. The sort of reasoning used in 1. 1) proves hat the locus S consists of the closed region exterior to the smaller of he two cartesian ovals.

1. 3. There remains finally the case that the locus of α is exterior o the circle C_1 but the locus of β is interior to the circle C_2; the locus f z may or may not be the entire plane. As β traces the circle C_2, the

circle C may surround the smaller cartesian oval or may not surroun that oval. In the former case the locus of z is the closed region exte rior to the smaller oval, and in the latter case the entire plane. In definite numerical situation it is not difficult to determine which situatio obtains. In fact, it is sufficient to consider the two following valu of β:

$$\bar{\beta} + r_1 \frac{\bar{\beta}}{|\bar{\beta}|}, \qquad \bar{\beta} - r_1 \frac{\bar{\beta}}{|\bar{\beta}|}.$$

If the two corresponding circles C are not mutually external and are n tangent externally, the locus of z is not the entire plane, but is th closed region exterior to the smaller cartesian oval. If those circles a mutually external or are tangent externally, the locus of z is the enti plane. In particular if C_2 surrounds O, the locus of z is always th entire plane.

If C_2 passes through O, the circle C is very small as β approach O, and the locus of z is the entire plane whether or not C_1 passes through

If C_1 passes through O, the locus of z is the closed region exteri to the inner oval of the limaçon of Pascal (7), unless that limaçon co sists of but one oval, in which case the locus of z is the entire plan

We have thus completed the determination of the locus of z wh the circular regions C_1 and C_2 are bounded by proper circles. We pr ceed to consider the case that the region C_1 is bounded by a prop circle C_1 but the region C_2 is bounded by a straight line C_2.

2. 0. We consider the locus of $z = -\alpha\beta$ when the locus of α is region bounded by a proper circle C_1 whose center is $\bar{\alpha}$ and radius r and the locus of β is a half-plane bounded by a straight line C_2. W know that if z is on the boundary of its locus then the correspondi points α and β are on the boundaries of their loci. If β is fixed on t line C_2, all the points z which correspond to α on the circle C_1 lie the circle C whose center is the point $-\bar{\alpha}\beta$ and whose radius is $r_1|\beta$ Then as β varies on C_2, the circle C is a circle whose center traces straight line and whose radius is constantly proportional to the distan from the origin of the center of C. We shall determine the envelope the circle C under these conditions.

Introduce new co-ordinate axes without change of origin, and den by $y = \nu$ the line traced by the center of C. Then the circle C can written

$$(x-\mu)^2 + (y-\nu)^2 = k^2(\mu^2+\nu^2)$$

and its envelope is

$$\frac{k^2x^2}{k^2-1} + (y-\nu)^2 = k^2\nu^2, \qquad k^2 \neq 1. \tag{8}$$

his envelope is an ellipse or a hyperbola according as $k>1$ or $k<1$. here is a circle C tangent to the curve (8) at every point (x, y) of ne curve; if (x, y) is given, we need merely set

$$\mu = \frac{x}{1-k^2}.$$

f (8) is a hyperbola, the circle C is always tangent to (8) at two real oints, and lies between the two branches of the curve. If (8) is an llipse, C is not always tangent to (8) at two real points, but is always xterior to (8).

If $k=1$, the circle C constantly passes through the origin O and ence also through the point which is the reflection of O in the line $=\nu$.

If $\nu=0$, the curve (8) degenerates to the point O or to two real nes through O according as $k>1$ or $k<1$. If $\nu=0$ and $k=1$, the urve (8) becomes essentially the axis of y. Return now to the original o-ordinate system.

2.1. If the locus of α is interior to C_1, and if the origin is exterior o C_1, the locus S of the point z is a closed point set bounded by one ranch of the hyperbola (8) and containing in its interior the other branch. he region S does or does not contain the origin according as the gion C_2 does or does not contain the origin. In particular if the ne C_2 passes through the origin, the region S is a closed point set ounded by two half-lines meeting at the origin, and the interior of S lies the angular opening between the half-lines which is greater than two ght angles.

If the locus of α is interior to the circle C_1 and if the origin is terior to the circle C_1, the locus of z is the entire plane.

If the locus of α is interior to the circle C_1 and if the circle C_1 asses through the origin, the region S is the entire plane with the ception of a half-line. If the origin is exterior to the region C_2 or on e boundary of C_2 this half-line is terminated by the origin and passes rough the point $\bar{\alpha}\bar{\beta}$; the origin is a point of the locus S. If the origin interior to C_2, this half-line is terminated by the point $-2\bar{\alpha}\bar{\beta}$ (a oint of the locus S), does not contain the origin, but is part of the ne joining the origin and the point $-2\bar{\alpha}\bar{\beta}$. Here the point $\bar{\alpha}$ is as ual the center of the circle C_1 and the point $\bar{\beta}$ is the point of the ne C_2 which is nearest to O.

2.2. Let the locus of α be exterior to the proper circle C_1 and let e locus of β be a half-plane C_2. If the origin is interior to the locus , the locus S is the entire plane. If the origin is a point of the

locus C_2, the locus S is likewise the entire plane. If the circle C surrounds the origin and if the origin is not a point of the locus C_2, th locus of z is the closed point set exterior to the ellipse (8). If th circle C_1 passes through the origin and if the origin is not a point o the locus C_2, the locus S consists of the entire plane with the exceptio of the segment joining the origin and the point $-2\bar{\alpha}\bar{\beta}$; the extremitie of the segment are points of the locus S.

3.0. We discuss finally the case that both of the regions C_1 and C are half-planes. Let us denote by $\bar{\alpha}$ and $\bar{\beta}$ the points of the boundin lines C_1 and C_2 which are nearest the origin. We study the points which correspond to points α and β on the boundaries of their respectiv loci. When β is fixed on C_2 and α varies on the line C_1, the poin $z = -\alpha\beta$ traces a line C whose nearest point to O is the point $-\bar{\alpha}\beta$ we are to find the envelope of C.

Introduce new co-ordinates without change of origin so that th point $-\bar{\alpha}\bar{\beta}$ becomes the point (a, o). Then the point $-\bar{\alpha}\beta$ traces th line $x = a$, so the line C is

$$x\cos\omega + y\sin\omega = a\sec\omega,$$

whose envelope is the parabola

$$y^2 = -4ax + 4a^2.$$

Return now to the original co-ordinate system.

3.1. If the origin is a point of neither of the regions C_1 and C_2 the locus of z is the closed region consisting of the parabola and a points exterior to it. If the origin is an interior point of either of th regions C_1 and C_2, the locus of z is the entire plane.

If the line C_1 passes through the origin and if the origin is not point of the region C_2, the locus of z is the entire plane with the excep tion of the half-line extending from the origin and passing through th point $\alpha'\bar{\beta}$; the origin is a point of the locus of z. Here α' denotes a arbitrary point interior to the region C_1 and on the line through O pe pendicular to the line C_1.

If the lines C_1 and C_2 both pass through the origin, the locus of is the entire plane.

(Eingegangen am 11. März 1925.)

Transformation der Differentialgleichungen des Dreikörperproblems.

Von

Erich Kähler in Leipzig.

Die Untersuchung der unendlich kleinen Librationen in der Nähe der agrangeschen Lösungen gestaltet sich im Problème restreint außerordentlich einfach, da sie nur auf lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten führt. Aus demselben Grunde sind die Librationen n dem einen Falle auch beim allgemeinen Dreikörperproblem ziemlich eicht zu behandeln, wo die den Lagrangeschen Spezialfällen entsprechenen Bahnen Kreise sind. Dagegen werden die Schwierigkeiten ganz erhebch, sobald die Ausgangsbahnen als allgemeine Kegelschnitte angenommen erden. Dies hat seinen Grund darin, daß in den gebräuchlichen Koordiaten schon die Ausgangslösung eine recht komplizierte Form annimmt. Will man die Untersuchung der infinitesimalen Librationen im allgemeinen Dreikörperproblem in Angriff nehmen, so empfiehlt es sich deshalb, zuerst u versuchen, die Differentialgleichungen des Problems so umzugestalten, aß Lagranges Lösungen in einer möglichst einfachen Gestalt erscheinen. Dies ist in der vorliegenden Abhandlung unternommen worden, und zwar st in dem hier zur Veröffentlichung gelangenden Teile zunächst die fragche Transformation der Differentialgleichungen mitgeteilt. Zur Illustraion der vorhergehenden allgemeinen Betrachtungen sind zum Schluß die ohlbekannten Lagrangeschen Lösungen abgeleitet worden.

1.

Da die Lagrangeschen Lösungen sämtlich Keplersche Bewegungen arstellen, so ist anzunehmen, daß man zur Aufsuchung der für das vorelegte Problem geeignetsten Koordinaten das Zweikörperproblem zum Vorbild nehmen muß.

Die vollkommene Beschreibung der Bewegung zweier gravitierend Körper liefern die Keplerschen Gesetze, die folgendes aussagen: 1. Bei Massen bewegen sich in Kegelschnitten mit dem gemeinsamen Schwe punkt als Brennpunkt. 2. Die vom Schwerpunkt nach den Körpern führe den Leitstrahlen beschreiben in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Im Dreikörperproblem erfolgt die Bewegung im allgemeinen nicht i einer Ebene. An deren Stelle wollen wir hier die Linienflächen betrachte die durch die vom Schwerpunkt aus nach den Körpern hingezogenen Lei strahlen im Laufe der Zeit beschrieben werden, und dann die Bewegun jedes Körpers in seiner Bahnfläche auf folgende Weise darstellen. Die Läng des genannten Radiusvektor werde (für den Körper mit der Masse m mit r_i bezeichnet, seine Richtungskosinusse gegen die Achsen eines durc den Schwerpunkt gelegten Koordinatensystems seien α_i, β_i, γ_i. Die zu Körper m_i gehörige Linienfläche schneidet die um den Schwerpunkt ge legte Einheitskugel in einer krummen Linie, deren von einem bestimmte Anfangspunkt in der Richtung der Bewegung gemessene Länge aus nahe liegenden Gründen die Anomalie genannt werden soll. Der Ort eine Körpers ist in seiner Bahnfläche eindeutig durch seine Anomalie un seinen Radiusvektor festgelegt. Die Fläche selbst wollen wir durch di Richtungkosinusse ihrer Erzeugenden darstellen, wobei diese wieder al Funktionen der Anomalie φ_i angesehen werden. Um den Zusammenhan zwischen Ort und Zeit herzustellen, benutzen wir die zur Zeit t erreicht Flächengeschwindigkeit u_i des Leitstrahls. Es besteht dann die „Keplersch Gleichung“:

$$(1) \qquad \int_{t_0}^{t} u_i(t)\,dt = \int_{\varphi_i^0}^{\varphi_i} \frac{1}{2} r_i^2\,d\varphi_i,$$

aus welcher die zu t gehörige Anomalie bestimmt werden kann.

2.

Es sollen zunächst die Differentialgleichungen des Problems

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x_i}{dt^2} = m_k \dfrac{x_k - x_i}{\varrho_{ik}^3} + m_l \dfrac{x_l - x_i}{\varrho_{il}^3}, \\ \dfrac{d^2y_i}{dt^2} = m_k \dfrac{y_k - y_i}{\varrho_{ik}^3} + m_l \dfrac{y_l - y_i}{\varrho_{il}^3}, \qquad (i,\ k,\ l = 1, 2, 3 \\ \dfrac{d^2z_i}{dt^2} = m_k \dfrac{z_k - z_i}{\varrho_{ik}^3} + m_l \dfrac{z_l - z_i}{\varrho_{il}^3}, \end{cases}$$

den neuen Variablen gemäß transformiert werden. Nimmt man an, da

x_i, y_i, z_i rechtwinklige Koordinaten in bezug auf den Schwerpunkt sind (was erlaubt ist), so gelten außer den obigen noch die folgenden Gleichungen

$$\text{3)} \qquad \sum_{i=1}^{3} m_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} m_i y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} m_i z_i = 0,$$

$$\text{4)} \qquad \sum_{i=1}^{3} m_i \frac{dx_i}{dt} = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} m_i \frac{dy_i}{dt} = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} m_i \frac{dz_i}{dt} = 0.$$

Wegen

$$x_i = r_i \alpha_i, \quad y_i = r_i \beta_i, \quad z_i = r_i \gamma_i$$

hat man

$$\text{5)} \qquad \varrho_{ik}^2 = r_i^2 + r_k^2 - 2 r_i r_k \vartheta_{ik},$$

wenn zur Abkürzung

$$\alpha_i \alpha_k + \beta_i \beta_k + \gamma_i \gamma_k = \vartheta_{ik}$$

gesetzt wird. Bringt man in den Gleichungen (3) die Glieder $m_l x_l$, $m_l y_l$, $m_l z_l$ auf die rechte Seite, quadriert und addiert alle drei Gleichungen, so entsteht

$$m_i^2 r_i^2 + m_k^2 r_k^2 + 2 m_i m_k r_i r_k \vartheta_{ik} = m_l^2 r_l^2,$$

und daraus folgt

$$\text{6)} \qquad \vartheta_{ik} = \frac{(m_l r_l)^2 - (m_i r_i)^2 - (m_k r_k)^2}{2 m_i m_k r_i r_k}.$$

Für ϱ_{ik} bekommt man somit

$$\text{7)} \qquad \varrho_{ik}^2 = \left(1 + \frac{m_i}{m_k}\right) r_i^2 + \left(1 + \frac{m_k}{m_i}\right) r_k^2 - \frac{m_l^2}{m_i m_k} r_l^2.$$

Aus der Definition von φ_i ergibt sich

$$\text{8)} \qquad \left(\frac{d\alpha_i}{d\varphi_i}\right)^2 + \left(\frac{d\beta_i}{d\varphi_i}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_i}{d\varphi_i}\right)^2 = 1.$$

Durch Differentiation folgt aus

$$\text{9)} \qquad \alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1$$

die Gleichung

$$\text{10)} \qquad \alpha_i \frac{d\alpha_i}{d\varphi_i} + \beta_i \frac{d\beta_i}{d\varphi_i} + \gamma_i \frac{d\gamma_i}{d\varphi_i} = 0$$

und weiter

$$\left(\frac{d\alpha_i}{d\varphi_i}\right)^2 + \left(\frac{d\beta_i}{d\varphi_i}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_i}{d\varphi_i}\right)^2 + \alpha_i \frac{d^2\alpha_i}{d\varphi_i^2} + \beta_i \frac{d^2\beta_i}{d\varphi_i^2} + \gamma_i \frac{d^2\gamma_i}{d\varphi_i^2} = 0,$$

also nach (8)

$$\text{11)} \qquad \alpha_i \frac{d^2\alpha_i}{d\varphi_i^2} + \beta_i \frac{d^2\beta_i}{d\varphi_i^2} + \gamma_i \frac{d^2\gamma_i}{d\varphi_i^2} = -1.$$

Für die Differentialquotienten $\frac{dx_i}{dt}, \frac{dy_i}{dt}, \frac{dz_i}{dt}$ ergeben sich die Ausdrücke

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dr_i}{dt}\alpha_i + \frac{d\alpha_i}{dt}r_i, \quad \frac{dy_i}{dt} = \frac{dr_i}{dt}\beta_i + \frac{d\beta_i}{dt}r_i, \quad \text{usw.}$$

Es ist aber (nach (1)) allgemein

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\varphi_i}\frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{dA}{d\varphi_i}\frac{2}{r_i^2}u_i, \tag{12}$$

und damit wird

$$\frac{dx_i}{dt} = \left(-\frac{d\left(\frac{2}{r_i}\right)}{d\varphi_i}\alpha_i + \frac{2}{r_i}\frac{d\alpha_i}{d\varphi_i}\right)u_i, \quad \text{usw.} \tag{13}$$

Außerdem ist

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \left(-\frac{d\frac{2}{r_i}}{d\varphi_i}\alpha_i + \frac{2}{r_i}\frac{d\alpha_i}{d\varphi_i}\right)\frac{du_i}{dt} + \left(-\frac{d^2\left(\frac{2}{r_i}\right)}{d\varphi_i^2}\alpha_i + \frac{2}{r_i}\frac{d^2\alpha_i}{d\varphi_i^2}\right)\frac{2}{r_i^2}u_i^2. \tag{13*}$$

Für $\frac{d^2y_i}{dt^2}, \frac{d^2z_i}{dt^2}$ gelten ganz entsprechende Formeln. Mit Hilfe dieser Beziehungen bilde man nun den Ausdruck

$$\Gamma_i = x_i\frac{d^2x_i}{dt^2} + y_i\frac{d^2y_i}{dt^2} + z_i\frac{d^2z_i}{dt^2}.$$

Man erhält, unter Berücksichtigung von (8), (9), (10), (11),

$$\Gamma_i = -r_i\frac{d\frac{2}{r_i}}{d\varphi_i}\frac{du_i}{dt} - \left(\frac{d^2\left(\frac{2}{r_i}\right)}{d\varphi_i^2}\frac{2}{r_i} + \left(\frac{2}{r_i}\right)^2\right)u_i^2.$$

Andererseits erhält man, indem man für $\frac{d^2x_i}{dt^2}$ usw. die Ausdrücke einführt, die die Differentialgleichungen (2) liefern, für Γ_i den Wert

$$\Gamma_i = m_k\frac{r_ir_k\vartheta_{ik} - r_i^2}{\varrho_{ik}^3} + m_l\frac{r_ir_l\vartheta_{il} - r_i^2}{\varrho_{il}^3},$$

woselbst wegen (5)

$$\vartheta_{ik} = \frac{r_i^2 + r_k^2 - \varrho_{ik}^2}{2r_ir_k}$$

einzusetzen ist. Beide Ausdrücke von Γ_i einander gleichgesetzt, ergeben die Gleichung:

$$r_i\frac{d\left(\frac{2}{r_i}\right)}{d\varphi_i}\frac{du_i}{dt} + \left(\frac{d^2\left(\frac{2}{r_i}\right)}{d\varphi_i^2}\frac{2}{r_i} + \left(\frac{2}{r_i}\right)^2\right)u_i^2 = \frac{m_k}{2\varrho_{ik}} + \frac{m_l}{2\varrho_{il}} + m_k\frac{r_i^2 - r_k^2}{2\varrho_{ik}^3} + m_l\frac{r_i^2 - r_l^2}{2\varrho_{il}^3}. \tag{14}$$

ndem man hier dem Index i die Werte 1, 2, 3 beilegt, bekommt man rei Differentialgleichungen zwischen den von dem Achsenkreuz unabängigen Größen r_i, u_i. Auf ganz ähnliche Weise lassen sich drei weitere leichungen herstellen. Nach (13*) ist

$$5) \qquad \Lambda_i = \frac{d^2x_i}{dt^2}\frac{d\alpha_i}{d\varphi_i} + \frac{d^2y_i}{dt^2}\frac{d\beta_i}{d\varphi_i} + \frac{d^2z_i}{dt^2}\frac{d\gamma_i}{d\varphi_i} = \frac{2}{r_i}\frac{du_i}{dt},$$

enn aus (8) folgt

$$\frac{d^2\alpha_i}{d\varphi_i^2}\frac{d\alpha_i}{d\varphi_i} + \frac{d^2\beta_i}{d\varphi_i^2}\frac{d\beta_i}{d\varphi_i} + \frac{d^2\gamma_i}{d\varphi_i^2}\frac{d\gamma_i}{d\varphi_i} = 0.$$

ie Differentialgleichungen des Problems geben dagegen wegen (10)

$$6) \qquad \Lambda_i = \frac{m_k r_k [ki]}{\varrho_{ik}^3} + \frac{m_l r_l [li]}{\varrho_{il}^3},$$

enn zur Abkürzung

$$\alpha_k \frac{d\alpha_i}{d\varphi_i} + \beta_k \frac{d\beta_i}{d\varphi_i} + \gamma_k \frac{d\gamma_i}{d\varphi_i} = [ki]$$

esetzt wird. Multipliziert man die Gleichungen (3) der Reihe nach mit $\frac{d\alpha_i}{d\varphi_i}, \frac{d\beta_i}{d\varphi_i}, \frac{d\gamma_i}{d\varphi_i}$ und addiert sie, so erhält man

$$7) \qquad m_k r_k [ki] + m_l r_l [li] = 0.$$

ei Berücksichtigung dieser Relation verwandelt sich (16) in

$$\Lambda_i = m_k r_k [ki] \left(\frac{1}{\varrho_{ik}^3} - \frac{1}{\varrho_{il}^3} \right).$$

ieser Ausdruck von Λ_i ist in (15) einzuführen. In den so entstehenden rei Gleichungen

$$8) \qquad \frac{2}{r_i}\frac{du_i}{dt} = m_k r_k [ki] \left(\frac{1}{\varrho_{ik}^3} - \frac{1}{\varrho_{il}^3} \right)$$

ben wir die noch fehlenden Differentialgleichungen vor uns. Bei der nwendung dieser sechs Gleichungen darf man nicht vergessen, daß gleichitig die drei Gleichungen gelten:

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{2u_i}{r_i^2} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

3.

In den eben aufgestellten Gleichungen treten Klammerausdrücke $[ik]$ f, deren Abhängigkeit von den Größen r, u jetzt bestimmt werden soll.

Setzt man zur Abkürzung einstweilen $m_\alpha m_\beta r_\alpha r_\beta [\alpha\beta] = (\alpha\beta)$, so schreibe sich die Gleichungen (17)

$$(19) \qquad \begin{cases} (ki) + (li) = 0, \\ (lk) + (ik) = 0, \\ (il) + (kl) = 0. \end{cases}$$

Aus der Beziehung

$$\alpha_i \alpha_k + \beta_i \beta_k + \gamma_i \gamma_k = \vartheta_{ik}$$

folgt durch Differentiation nach t und Multiplikation mit $m_i m_k r_i r_k$

$$(ki) a_i + (ik) a_k = \sigma_{ik} \quad \left(a_\alpha = \frac{2 u_\alpha}{r_\alpha^2}, \ \sigma_{\alpha\beta} = m_\alpha r_\alpha m_\beta r_\beta \frac{d\vartheta_{\alpha\beta}}{dt} \right.$$

und daraus durch zyklische Vertauschung

$$(20) \qquad \begin{cases} (lk) a_k + (kl) a_l = \sigma_{kl}, \\ (il) a_l + (li) a_i = \sigma_{li}. \end{cases}$$

Die so erhaltenen sechs Gleichungen (von denen nur fünf voneinander un abhängig sind) zeigen, daß

$$\lambda \begin{cases} = \ a_k (ik), \\ = -a_k (lk), \\ = \ a_l (kl) - \sigma_{kl}, \\ = -a_l (il) - \sigma_{kl}, \\ = \ a_i (li) + \sigma_{ik}, \\ = -a_i (ki) + \sigma_{ik} \end{cases}$$

gesetzt werden kann. Hieraus berechnet sich

$$(21) \qquad \begin{cases} [ik] = \frac{\lambda r_k}{2 m_i m_k r_i u_k}, & [ki] = -\frac{(\lambda - \sigma_{ik}) r_i}{2 m_i m_k r_k u_i}, \\ [kl] = \frac{(\lambda + \sigma_{kl}) r_l}{2 m_k m_l r_k u_l}, & [lk] = -\frac{\lambda r_k}{2 m_k m_l r_l u_k}, \\ [li] = \frac{(\lambda - \sigma_{ik}) r_i}{2 m_l m_i r_i u_i}, & [il] = -\frac{(\lambda + \sigma_{kl}) r_l}{2 m_l m_i r_i u_l}. \end{cases}$$

Es bleibt noch übrig, die Größe λ zu bestimmen. Am schnellsten füh da folgender, von Lagrange zuerst angegebener Weg zum Ziel. D Quadrat der identisch verschwindenden Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i & 0 \\ \alpha_k & \beta_k & \gamma_k & 0 \\ \frac{d\alpha_i}{d\varphi_i} & \frac{d\beta_i}{d\varphi_i} & \frac{d\gamma_i}{d\varphi_i} & 0 \\ \frac{d\alpha_k}{d\varphi_k} & \frac{d\beta_k}{d\varphi_k} & \frac{d\gamma_k}{d\varphi_k} & 0 \end{vmatrix}$$

t gleich

$$\begin{vmatrix} 1 & \vartheta_{ik} & 0 & [ik] \\ \vartheta_{ik} & 1 & [ki] & 0 \\ 0 & [ki] & 1 & \eta_{ik} \\ [ik] & 0 & \eta_{ik} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

22)

ierbei ist

$$\frac{d\alpha_i}{d\varphi_i}\frac{d\alpha_k}{d\varphi_k}+\frac{d\beta_i}{d\varphi_i}\frac{d\beta_k}{d\varphi_k}+\frac{d\gamma_i}{d\varphi_i}\frac{d\gamma_k}{d\varphi_k}=\eta_{ik}$$

esetzt worden. Ausgerechnet ergibt die obige Determinante

23) $(1-\eta_{ik}^2)(1-\vartheta_{ik}^2)+(1-[ik]^2)(1-[ki]^2)-1-2\vartheta_{ik}\eta_{ik}[ik][ki]=0.$

m η_{ik} zu ermitteln, bilden wir

*) $$X_{ik}=\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_k}{dt}+\frac{dy_i}{dt}\frac{dy_k}{dt}+\frac{dz_i}{dt}\frac{dz_k}{dt}.$$

er Vergleich der Schwerpunktsgleichungen (4) mit (3) zeigt, daß sich ir X_{ik} derselbe Ausdruck ergeben muß wie der für $r_i r_k \vartheta_{ik}$ in (6), wenn an nur dort r_i, r_k, r_l durch die Geschwindigkeiten v_i, v_k, v_l ersetzt. Es t also

*) $$2\,m_i m_k X_{ik} = m_l^2 v_l^2 - (m_i v_i)^2 - (m_k v_k)^2.$$

abei ist wegen (13)

**) $$v_i^2 = \left(\left(\frac{d\frac{2}{r_i}}{d\varphi_i}\right)^2+\left(\frac{2}{r_i}\right)^2\right)u_i^2.$$

ndererseits finden wir aus (*) und (13) direkt den Ausdruck

23a) $$X_{ik}=u_i u_k\left(\frac{d\frac{2}{r_i}}{d\varphi_i}\frac{d\frac{2}{r_k}}{d\varphi_k}\vartheta_{ik}+\frac{2}{r_i}\frac{2}{r_k}\eta_{ik}-\frac{2}{r_i}\frac{d\frac{2}{r_k}}{d\varphi_k}[ki]-\frac{2}{r_k}\frac{d\frac{2}{r_i}}{d\varphi_i}[ik]\right).$$

us (23a), (**) und (***) läßt sich nunmehr η_{ik} bestimmen.

Werden in (23) die Ausdrücke (21) eingeführt, so ergibt sich eine leichung zur Bestimmung von λ. In den einzelnen Fällen, die später ehandelt werden sollen, wird sich jedoch die Berechnung von λ sehr viel nfacher gestalten, als es hier scheinen möchte.

4.

Sind die Differentialgleichungen (14) und (18) integriert, so kann an sehr leicht die Lage der Bahnen im Raum bestimmen. Es sei B_{ik} er Winkel zwischen den Tangentialebenen an die Bahnflächen von m_i nd m_k. Eine einfache Formel für $\cos B_{ik}$ erhält man auf folgende Weise. s ist

$$(24)\qquad \begin{cases} y_i \dfrac{dz_i}{dt} - z_i \dfrac{dy_i}{dt} = 2u_i \left(\beta_i \dfrac{d\gamma_i}{d\varphi_i} - \gamma_i \dfrac{d\beta_i}{d\varphi_i} \right), \\ z_i \dfrac{dx_i}{dt} - x_i \dfrac{dz_i}{dt} = 2u_i \left(\gamma_i \dfrac{d\alpha_i}{d\varphi_i} - \alpha_i \dfrac{d\gamma_i}{d\varphi_i} \right), \\ x_i \dfrac{dy_i}{dt} - y_i \dfrac{dx_i}{dt} = 2u_i \left(\alpha_i \dfrac{d\beta_i}{d\varphi_i} - \beta_i \dfrac{d\alpha_i}{d\varphi_i} \right). \end{cases}$$

Hieraus und aus $\left(y_i \dfrac{dz_i}{dt} - z_i \dfrac{dy_i}{dt} \right)^2 + \ldots = 4u_i^2$ ist zu erkennen, daß

$$\beta_i \frac{d\gamma_i}{d\varphi_i} - \gamma_i \frac{d\beta_i}{d\varphi_i}, \qquad \gamma_i \frac{d\alpha_i}{d\varphi_i} - \alpha_i \frac{d\gamma_i}{d\varphi_i}, \qquad \alpha_i \frac{d\beta_i}{d\varphi_i} - \beta_i \frac{d\alpha_i}{d\varphi_i}$$

die Kosinusse der Neigungswinkel der Tangentialebene an die Bahnfläch von m_i darstellen. Die Vektoren $\mathfrak{r}_i$, $\mathfrak{r}_i'$ mit den Richtungskosinussen $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, bzw. $\dfrac{d\alpha_i}{d\varphi_i}, \dfrac{d\beta_i}{d\varphi_i}, \dfrac{d\gamma_i}{d\varphi_i}$ liegen also beide in dieser Ebene, und stehe wegen

$$\alpha_i \frac{d\alpha_i}{d\varphi_i} + \beta_i \frac{d\beta_i}{d\varphi_i} + \gamma_i \frac{d\gamma_i}{d\varphi_i} = 0$$

aufeinander senkrecht. Aus der Figur 1 (Darstellung der Vektoren durc Punkte auf der Einheitskugel) folgt dann nach einem Gaußschen Sat die Beziehung

$$\cos B_{ik} = \cos(\mathfrak{r}_i' \mathfrak{r}_k') \cos(\mathfrak{r}_i \mathfrak{r}_k) - \cos(\mathfrak{r}_i \mathfrak{r}_k') \cos(\mathfrak{r}_k \mathfrak{r}_i'),$$

oder

$$(25)\qquad \cos B_{ik} = \vartheta_{ik} \eta_{ik} - [ik][ki].$$

Fig. 1.

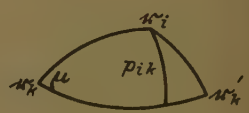


Fig. 2.

Für das Folgende ist es noch nötig, die Ausdrücke

$$\sin p_{ik} = \alpha_i \left(\beta_k \frac{d\gamma_k}{d\varphi_k} - \gamma_k \frac{d\beta_k}{d\varphi_k} \right) + \beta_i \left(\gamma_k \frac{d\alpha_k}{d\varphi_k} - \alpha_k \frac{d\gamma_k}{d\varphi_k} \right) + \gamma_i \left(\alpha_k \frac{d\beta_k}{d\varphi_k} - \beta_k \frac{d\alpha}{d\varphi} \right.$$

zu berechnen, welche den Sinus der von $\mathfrak{r}_i$ auf $\mathfrak{r}_k \mathfrak{r}_k'$ gefällten Höhe in d Dreieck $\mathfrak{r}_i \mathfrak{r}_k \mathfrak{r}_k'$ darstellen. Man hat (vgl. Fig. 2)

$$\sin p_{ik} = \sin(\mathfrak{r}_i \mathfrak{r}_k) \sin \mu = \sqrt{1 - \vartheta_{ik}^2} \sin \mu,$$

$$\cos \mathfrak{r}_i \mathfrak{r}_k' = [ik] = \sin \mathfrak{r}_i \mathfrak{r}_k \cos \mu = \sqrt{1 - \vartheta_{ik}^2} \cos \mu,$$

lso wegen (6)

$$26)\quad \sin p_{ik} = \sqrt{\sin^2(\mathfrak{r}_i \mathfrak{r}_k) - [ik]^2} = \frac{1}{2 m_i m_k r_i r_k} \sqrt{R - (2 m_i m_k r_i r_k [ik])^2},$$

obei R den symmetrischen Ausdruck

$$R = 2(m_i r_i)^2 (m_k r_k)^2 + 2(m_k r_k)^2 (m_l r_l)^2 + 2(m_l r_l)^2 (m_i r_i)^2 - (m_i r_i)^4 - (m_k r_k)^4 - (m_l r_l)^4$$

arstellt.

Nehmen wir nun an, daß die yz-Ebene zugleich die invariable Ebene ei, so erhalten die bekannten drei Flächensätze die Form

$$27)\quad \begin{cases} m_i u_i \left(\beta_i \frac{d\gamma_i}{d\varphi_i} - \gamma_i \frac{d\beta_i}{d\varphi_i}\right) + m_k u_k \left(\beta_k \frac{d\gamma_k}{d\varphi_k} - \gamma_k \frac{d\beta_k}{d\varphi_k}\right) \\ \qquad + m_l u_l \left(\beta_l \frac{d\gamma_l}{d\varphi_l} - \gamma_l \frac{d\beta_l}{d\varphi_l}\right) = a, \\ m_i u_i \left(\gamma_i \frac{d\alpha_i}{d\varphi_i} - \alpha_i \frac{d\gamma_i}{d\varphi_i}\right) + m_k u_k \left(\gamma_k \frac{d\alpha_k}{d\varphi_k} - \alpha_k \frac{d\gamma_k}{d\varphi_k}\right) \\ \qquad + m_l u_l \left(\gamma_l \frac{d\alpha_l}{d\varphi_l} - \alpha_l \frac{d\gamma_l}{d\varphi_l}\right) = 0, \\ m_i u_i \left(\alpha_i \frac{d\beta_i}{d\varphi_i} - \beta_i \frac{d\alpha_i}{d\varphi_i}\right) + m_k u_k \left(\alpha_k \frac{d\beta_k}{d\varphi_k} - \beta_k \frac{d\alpha_k}{d\varphi_k}\right) \\ \qquad + m_l u_l \left(\alpha_l \frac{d\beta_l}{d\varphi_l} - \beta_l \frac{d\alpha_l}{d\varphi_l}\right) = 0. \end{cases}$$

Werden diese drei Gleichungen der Reihe nach mit $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ multiliziert und addiert, so entsteht

$$28)\quad \frac{u_k}{r_k} \sqrt{R - (m_i m_k r_i r_k [ik])^2} + \frac{u_l}{r_l} \sqrt{R - (2 m_i m_l r_i r_l [il])^2} = 2 a m_i r_i \alpha_i.$$

ultipliziert man sie dagegen mit $\beta_i \frac{d\gamma_i}{d\varphi_i} - \gamma_i \frac{d\beta_i}{d\varphi_i}$, u. s. f., so ergibt sich ie Formel

$$29)\quad m_i u_i + m_k u_k (\vartheta_{ik} \eta_{ik} - [ik][ki]) + m_l u_l (\vartheta_{il} \eta_{il} - [il][li]) = a \left(\beta_i \frac{d\gamma_i}{d\varphi_i} - \gamma_i \frac{d\beta_i}{d\varphi_i}\right),$$

elche den Neigungswinkel der Tangentialebene (zu m_i) gegen die invariable Ebene bestimmt.

5.

Die Differentialgleichungen (14) und (18) stellen ein System der . Ordnung dar; es lassen sich jedoch zwei Integrale angeben. Das erste t der Satz der Erhaltung der lebendigen Kraft, welcher in unseren ariablen in folgender Gestalt erscheint

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}m_1u_1^2\left[\left(\frac{d\left(\frac{2}{r_1}\right)}{d\varphi_1}\right)^2+\left(\frac{2}{r_1}\right)^2\right]+\frac{1}{2}m_2u_2^2\left[\left(\frac{d\left(\frac{2}{r_2}\right)}{d\varphi_2}\right)^2+\left(\frac{2}{r_2}\right)^2\right]\\ &\quad+\frac{1}{2}m_3u_3^2\left[\left(\frac{d\left(\frac{2}{r_3}\right)}{d\varphi_3}\right)^2+\left(\frac{2}{r_3}\right)^2\right]=C+\frac{m_1m_2}{\varrho_{12}}+\frac{m_2m_3}{\varrho_{23}}+\frac{m_3m_1}{\varrho_{31}}\end{aligned}\right.$$

Das andere Integral erhält man, indem man die drei Gleichungen (27) quadriert und addiert, und dabei (25) beachtet. So ergibt sich

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} &(m_1u_1)^2+(m_2u_2)^2+(m_3u_3)^2\\ &\quad+2m_1m_2u_1u_2(\vartheta_{12}\eta_{12}-[12][21])\\ &\quad+2m_2m_3u_2u_3(\vartheta_{23}\eta_{23}-[23][32])\\ &\quad+2m_3m_1u_3u_1(\vartheta_{31}\eta_{31}-[31][13])=a^2.\end{aligned}\right.$$

Durch diese beiden Integrale ist das System auf die 7-te Ordnung reduziert.

Im ebenen Dreikörperproblem tritt eine Vereinfachung der Differentialgleichungen insofern ein, als die Größen $[ki]$ eine übersichtlichere Gestalt annehmen. Es ist nämlich in diesem Falle

$$\gamma_i=0,\qquad \alpha_i=\cos(\varphi_i+\varphi_i^0),\qquad \beta_i=\sin(\varphi_i+\varphi_i^0)\qquad (i=1,2,3)$$

wobei φ_i^0 willkürlich wählbare Winkel sind. Danach hat man

$$\begin{aligned}[ki]&=-\cos(\varphi_k+\varphi_k^0)\sin(\varphi_i+\varphi_i^0)\\ &\quad+\sin(\varphi_k+\varphi_k^0)\cos(\varphi_i+\varphi_i^0)=\sin\mathfrak{r}_i\mathfrak{r}_k,\end{aligned}$$

oder

$$(32)\qquad [ki[=\frac{\sqrt{R}}{2m_im_kr_ir_k}.$$

Wird dies in die Differentialgleichungen (18) eingeführt, so erhalten diese die Form

$$(33)\qquad 4m_i\frac{du_i}{dt}=\sqrt{R}\left(\frac{1}{\varrho_{ik}^3}-\frac{1}{\varrho_{il}^3}\right).$$

Die Wurzel $\sqrt{R}$ ist positiv zu nehmen, wenn die Leitstrahlen $\mathfrak{r}_i$, $\mathfrak{r}_k$, $\mathfrak{r}_l$ im betrachteten Augenblick im positiven Sinne aufeinanderfolgen, und die Bewegung in der gleichen Richtung vor sich geht. Aus der letzten Gleichung ist zu erkennen, daß in dem Augenblick, wo die drei Körper in einer geraden Linie liegen, wo also $R=0$ ist, die Flächengeschwindigkeit einen stationären Wert annimmt.

Anwendung auf die Lagrangeschen Lösungen.

Die Frage, ob es im Dreikörperproblem möglich sei, daß die drei lächengeschwindigkeiten konstant sind, führt sogleich auf die Lagrangeschen ösungen. Die Gleichungen

18) $$2\frac{du_i}{dt} = m_k r_i r_k [ki]\left(\frac{1}{\varrho_{ik}^3} - \frac{1}{\varrho_{il}^3}\right)$$

eigen, daß dies nur eintreten kann, wenn entweder beständig

$$\varrho_{12} = \varrho_{23} = \varrho_{31} = \varrho$$

t, oder alle $[ki]$ identisch verschwinden.

Untersuchen wir zunächst den Fall, daß die drei Körper während ihrer anzen Bewegnng ein gleichseitiges Dreieck bilden. Eine leichte geo- ietrische Überlegung zeigt, daß dann zwischen ϱ und den Leitstrahlen r_i ie Beziehung

34) $$r_i^2 = \frac{b_i}{M^2}\varrho^2, \qquad b_i = m_k^2 + m_l^2 + m_k m_l, \qquad M = m_1 + m_2 + m_3$$

esteht. Auf Grund dieser Relationen erhalten die rechten Seiten der leichungen (14) die Gestalt

$$\frac{1}{2\varrho M^2}((m_k + m_l)(M^2 + m_k^2 + m_l^2 - m_i^2) - 2m_i m_k m_l)$$
$$= \frac{1}{2\varrho M^2}((M - m_i)(M^2 + \sum_{\mu=1}^{3} m_\mu^2 - 2m_i^2) - 2m_i m_k m_l)$$
$$= \frac{1}{2\varrho M^2}(M^2 + \Sigma m^2 - 2m_i M)$$

nd die linken Seiten werden $(u_i = c_i)$

$$\left(\frac{d^2\frac{2}{\varrho}}{d\varphi_i^2}\cdot\frac{2}{\varrho} + \left(\frac{2}{\varrho}\right)^2\right)\cdot\frac{M^2 c_i^2}{b_i},$$

daß, wenn man

$$M^2 + \Sigma m^2 - 2M m_i = \lambda_i$$

tzt,

) $$\frac{d^2\left(\frac{2}{\varrho}\right)}{d\varphi_i^2} + \frac{2}{\varrho} = \frac{\lambda_i \cdot b_i}{4M^2 \cdot c_i^2} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

ird. Diese drei Gleichungen müssen vermöge der Beziehungen

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{2}{r_i^2}u_i = \frac{2c_i}{r_i^2}$$

ineinander übergehen. Es ist danach

$$\frac{d\frac{2}{\varrho}}{d\varphi_i}\cdot\frac{c_i}{b_i}=\frac{d\frac{2}{\varrho}}{d\varphi_k}\cdot\frac{b_k}{c_k},\qquad \frac{d^2\left(\frac{2}{\varrho}\right)}{d\varphi_i^2}\cdot\left(\frac{c_i}{b_i}\right)^2=\frac{d^2\left(\frac{2}{\varrho}\right)}{d\varphi_k^2}\cdot\left(\frac{c_k}{b_k}\right)^2$$

und die Gleichung (*) lehrt dann, daß

(a) $$\frac{c_1}{b_1}=\frac{c_2}{b_2}=\frac{c_3}{b_3},$$

(b) $$\frac{\lambda_1 b_1}{c_1^2}=\frac{\lambda_2 b_2}{c_2^2}=\frac{\lambda_3 b_3}{c_3^2}$$

sein muß. Von diesen Relationen sind die letzten beiden schon in de beiden ersten enthalten. Jene lassen sich nämlich unter Berücksichtigun der ersten in die Form

$$\frac{\lambda_1}{b_1}=\frac{\lambda_2}{b_2}=\frac{\lambda_3}{b_3}$$

bringen. Es ist aber

$$b_i=m_k^2+m_l^2+m_k m_l=\Sigma m^2-m_i^2+m_k m_l$$

oder auch

$$b_i=(m_k+m_l)^2-m_k m_l=M^2-2Mm_i+m_i^2-m_k m_l.$$

Durch Addition folgt hieraus

$$2b_i=M^2+\Sigma m^2-2Mm_i=\lambda_i,$$

also $\frac{\lambda_i}{b_i}=2$. Die Gleichungen (a) ergeben

(35) $$c_i=a\cdot b_i,$$

wo a eine beliebige Konstante ist. Aus (*) wird hiernach

$$\frac{d^2\left(\frac{2}{\varrho}\right)}{d\varphi_i^2}+\frac{2}{\varrho}=\frac{1}{2M^3a^2}$$

und die Integration dieser linearen Differentialgleichung liefert dann

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{4M^3a^2}(1+e_i\cos(\varphi_i-\varphi_i^0)).$$

Die Größen e_i und φ_i^0 sind Integrationskonstanten. Wegen

$$\frac{d\frac{1}{\varrho}}{d\varphi_i}=\frac{d\frac{1}{\varrho}}{d\varphi_k},\qquad \frac{d^2\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{d\varphi_i^2}=\frac{d^2\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{d\varphi_k^2}$$

ist $e_1=e_2=e_3=e$ und $\varphi_1-\varphi_1^0=\varphi_2-\varphi_2^0=\varphi_3-\varphi_3^0$, und damit

(36) $$\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{4M^3a^2}(1+e\cos(\varphi_i-\varphi_i^0)).$$

Als Gleichungen der Bahnen der einzelnen Körper erhält man daraus:

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{4 M^2 a^2 \sqrt{b_i}} (1 + e \cos(\varphi_i - \varphi_i^0)). \tag{37}$$

Auf diese Weise sind die Differentialgleichungen (14) und (18) erfüllt. Um nun die räumliche Lage der Bahnen zu ermitteln, bilden wir nach (23a) den Ausdruck η_{ik}. Es ist

$$v_h^2 = 4 M^2 a^2 b_h \left(\left(\frac{d \frac{1}{\varrho}}{d \varphi_i} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varrho} \right)^2 \right) \qquad (h = 1, 2, 3),$$

also

$$2 m_i m_k X_{ik} = 4 M^2 a^2 (m_l^2 b_l - m_i^2 b_i - m_k^2 b_k) \left(\left(\frac{d \frac{1}{\varrho}}{d \varphi_i} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varrho} \right)^2 \right),$$

oder, da

$$\frac{m_l^2 b_l - m_i^2 b_i - m_k^2 b_k}{2 m_i m_k \sqrt{b_i b_k}} = \vartheta_{ik}$$

ist,

$$X_{ik} = 4 M^2 a^2 \sqrt{b_i b_k} \vartheta_{ik} \left[\left(\frac{d \frac{1}{\varrho}}{d \varphi_i} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varrho} \right)^2 \right].$$

In (23a) eingeführt, gibt dies

$$\left\{ \begin{aligned} & 4 M^2 a^2 \sqrt{b_i b_k} \vartheta_{ik} \left[\left(\frac{d \frac{1}{\varrho}}{d \varphi_i} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varrho} \right)^2 \right] \\ & = 4 M^2 a^2 \sqrt{b_i b_k} \left\{ \left(\frac{d \frac{1}{\varrho}}{d \varphi_i} \right)^2 \vartheta_{ik} + \left(\frac{1}{\varrho} \right)^2 \eta_{ik} - \frac{1}{\varrho} \frac{d \left(\frac{1}{\varrho} \right)}{d \varphi_i} ([ki] + [ik]) \right\}. \end{aligned} \right. \tag{38}$$

Da ϑ_{ik} konstant ist, gilt

$$\frac{d(\alpha_i \alpha_k + \beta_i \beta_k + \gamma_i \gamma_k)}{dt} = [ik] \frac{2 u_k}{r_k^2} + [ki] \frac{2 u_l}{r_i^2} = ([ik] + [ki]) \frac{2 a M^2}{\varrho^2} = 0,$$

und es folgt so aus (38)

$$\eta_{ik} = \vartheta_{ik}.$$

Mit Hilfe dieser Beziehung und der Gleichung $[ik] = -[ki]$ formt sich die Gleichung (23) folgendermaßen um

$$1 - 2 \vartheta_{ik}^2 - 2 [ik]^2 + \vartheta_{ik}^4 + [ik]^4 + 2 \vartheta_{ik}^2 [ik]^2 = 0.$$

Hierfür kann man wegen

$$\cos B_{ik} = \vartheta_{ik}^2 + [ik]^2$$

auch schreiben

$$\cos^2 B_{ik} - 2\cos B_{ik} + 1 = 0,$$

d. h.

$$\cos B_{ik} = 1.$$

Die drei Körper bewegen sich in einer Ebene in Kegelschnitten, deren Brennpunkt im Schwerpunkt liegt. Die Exzentrizitäten der Bahnen sind gleich. Der cos des Winkels der Apsidenlinien von m_i und m_k bestimmt sich als

$$(39) \qquad \vartheta_{ik} = \frac{m_l^2 b_l - m_k^2 b_k - m_i^2 b_i}{2 m_l m_k \sqrt{b_i b_k}} = \frac{m_l^2 - m_i m_k - (m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1)}{\sqrt{b_i b_k}}.$$

7.

Der Fall, daß alle $[ik]$ verschwinden, ergibt den zweiten der von Lagrange entdeckten Spezialfälle des Dreikörperproblems. Zunächst folgt aus der Gleichung (23)

$$(1 - \vartheta_{ik}^2)(1 - \eta_{ik}^2) = 0,$$

und das besagt, es ist gleichzeitig

$$\vartheta_{ik}^2 = 1, \qquad \eta_{ik}^2 = 1;$$

denn ist z. B. $\eta_{ik} = \pm 1$, so lehrt die Betrachtung des sphärischen Vierecks $\mathfrak{r}_i \mathfrak{r}_k \mathfrak{r}_k' \mathfrak{r}_i'$, in welchem

$$\eta_{ik} = \cos \mathfrak{r}_i' \mathfrak{r}_k' = \pm 1, \qquad \cos \mathfrak{r}_i \mathfrak{r}_k' = \cos \mathfrak{r}_k \mathfrak{r}_i' = \cos \mathfrak{r}_i \mathfrak{r}_i' = \cos \mathfrak{r}_k \mathfrak{r}_k' = 0$$

ist, daß auch $\cos \mathfrak{r}_i \mathfrak{r}_k = \vartheta_{ik} = \pm 1$ und daher $\cos B_{ik} = \pm 1$ ist.

Die drei Körper bilden also beständig eine gerade Linie, und bewegen sich in einer Ebene. Es läßt sich umgekehrt beweisen, daß aus der Annahme, daß die drei Körper ewig in einer Geraden liegen, die Konstanz der drei Flächengeschwindigkeiten folgt. Da in diesem Falle die drei Bahnflächen zusammenfallen, erkennt man, wenn man sich der geometrischen Bedeutung der $[ik]$ erinnert, daß diese Größen verschwinden. W. z. b. w.

Aus demselben Grunde ist im „geraden Linien-Fall“

$$(40) \qquad \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{d\varphi_3}{dt}.$$

Setzt man die konstanten Flächengeschwindigkeiten gleich c_1, c_2, c_3, so geben die Gleichungen

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{2c_i}{r_i^2} \qquad (i = 1, 2,$$

die Beziehungen

$$(41) \qquad \frac{r_1^2}{c_1} = \frac{r_2^2}{c_2} = \frac{r_3^2}{c_3},$$

woraus zu erkennen ist, daß die drei Radienvektoren in konstantem Verhältnis stehen. Es sei zur Abkürzung $\sqrt{\frac{c_1}{c_2}} = \frac{1}{\mu}$, $\sqrt{\frac{c_1}{c_3}} = \frac{1}{\nu}$ gesetzt, so daß

(42) $$r_1 = \frac{r_2}{\mu} = \frac{r_3}{\nu}$$

wird. Dann gilt, wenn m_1 auf der einen Seite und m_2, m_3 auf der anderen Seite des Schwerpunktes liegen (und dabei m_3 der äußerste Körper ist)

$$m_1 r_1 = m_2 r_2 + m_3 r_3,$$

also

$$m_1 = m_2 \mu + m_3 \nu.$$

Stellt man r_2 und r_3 nach (42) durch r_1 dar, so verwandeln sich die Differentialgleichungen (14) in

$$\frac{d^2 \frac{2}{r_1}}{d\varphi_1^2} + \frac{2}{r_1} = \frac{1}{2c_1^2}\left(\frac{m_2}{(1+\mu)^2} + \frac{m_3}{(1+\nu)^2}\right) = \frac{\lambda_1}{2c_1^2},$$

$$\frac{d^2 \frac{2}{r_1}}{d\varphi_2^2} + \frac{2}{r_1} = \frac{\mu^3}{2c_2^2}\left(\frac{m_1}{(1+\mu)^2} + \frac{m_3}{(\mu-\nu)^2}\right) = \frac{\mu^3}{2c_2^2}\lambda_2,$$

$$\frac{d^2 \frac{2}{r_1}}{d\varphi_3^2} + \frac{2}{r_1} = \frac{\nu^3}{2c_3^2}\left(\frac{m_1}{(1+\nu)^2} + \frac{m_2}{(\mu-\nu)^2}\right) = \frac{\nu^3}{2c_3^2}\lambda_3.$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen stimmen wegen (40) überein, deshalb müssen auch die rechten Seiten gleich sein:

$$\frac{\lambda_1}{c_1^2} = \frac{\lambda_2 \mu^3}{c_2^2} = \frac{\lambda_3 \nu^3}{c_3^2}$$

oder, da $c_2^2 = \mu^4 c_1^2$, $c_3^2 = \nu^4 c_1^2$ ist,

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_2}{\mu} = \frac{\lambda_3}{\nu}.$$

Es muß also sein,

(43)
$$\begin{cases} \text{I.} & \lambda_1 = \dfrac{m_2}{(1+\mu)^2} + \dfrac{m_3}{(1+\nu)^2}, \\ \text{II.} & \lambda_1 = \dfrac{m_1}{\mu(1+\mu)^2} - \dfrac{m_3}{\mu(\mu-\nu)^2}, \\ \text{III.} & \lambda_1 = \dfrac{m_1}{\nu(1+\nu)^2} + \dfrac{m_2}{\nu(\mu-\nu)^2}. \end{cases}$$

Dazu kommt noch

$$m_1 = m_2 \mu + m_3 \nu.$$

Die letzte Gleichung ist jedoch schon in den obigen enthalten. Multipliziert

man nämlich II mit $m_2\mu$ und III mit $m_3\nu$, und addiert beide Gleichungen, so entsteht

$$\lambda_1(m_2\mu + m_3\nu) = m_1\left(\frac{m_2}{(1+\mu)^2} + \frac{m_3}{(1+\nu)^2}\right) = m_1\lambda_1.$$

Die Gleichungen I, II, III liefern im allgemeinen zu einem Tripel m_1, m_2, m_3 ein reelles positives Wertetripel λ, μ, ν.

Hat man λ, μ, ν bestimmt, so gibt die Integration der Gleichung

$$\frac{d^2\frac{1}{r_1}}{d\varphi_1^2} + \frac{1}{r_1} = \frac{\lambda_1}{4c_1^2}$$

folgenden Ausdruck für r_1

$$\frac{1}{r_1} = \frac{\lambda_1}{4c_1^2}(1 + e_1\cos(\varphi_1 - \varphi_1^0)).$$

Genau wie bei der Dreieckslösung ergibt sich auch hier

$$e_1 = e_2 = e_3, \qquad \varphi_1 - \varphi_1^0 = \varphi_2 - \varphi_2^0 = \varphi_3 - \varphi_3^0,$$

und es ist daher

$$(44)\quad \begin{cases} \frac{1}{r_1} = \frac{\lambda}{4c_1^2}(1 + e\cos(\varphi_i - \varphi_i^0)), & u_1 = c_1, \\ \frac{1}{r_2} = \frac{\lambda}{4\mu c_1^2}(1 + e\cos(\varphi_i - \varphi_i^0)), & u_2 = \mu^2 c_1, \\ \frac{1}{r_3} = \frac{\lambda}{4\nu c_1^2}(1 + e\cos(\varphi_i - \varphi_i^0)), & u_3 = \nu^2 c_1. \end{cases}$$

Da die drei Körper immer in einer Geraden liegen, haben die großen Achsen der drei Bahnen die gleiche Lage.

In den Gleichungen (35), (37) und (44) haben wir die verlangte einfachste Darstellung der Lagrangeschen Lösungen gewonnen.

(Eingegangen am 18. Mai 1925.)

Über Funktionen von reellen Argumenten.

(Erste Mitteilung.)

Von

Ludwig Neder in Leipzig.

Indem wir wegen näherer Angaben über den Inhalt der vorliegenden rbeit auf die Überschriften und Einleitungen der einzelnen Abschnitte erweisen, begnügen wir uns für den Augenblick mit der Angabe der geeinsamen Voraussetzungen, welche den nachfolgend zur Sprache kommenen Funktionen auferlegt werden und die (erst bei zwei und mehr Argumenten deutlich hervortretende) Eigenart unserer Betrachtungen bedingen:

Es handelt sich A) um (reelle) *Funktionen eines reellen Argumentes* meist nur als Mittel zum Zweck, aber gelegentlich auch mit selbstständigem nteresse), die in einem Intervall $\mathfrak{R}_1 = \{a < x < A\}$ erklärt und daselbst ei gegebenem ganzem $m \geqq 1$ mindestens m mal differentiierbar sind.

Hauptsächlich aber betrachten wir B) solche (reelle) *Funktionen zweier ellen Argumente*, die in einem Rechteck

$$\mathfrak{R}_2 = \{a < x < A,\ b < y < B\}$$

klärt sind und daselbst bei gegebenem $m \geqq 1$, $n \geqq 1$ sämtliche Abitungen

$$\frac{\partial^{\mu+\nu} f}{\partial x^{\mu}\, \partial y^{\nu}} = f^{(\mu,\nu)}(x, y) \text{ mit } \mu = 0, 1, \ldots, m \text{ und } \nu = 0, 1, \ldots, n$$

esitzen, und zwar sollen dieselben nach Existenz und Wert unabhängig in von der Reihenfolge der Differentiationen, während ihre Stetigkeit forderlichenfalls besonders vorausgesetzt wird.

Weiter kommen noch C) *Funktionen von drei und mehr Argumenten* ur Sprache. Erstere sollen in einem Quader

$$\mathfrak{R}_3 = \{a < x < A,\ b < y < B,\ c < z < C\}$$

erklärt sein und daselbst bei gegebenem $m \geqq 1$, $n \geqq 1$, $r \geqq 1$ sämtliche Ableitungen

$$f^{(\mu,\nu,\varrho)} \text{ mit } \mu = 0, 1, \ldots, m;\ \nu = 0, 1, \ldots, n;\ \varrho = 0, 1, \ldots, r$$

besitzen, welche nach Existenz und Wert unabhängig sind von der Reihenfolge der Differentiationen. Und die Funktionen von mehr als drei Argumenten sollen die entsprechenden Voraussetzungen erfüllen (deren Angabe wohl nicht erforderlich ist).

Die nachfolgenden Betrachtungen sind großenteils nur für Funktionen von einem und zwei Argumenten durchgeführt; jedoch lassen sich dieselben nahezu sämtlich auf Funktionen von drei und mehr Argumenten ausdehnen (wo dies nicht der Fall ist, wird es ausdrücklich gesagt werden).

Und zwar besteht, wenn wir von Funktionen eines Argumentes absehen, der hauptsächlichste Inhalt der vorliegenden Mitteilung in Folgendem: Nachdem 1) der Abschnitt I den vorstehend formulierten Voraussetzungen gewidmet ist, werden wir 2) für Funktionen gemäß B) und C) in den Abschnitten II, III zwei allgemeine Interpolationsformeln mit verschiedenerlei Restgliedern entwickeln. Von diesen Interpolationsformeln werden wir in den späteren Mitteilungen 3) eine Reihe von funktionentheoretischen Anwendungen machen. Den Hauptwert legen wir dabei auf den Punkt 3. —

Schließlich bemerken wir noch, daß es für das Folgende nützlich und bequem ist, sich die Ableitungen $f^{(\mu_1,\ldots,\mu_p)}(x_1, \ldots, x_p)$ mit Hilfe der Gitterpunkte eines äquidistanten Parallelgitters im ersten 2^p-anten eines p-dimensionalen Raumes zu veranschaulichen, das man für $p = 2, 3$ sich rechtwinklig vorstellen und für $p = 2$ in einer Ebene auch noch rechtwinklig wiedergeben kann, während für $p > 2$ diese Wiedergabe nur unter Verzicht auf die Rechtwinkligkeit möglich ist. Bei vorgeschriebener Reihenfolge der Differentiationen ist in diesem Diagramm eine Ableitung repräsentiert durch einen aus Gitterstrecken zusammengesetzten, in jeder der p Koordinaten monotonen Treppenweg, der vom Ursprung ausgeht und im Punkte mit den Koordinaten $\mu_1, \ldots, \mu_p$ endet.

I.

Über die Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge.

§ 1. Hier zu Beginn der vorliegenden Arbeit ist der geeignete Ort für einige Sätze, die hinreichende Bedingungen für die Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge enthalten, welche in den Eingangs formulierten Voraussetzungen für die nachfolgend in Betracht kommenden Funktionen eine wesentliche Rolle spielt.

Solche Sätze sind um so mehr am Platze, als die Literatur in dieser Hinsicht sehr zu wünschen übrig läßt. Man hat sich nämlich, soweit durchgeführte Überlegungen in Frage kommen, ausschließlich beschränkt auf

§ 2. **Funktionen zweier Argumente,** und bei diesen nahezu ausnahmslos auf Sätze, welche die Beziehung

$$(*) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$$

sicherstellen[1]). Was aber praktisch gebraucht wird, ist die Antwort auf die Frage, wann eine beliebig gegebene Ableitung $f^{(\mu,\nu)}(x, y)$ nach Existenz und Wert unabhängig ist von der Reihenfolge der Differentiationen, und diese Fragestellung ist für die Differentialrechnung bei Funktionen mehrerer reellen Argumente *fundamental.*

Die einzigen Ergebnisse in dieser Richtung, welche die deutsche und die französische Enzyklopädie zu zitieren vermag, sind die Betrachtungen in dem hier besonders vollständigen Lehrbuche von O. Stolz[2]), welche in dem folgenden Satze gipfeln:

Satz a. Wenn in einer Umgebung des Punktes (x, y) bei gegebenem $N \geqq 2$ von der Funktion $f(x, y)$ die Ableitungen

$$\frac{\partial^{\mu+\nu} f}{\partial x^\mu\, \partial y^\nu} \text{ mit } 0 \leqq \mu \leqq N-1,\ 0 \leqq \nu \leqq N-1,\ \mu+\nu \leqq N$$

bei dieser Reihenfolge der Differentiationen (erst nach x, dann nach y) existieren und für $\mu \geqq 1$, $\nu \geqq 1$ stetig ausfallen, so sind daselbst sämtliche Ableitungen jener Ordnungen μ, ν vorhanden bei jeder Reihenfolge der Differentiationen, dem Werte nach unabhängig von derselben, und stetig[3]).

Neben diesem „dreieckigen"[4]) Satze hat man sogleich den folgenden leicht zu erhaltenden „rechteckigen"[4])

[1]) Man war dabei vor allem bemüht, die Voraussetzungen möglichst herabzudrücken, und ist in dieser Hinsicht auf Kosten der Einfachheit recht weit gegangen. Im Gegensatz dazu legen wir im vorliegenden Abschnitt den Hauptwert auf einen für die Anwendung bequemen, glatten Wortlaut der Sätze nebst möglichster Einfachheit der Beweise.

[2]) Grundzüge der Differential- und Integralrechnung I (Leipzig 1893), vgl. S. 151—155, speziell den 4. Satz.

[3]) In unserem Diagramm liegen die Bilder der in Voraussetzung und Behauptung auftretenden Ableitungen in einem rechtwinkligen Dreieck, dem die beiden Spitzen Ecken fehlen. Von denjenigen Ableitungen, deren Treppenwege (vgl. den Schluß der Einl.) auf der Hypotenuse $\mu+\nu=N$ enden, wird übrigens (allerdings bei gleichzeitig verringerter Behauptung) etwas weniger vorausgesetzt. Uns kommt es nur darauf an, die Gesamtheit der verwendeten Ableitungen vorzuführen.

[4]) Diese Bezeichnung versteht sich an Hand der vorigen Anmerkung von selbst.

Satz b. Wenn in einer Umgebung des Punktes (x, y) bei $m \geqq 1$, $n \geqq 1$ von der Funktion $f(x, y)$ die Ableitungen

$$\frac{\partial^{\mu+\nu} f}{\partial x^{\mu}\, \partial y^{\nu}} \text{ mit } 0 \leqq \mu \leqq m,\ 0 \leqq \nu \leqq n$$

bei dieser Reihenfolge der Differentiationen existieren und für $\mu \geqq 1$, $\nu \geqq$ stetig ausfallen, so sind daselbst sämtliche Ableitungen jener Ordnungen μ, ν vorhanden bei jeder Reihenfolge der Differentiationen, dem Wert nach unabhängig von derselben, und stetig.

Die Beweise der beiden vorstehenden Sätze liegen auf der Hand, wenn man berücksichtigt, daß man, auf Grund des über die Giltigkeit von (* aussagenden „Elementarsatzes" von H. A. Schwarz[5]), in unserem Diagramm den Differentiations-Treppenweg sukzessive durch jede zulässige Masche des Differentiationsgitters verschieben darf, unbeschadet der Existenz und des Wertes der betrachteten Ableitung.

Die beiden Sätze erfordern die Ausführung von $\frac{1}{2}(N-1)(N+4$ bzw. $mn+m+n$ Differentiationen, also einen sehr geringen Bruchtei der Gesamtheit aller möglichen (für deren Anzahl man leicht $2^{N+1}-$ bzw. $\frac{(m+n+2)!}{(m+1)!\,(n+1)!} - 2$ findet), aber immerhin noch eine erhebliche Rechenarbeit. Einen Fortschritt in dieser Hinsicht bedeutet der folgende Satz 2 Seiner Formulierung voraus schicken wir eine

Verabredung. Wir wollen konsequent für die Indizes von Differentiationen nach $x, y, z, u, v, \ldots$ die Buchstaben m, μ oder μ', bzw. $n,$ oder ν', bzw. r, ϱ oder ϱ', bzw. s, σ oder σ', bzw. t, τ oder $\tau', \ldots$ verwenden. Und zwar sollen (wie bereits in der Einleitung bei der Formulierung unserer Voraussetzungen) obere Indizes, also $f^{(\mu, \nu, \varrho, \sigma, \tau, \ldots)}$, solche Ableitungen bezeichnen, die nach Existenz und Wert von der Reihenfolge der Differentiationen unabhängig sind; die Anzahl bzw. Reihenfolge der oberen Indizes ist dabei stets gleich derjenigen der Argumente. Dagegen wollen wir durch untere Indizes $\mu, \nu, \varrho, \sigma, \tau, \ldots$, die auch nur teilweise oder (passend unterschieden) mehrfach, und in beliebiger Reihenfolge auftreten dürfen, andeuten, daß zuerst nach der durch den ersten Index bestimmten Variablen entsprechend oft differentiiert wird, dann nach der durch den zweiten Index bestimmten Variablen entsprechend oft, ...

Anders als bei den oberen Indizes ist hiernach das Auftreten von Ziffern als untere Indizes ausgeschlossen, so daß eine Kollision mit Bezeichnungen wie f_{112} für $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\, \partial y}$ (die wir übrigens als unzweckmäßig vermeiden) schon deshalb nicht stattfindet. Ferner kann die Bezeichnun

[5]) Vgl. Stolz a. a. O. [2]), S. 150, 3. Satz.

r Ableitungen durch die als Indizes angehängten Differentiationsvariablen
bedenklich neben der unsrigen verwendet werden[6]).

Bei vorstehender Bezeichnungsweise gilt nun

Satz 2.[7]) *Wenn in einer Umgebung des Punktes* (x, y) *bei gegebenem* $m \geqq 1$, $n \geqq 1$ *von der Funktion* $f(x, y)$ *die* 2^2 *„Eck-Ableitungen“*[8])

$$f,\ f_n,\ f_m,\ f_{mn}$$

existieren und stetig ausfallen, so sind daselbst sämtliche Ableitungen

$$f^{(\mu,\nu)} \quad \text{mit} \quad 0 \leqq \mu \leqq m,\ 0 \leqq \nu \leqq n$$

vorhanden bei jeder Reihenfolge der Differentiationen, dem Werte nach unabhängig von derselben, und stetig.

Verschärfung. *Dasselbe gilt bereits dann, wenn die vorausgesetzte Stetigkeit bei jeder Eck-Ableitung nur in Bezug auf diejenigen Argumente stattfindet, nach denen in ihr differentiiert ist (die Stetigkeit der Funktion f selbst entfällt also völlig)*[9]).

Satz 2 zeigt als erstes Beispiel den für die in der vorliegenden Arbeit zu besprechenden „rechteckigen, quaderigen, ...“ Sätze eigentümlichen Umstand, daß sich die Voraussetzung hauptsächlich auf die „Eck-Ableitungen“ bezieht.

Ferner erfordert derselbe (da man noch die Rolle von x und y vertauschen kann) nur $\min(2m+n, m+2n)$ Differentiationen, d. h. nie mehr und für größere Werte von m, n beträchtlich weniger als im Falle des Satzes b[10]).

---

[6]) Unsere Bezeichnung ist nur für den Augenblick zweck möglichster Abkürzung geschaffen. Anderenfalls wären die Indizes x^{μ} statt μ, y^{ν} statt ν, ... geeigneter, einmal diese Bezeichnungsweise eine Fortbildung der i. T. letztgenannten ist.

[7]) Der analoge Satz 1 für Funktionen eines Argumentes ist wertlos und deshalb unterdrückt.

[8]) Es handelt sich in der Voraussetzung um diejenigen Ableitungen, in denen erst 0 oder m mal nach x, dann 0 oder n mal nach y, dann 0 oder r mal nach z, ... differentiiert wird. Die Endpunkte der zugehörigen Differentiationstreppen bilden in unserem (je nach der Anzahl der Argumente) rechteckigen, quaderigen, ... Differentiationsdiagramm die Ecken der Figur, während die Treppen selbst aus Kanten derselben sich zusammensetzen.

[9]) In Übereinstimmung mit Fußnote [1]) haben wir bei der Formulierung unserer Sätze auf jede übertriebene Feinheit verzichtet und deshalb von weiterer Reduktion der Voraussetzungen abgesehen.

[10]) Im Stolzschen Falle des Satzes a kann man, wenn die Existenz der erforderlichen Ableitungen dies Vorgehen ermöglicht, den Satz 2 anwenden mit $m = N-1$, $n = N-1$ und hat dann $3(N-1)$ Differentiationen nötig, d. h. nur $\frac{6}{N+4} \leqq 1$ mal soviele als Stolz, obwohl sich in unserem Falle die Behauptung auf mehr Differentialquotienten erstreckt als im Satz a.

§ 3. **Funktionen von drei und mehr Argumenten,** deren wir un nunmehr zuwenden, ist, soviel ich feststellen kann, in der ganzen Literatu nichts gewidmet als die folgende, drei Zeilen umfassende Bemerkung b O. Stolz[11]): „Um den [oben als Satz a wiedergegebenen] vierten Satz a eine Function von mehr als zwei Veränderlichen zu übertragen, betracht man sie nacheinander als Function von je zweien derselben."

Geht man dieser reichlich knapp gehaltenen Bemerkung ins Einzel nach, so muß man feststellen, daß sie α) in dieser Form überhaupt nic richtig ist und β) auch in anderer Hinsicht den Verhältnissen, die kom plizierter liegen, als es Stolz angenommen hat, nicht ganz gerecht wird[12]

[11]) A. a. O. [3]), vgl. S. 155 das Ende des § 13.

[12]) Nämlich: α) Wenn es sich z. B. um die Gleichung

$$f_{xyz} = f_{xzy}$$

handelt, so sieht man, daß nicht nur die Funktion f selbst, sondern auch einzel Ableitungen derselben als Funktionen von nur zwei Argumenten zu betrachten sin

Ferner: β) Wenn es sich um die Gleichheit irgend zweier, nur durch die Diff rentiationsreihenfolge unterschiedener, Ableitungen handelt, so geht der Sinn d Bemerkung offenbar dahin, daß man von einer Permutation der Differentiation argumente zu einer anderen durch eine Kette von Transpositionen übergehen u die Gleichheit je zweier, hierbei aufeinander folgender Ableitungen aus dem berei genannten Satze von Schwarz[5]) erschließen soll. Dabei kann natürlich die Ket jede beliebige Beschaffenheit haben, sodaß z. B. die Transposition $(x\,y)$ gar nicht od mehrfach auftreten kann.

Wenn es sich etwa um die Gleichheit sämtlicher durch je einmalige Differe tiation nach x, y, z gebildeter Ableitungen dritter Ordnung der Funktion f han de so hat man hiernach als (soviel ich sehe) günstigste Anordnung die Gleichungen

$$f_{xyz} = f_{yxz} = f_{yzx} = f_{zyx}, \qquad f_{xyz} = f_{xzy} = f_{zxy},$$

und man findet den folgenden (zum Vergleich mit den anders erhaltenen Resultat des Textes hier mitgeteilten)

Satz. Damit im Punkte $P = (x, y, z)$ die sämtlichen Ableitungen

$$f^{(\mu,\nu,\varrho)} \quad \text{mit} \quad \mu, \nu, \varrho \quad \text{je} \quad = 0, 1$$

vorhanden und nach Existenz und Wert von der Differentiationsreihenfolge una hängig sind, ist hinreichend, daß

f_z existiert in einer xy-Umgebung,
f_y existiert in einer xyz-Umgebung,
f_x desgl.,
f_{yz} exist., und yz — stetig in einer x-Umg.,
f_{xz} exist., und xz — stetig in einer y-Umg.,
f_{xy} exist., und xy — stetig in einer xz-Umg.,
f_{xyz} exist., und yz — sowie xz — stetig in P.

Dieser auf den einfachstmöglichen Fall bei Funktionen dreier Argumente bezü liche Satz zeigt gegenüber dem insofern analogen Schwarzschen Satze[5]) für zw Argumente den wesentlichen Unterschied, daß von einzelnen Ableitungen die Stet

Wir haben nun für Funktionen dreier Argumente das folgende Ergebnis, das zum Satze 2 durchaus analog und von ebenso einfachem Wortlaut ist:

Satz 3. *Wenn in einer Umgebung des Punktes* (x, y, z) *bei gegebenem* $m \geqq 1, n \geqq 1, r \geqq 1$ *von der Funktion* $f(x, y, z)$ *die* 2^3 *Eckableitungen*[8])

$$f,\ f_r,\ f_n,\ f_{nr},\ f_m,\ f_{mr},\ f_{mn},\ f_{mnr}$$

existieren und stetig ausfallen, so sind daselbst sämtliche Ableitungen

$$f^{(\mu,\nu,\varrho)} \quad \text{mit} \quad 0 \leqq \mu \leqq m, 0 \leqq \nu \leqq n, 0 \leqq \varrho \leqq r$$

vorhanden bei jeder Reihenfolge der Differentiationen, dem Werte nach unabhängig von derselben, und stetig.

Verschärfung. *Wörtlich ebenso wie beim Satz* 2^9).

Der Beweis dieses Satzes kann (was sich an Hand unseres Differentiationsdiagramms recht anschaulich gestaltet) auf dem von Stolz beabsichtigten Wege durch wiederholte Anwendung des Satzes 2 erbracht werden, *nachdem man denselben verallgemeinert hat* durch Einführung einer (als Parameter auftretenden) dritten Variablen z in die Funktion $f(x, y)$. Doch werden wir lieber einen anderen, zum Beweise des Satzes 2 analogen Weg gehen, der ebenfalls induktiv verläuft, jedoch durchsichtiger ist im Hinblick auf die Weiterführung unserer Satzkette bei Funktionen von mehr als drei Argumenten, ohne daß seine Darstellung umfangreicher ausfiele als die des vorgenannten.

Als nächstes Glied besagter Satzkette haben wir für vier Argumente den

Satz 4. *Wenn in einer Umgebung des Punktes* (x, y, z, u) *bei gegebenem* $m \geqq 1, n \geqq 1, r \geqq 1, s \geqq 1$ *von der Funktion* $f(x, y, z, u)$ *die* 2^4 *Eck-Ableitungen*

$$\left\{\begin{array}{l} f,\ f_s,\ f_r,\ f_{rs},\ f_n,\ f_{ns},\ f_{nr},\ f_{nrs}, \\ \qquad f_m,\ f_{ms},\ f_{mr},\ f_{mrs},\ f_{mn},\ f_{mns},\ f_{mnr},\ f_{mnrs} \end{array}\right.$$

existieren und stetig ausfallen, so sind daselbst sämtliche Ableitungen

$$f^{(\mu,\nu,\varrho,\sigma)} \quad \text{mit} \quad 0 \leqq \mu \leqq m, 0 \leqq \nu \leqq n, 0 \leqq \varrho \leqq r, 0 \leqq \sigma \leqq s$$

vorhanden bei jeder Reihenfolge der Differentiationen, dem Werte nach unabhängig von derselben, und stetig.

Verschärfung. *Wörtlich ebenso wie beim Satz* 2^9).

---

keit (in Bezug auf ihre Differentiationsvariablen) nicht nur im Punkte P, sondern auch in gewissen (allerdings nicht vollen) Umgebungen vorausgesetzt werden muß, ein Umstand, der Hervorhebung verdient und auf die von uns im (komplizierteren) Falle des Satzes 3 zu Grunde gelegten Voraussetzungen ein Licht wirft.

Wie nunmehr unsere Satzkette weitergeht, dürfte aus dem Wortlau der Sätze 2, 3, 4 zur Genüge ersichtlich sein. Wir halten uns mit de Formulierung für eine allgemeine Anzahl von Argumenten nicht auf, sonder gehen über zu einer

§ 4. **Verallgemeinerung der vorstehenden Sätze.** Deren Beweis beruhen (wie schon angedeutet) auf einer *Induktion nach der Argumen anzahl.* Hierzu ist es notwendig, zuzulassen, daß unsere Funktione $f(x)$, $f(x,y)$, $f(x,y,z)$, ..., noch von endlich vielen weiteren Variable abhängen, die wir als Parameter von den übrigen, nach wie vor als Argu mente bezeichneten, unterscheiden wollen, und nach denen nicht differen tiiert, sondern nur Stetigkeit vorausgesetzt und behauptet wird.

Diese Verallgemeinerung hat u. a. den Vorteil, daß die Funktion stets von denselben Variablen $x, y, z, u, v, \ldots$ abhängt, sodaß es sic stets um denselben Punkt $P = (x, y, z, u, v, \ldots)$ handelt. Dabei mu die Gesamtzahl der Variablen allerdings, falls die Induktion bis zu der Satze für p Argumente gehen soll, mindestens p betragen, also mit fort schreitender Induktion wachsen; dies hat jedoch keinen Einfluß auf di Beweise, da jene Gesamtzahl bei jedem Schritt allgemein bleibt.

Ferner gewinnt bei besagter Verallgemeinerung auch das erste Glie unserer Kette, nämlich der Satz für Funktionen eines Argumentes, ein Bedeutung und trägt zum Verständnis unserer Induktion wesentlich be

Bevor wir daran gehen, die verallgemeinerte Gestalt unserer Sätz aufzuschreiben, führen wir, um (sonst unvermeidbare) Weitläufigkeiten z umgehen, noch die folgende

Abkürzung $\mathfrak{A}$ ein. Das (in Anlehnung an die für den Begri „Existenz" eingebürgerte Bezeichnung $\exists$ geschaffene) Zeichen $\exists^*$ soll vo einer Funktion bedeuten, daß dieselbe in einem anzugebenden Gebiet erklärt und stetig (in ihren sämtlichen unabhängig Variablen) ist, vor eine Ableitung, daß dieselbe ebenda bei der angegebenen Reihenfolge de Differentiationen vorhanden, (falls mehr als eine Reihenfolge in Frag kommt) dem Werte nach unabhängig von derselben, und stetig ist *in sämt lichen Variablen.*

Dann gilt, indem wir nochmals an die oben (im § 2) getroffene Ver abredung über die Bezeichnung der Ableitungen erinnern, für unsere Funk tionen $f = f(x, y, z, u, v, \ldots)$ bei gegebenen ganzen Zahlen $m \geqq 1$ $n \geqq 1$, $r \geqq 1, \ldots$ der Reihe nach[9]):

Satz 1^*. *Wenn in einer Umgebung des Punktes P*

$(1)_{1,2}$ $\qquad \exists^* \{f, f_m\},$

so gilt ebenda

$$\exists^* f^{(\mu)} \text{ für } 0 \leqq \mu \leqq m.$$

Satz 2^*. *Wenn in einer Umgebung des Punktes P*

$2)_{1-4}$ $\qquad \exists^* \{f, f_n, f_m, f_{mn}\},$

so gilt ebenda

$$\exists^* f^{(\mu,\nu)} \text{ für } 0 \leqq \mu \leqq m,\ 0 \leqq \nu \leqq n.$$

Satz 3^*. *Wenn in einer Umgebung des Punktes P*

$3)_{1-8}$ $\qquad \exists^* \{f, f_r, f_n, f_{nr}, f_m, f_{mr}, f_{mn}, f_{mnr}\},$

so gilt ebenda

$$\exists^* f^{(\mu,\nu,\varrho)} \text{ für } 0 \leqq \mu \leqq m,\ 0 \leqq \nu \leqq n,\ 0 \leqq \varrho \leqq r.$$

Den unter der Voraussetzung

$4)_{1-16}$ $\qquad \exists^* \{\text{die Funktionen aus } (0)\}$

lgenden Satz 4^* anzuschreiben, ist nach dem Vorbild der Sätze $1^*, 2^*, 3^*$ nd 4 wohl nicht erforderlich.

Es liegt auf der Hand, daß mit den Sätzen $2^*, 3^*, 4^*, \ldots$ die ätze $2, 3, 4, \ldots$ ohne weiteres bewiesen sind, da jene diese als Spezialälle enthalten. Ebenso ist für die einander gleichlautenden Verschärfungen er Sätze ohne * der Beweis erbracht, sobald zu den Sätzen mit * die olgende Ergänzung bewiesen ist:

Verschärfung. *Die Behauptung der Sätze* $1^*, 2^*, 3^*, \ldots$ *gilt bereits nn, wenn die vorausgesetzte Stetigkeit bei jeder Eck-Ableitung nur in ezug auf diejenigen Argumente, nach denen in ihr differentiiert ist, und Bezug auf sämtliche Parameter stattfindet.*

Zum Beweise dieser Verschärfung wäre es ausreichend, den folgenden ruchteil derselben zu besitzen:

Die Voraussetzung des Satzes $1^*, 2^*, 3^*, \ldots$ folgt bereits aus der orstehenden reduzierten Form derselben.

Jedoch ist es, statt für diesen Bruchteil eine neue Beweiskette aufbauen, wesentlich bequemer, direkt die gesamte Verschärfung zu beweisen, a man hierzu den beim Beweis der Sätze $1^*, 2^*, 3^*, \ldots$ benutzten Formelpparat ungeändert verwenden kann. Darum soll nachstehend dieser Weg eschritten werden.

§ 5. **Durchführung der Beweise.** Bei derselben nehmen wir ohne eschränkung der Allgemeinheit die auftretende Umgebung des Punktes P s achsenparallel orientiertes Hyper-Rechteck[13]) $\mathfrak{R}$, sowie P als dessen

[13]) Das natürlich auch ein Intervall oder Rechteck sein kann.

Mittelpunkt und im Ursprung gelegen an. Ferner werde zur Abkürzung gesetzt

$$\int_0^x d\xi_1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \dots \int_0^{\xi_{m-1}} F(\xi_m)\, d\xi_m = \int_{(m)}^{x} F,$$

und entsprechend in den anderen Variablen (y nebst $\eta_1, \dots, \eta_n$; z nebst $\zeta_1, \dots, \zeta_r$; ...). Endlich werden stets die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mu &= 0, \dots, m-1, \\ \nu &= 0, \dots, n-1, \\ \varrho &= 0, \dots, r-1, \\ \sigma &= 0, \dots, s-1, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

gelten und nicht mehr besonders erwähnt werden.

Beweis des Satzes 1*. Wegen $(1)_2$ gilt in $\mathfrak{R}$ die Beziehung

$$[1] \qquad f = \int_{(m)}^{x} f_m + \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{x^\mu}{\mu!} f_\mu(0, y, z, u, v, \dots).$$

Hierin gilt Stetigkeit in $\mathfrak{R}$ für die linke Seite wegen $(1)_1$, für das iterierte Integral wegen $(1)_2$, also auch für die zuletztstehende Summe. Durch Einsetzen von m verschiedenen Werten für x und Auflösen der m entstehenden (in den f_μ linearen) Gleichungen nach den f_μ folgt daraus, daß

$$[1]_a \qquad f_\mu(0, y, z, u, v, \dots) \text{ stetig in } \mathfrak{R}.$$

Nunmehr ist aus [1] ersichtlich, daß die Funktion f in $\mathfrak{R}$ eine stetige μ'-te Ableitung besitzt, m. a. W., daß

$$\exists^* f^{(\mu')} \text{ in } \mathfrak{R} \text{ für } 0 \leqq \mu' \leqq m,$$

da das Entsprechende wegen $(1)_2$ sowie $[1]_a$ von jedem Gliede der rechten Seite gilt.

Beweis des Satzes 2*. Wegen $(2)_4$ gilt in $\mathfrak{R}$ die Beziehung

$$[2] \qquad f_m = \int_{(n)}^{y} f_{mn} + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{y^\nu}{\nu!} f_{m\nu}(x, 0, z, u, v, \dots).$$

Wegen $(2)_{3,4}$ ist hierin nach Satz 1* die Ableitung $f_m^{(\nu)}(x, y, z, u, v, \dots$ also erst recht

$$[2]_a \qquad f_{m\nu}(x, 0, z, u, v, \dots) = f_{m\nu} \text{ stetig in } \mathfrak{R}.$$

Daher geht Gleichung [1] über in

$$]' \qquad f = \int_{(m)}^{x}\int_{(n)}^{y} f_{mn} + \sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{y^\nu}{\nu!}\int_{(m)}^{x} f_{m\nu} + \sum_{\mu=0}^{m-1}\frac{x^\mu}{\mu!} f_\mu . \text{ [14]}$$

ierin gilt $\exists^* f^{(\nu')}$ in $\mathfrak{R}$ bei $0 \leqq \nu' \leqq n$ wegen $(2)_{1,2}$ [15] nach Satz 1*, nd das Entsprechende für das iterierte Integral wegen $(2)_4$ [16], für die ste Summe wegen $[2]_a$, also auch für die zuletztstehende Summe. Durch insetzen von m verschiedenen Werten für x und Auflösen nach den f_μ lgt daraus, daß

$$]_b \qquad \exists^* f_\mu^{(\nu')} \text{ in } \mathfrak{R} \text{ für } 0 \leqq \nu' \leqq n .$$

Nunmehr ist aus $[2]'$ ersichtlich, daß

$$\exists^* f^{(\mu',\nu')} \text{ in } \mathfrak{R} \text{ für } 0 \leqq \mu' \leqq m,\ 0 \leqq \nu' \leqq n ,$$

a das Entsprechende wegen $(2)_4$ [16]) sowie $[2]_{a,b}$ bei jedem Gliede der chten Seite stattfindet.

Beweis des Satzes 3*. Wegen $(3)_8$ gilt in $\mathfrak{R}$ die Beziehung

$$3] \qquad f_{mn} = \int_{(r)}^{z} f_{mnr} + \sum_{\varrho=0}^{r-1}\frac{z^\varrho}{\varrho!} f_{mn\varrho}(x, y, 0, u, v, \ldots).$$

egen $(3)_{7,8}$ ist hierin nach Satz 1* die Ableitung $f_{mn}^{(\varrho)}(x, y, z, u, v, \ldots)$, so erst recht

$$3]_a \qquad f_{mn\varrho}(x, y, 0, u, v, \ldots) = f_{mn\varrho} \text{ stetig in } \mathfrak{R}.$$

Daher geht Gleichung [2] über in

$$3]' \qquad f_m = \int_{(n)}^{y}\int_{(r)}^{z} f_{mnr} + \sum_{\varrho=0}^{r-1}\frac{z^\varrho}{\varrho!}\int_{(n)}^{y} f_{mn\varrho} + \sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{y^\nu}{\nu!} f_{m\nu} . \text{ [14]}$$

ierin gilt $\exists^* f_m^{(\varrho')}$ in $\mathfrak{R}$ bei $0 \leqq \varrho' \leqq r$ wegen $(3)_{5,6}$ nach Satz 1*, und as Entsprechende für das iterierte Integral wegen $(3)_8$ [16]), für die erste mme wegen $[3]_a$, also auch für die zuletztstehende Summe. Durch Eintzen von n Werten für y folgt daraus, daß

$$3]_b \qquad \exists^* f_{m\nu}^{(\varrho')} \text{ in } \mathfrak{R} \text{ für } 0 \leqq \varrho' \leqq r.$$

---

[14]) In den Koeffizientenfunktionen $f_\mu, f_{m\nu}, f_{mn\varrho}, \ldots$ ist zu setzen $x = 0$ bzw. $= 0$, bzw. $z = 0$ bzw. . . . .

[15]) Man beachte die dyadisch von hinten erfolgende Aufteilung der Voraustzungen.

[16]) Nebst der daraus folgenden Vertauschbarkeit von 2, 3, ... Integrationsomplexen $\int_{\ldots}^{x}, \int_{\ldots}^{y}, \int_{\ldots}^{z}, \ldots$.

Daher geht Gleichung [1] über in

$$[3]'' \qquad f=\int_{(m)}^{x}\int_{(n)}^{y}\int_{(r)}^{z} f_{mnr}+\sum_{\varrho=0}^{r-1}\frac{z^{\varrho}}{\varrho!}\int_{(m)}^{x}\int_{(n)}^{y} f_{mn\varrho}+\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{y^{\nu}}{\nu!}\int_{(m)}^{x} f_{m\nu}+\sum_{\mu=0}^{m-1}\frac{x^{\mu}}{\mu!}f_{\mu}.$$

Hierin gilt $\exists^* f^{(\nu',\varrho')}$ in $\mathfrak{R}$ bei $0\leqq\nu'\leqq n,\ 0\leqq\varrho'\leqq r$ wegen $(3)_{1-4}$ nach Satz 2^*, und das Entsprechende für das dreifach iterierte Integr wegen $(3)_8$ [16]), für die erste Summe wegen $[3]_a$, für die zweite Sumn wegen $[3]_b$, also auch für die zuletztstehende Summe. Durch Einsetz von m Werten für x folgt daraus, daß

$$[3]_c \qquad \exists^* f_{\mu}^{(\nu',\varrho')} \text{ in } \mathfrak{R} \text{ für } 0\leqq\nu'\leqq n,\ 0\leqq\varrho'\leqq r.$$

Nunmehr ist aus $[3]''$ ersichtlich, daß

$$\exists^* f^{(\mu',\nu',\varrho')} \text{ in } \mathfrak{R} \text{ für } 0\leqq\mu'\leqq m,\ 0\leqq\nu'\leqq n,\ 0\leqq\varrho'\leqq r,$$

da das Entsprechende wegen $(3)_8$ [16]) sowie $[3]_{a,b,c}$ bei jedem Gliede d rechten Seite stattfindet.

Beweis des Satzes 4^*. Bei diesem beschränken wir uns auf d nach den vorausgegangenen drei Vorbildern ausreichende Andeutung d Beweisganges.

Wegen $(4)_{16}$ hat man zunächst in $\mathfrak{R}$ die Beziehung

$$[4] \qquad f_{mnr}=\int_{(s)}^{u} f_{mnrs}+\sum_{\sigma=0}^{s-1}\frac{u^{\sigma}}{\sigma!}f_{mnr\sigma}(x,y,z,0,v,\ldots),$$

und daraus, unter Überspringung zweier Zwischenstationen, die entsch dende Formel

$$[4]''' \qquad \begin{cases} f=\displaystyle\int_{(m)}^{x}\int_{(n)}^{y}\int_{(r)}^{z}\int_{(s)}^{u} f_{mnrs}+\sum_{\sigma=0}^{s-1}\frac{u^{\sigma}}{\sigma!}\int_{(m)}^{x}\int_{(n)}^{y}\int_{(r)}^{z} f_{mnr\sigma} \\ +\displaystyle\sum_{\varrho=0}^{r-1}\frac{z^{\varrho}}{\varrho!}\int_{(m)}^{x}\int_{(n)}^{y} f_{mn\varrho}+\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{y^{\nu}}{\nu!}\int_{(m)}^{x} f_{m\nu}+\sum_{\mu=0}^{m-1}\frac{x^{\mu}}{\mu!}f_{\mu}. \end{cases}$$ [14])

Hierin ist wegen $(4)_{15\ 16}$ nach Satz 1^*, angewandt auf f_{mnr}, wegen $(4)_{13}$ auf Grund von Satz 1^*, angewandt auf f_{mn}, wegen $(4)_{9-12}$ auf Grund v Satz 2^*, angewandt auf f_m, und wegen $(4)_{1-8}$ [15]) auf Grund von Satz 3 angewandt auf f, der Reihe nach

$$[4]_a \qquad f_{mnr\sigma}(x,y,z,0,v,\ldots)=f_{mnr\sigma} \text{ stetig in } \mathfrak{R},$$

$$[4]_b \qquad \exists^* f_{mn\varrho}^{(\sigma')} \text{ in } \mathfrak{R} \text{ für } 0\leqq\sigma'\leqq s,$$

$$[4]_c \qquad \exists^* f_{m\nu}^{(\varrho',\sigma')} \text{ in } \mathfrak{R} \text{ für } 0\leqq\varrho'\leqq r,\ 0\leqq\sigma'\leqq s,$$

$$[4]_d \qquad \exists^* f_{\mu}^{(\nu',\varrho',\sigma')} \text{ in } \mathfrak{R} \text{ für } 0\leqq\nu'\leqq n,\ 0\leqq\varrho'\leqq r,\ 0\leqq\sigma'\leqq s.$$

Und nunmehr ist aus $[4]'''$ ersichtlich, daß

$\exists^* f^{(\mu', \nu', \varrho', \sigma')}$ in $\mathfrak{R}$ für $0 \leqq \mu' \leqq m$, $0 \leqq \nu' \leqq n$, $0 \leqq \varrho' \leqq r$, $0 \leqq \sigma' \leqq s$,

da das Entsprechende wegen $(4)_{16}$ [16]) sowie $[4]_{a-d}$ bei jedem Gliede der rechten Seite stattfindet.

Wie nunmehr der Beweis der folgenden Sätze und überhaupt der allgemeine Schluß von p Argumenten auf $p+1$ verläuft, bedarf keiner Erläuterung [17]).

Für den Beweis der Verschärfungen, dem wir uns zum Schlusse des vorliegenden Abschnitts zuwenden, wird, wie schon gesagt, das Beweisgerippe der Sätze 1^*, 2^*, 3^*, ... verwendet. Nur ist darin statt der Abkürzung $\mathfrak{A}$ des § 4 eine andere zu benutzen:

Abkürzung $\mathfrak{B}$. Das Zeichen $\exists$ mit einem aus den Buchstaben $x, y, z, u, v, \ldots$ ausgewählten, hochgestellten Index vor einer Funktion oder Ableitung soll bedeuten, daß dieselbe in einem anzugebenden Gebiete bei der angegebenen Reihenfolge der Differentiationen vorhanden, (falls mehr als eine Reihenfolge in Frage kommt) dem Werte nach unabhängig von derselben, und stetig ist *in Bezug auf die im Index angegebenen Variablen.*

Dabei verwenden wir noch der Übersichtlichkeit halber Nullen, um die Plätze von fehlenden Variablen aus der Reihe $x, y, z, u, v, \ldots$ auszufüllen. Alsdann hat man, wenn wir noch übereinkommen, unter den Variablen $x, y, z, u, v, \ldots$ gegebenenfalls die Argumente durch Überstreichung, die Parameter durch Nichtüberstreichung zu kennzeichnen, der Reihe nach:

Beweis der Verschärfung 1^*. Die Variablen sind hier $\bar{x}, y, z, u, v, \ldots$, sodaß die Voraussetzung lautet

$$(\bar{1})_{1,2} \qquad \exists^{0yzuv\cdots} f, \quad \exists^{xyzuv\cdots} f_m. \text{ [18])}$$

Daher liefert der mit $\exists^{0yzuv\cdots}$ statt Stetigkeit in allen Variablen durchgeführte Beweis des Satzes 1^* immer noch $[1]_a$. Also folgt die Behauptung.

Beweis der Verschärfung 2^*. Die Variablen sind jetzt $\bar{x}, \bar{y}, z, u, v, \ldots$, sodaß die Voraussetzung lautet

$$(\bar{2})_{1-4} \qquad \exists^{00zuv\cdots} f, \quad \exists^{0yzuv\cdots} f_n, \quad \exists^{x0zuv\cdots} f_m, \quad \exists^{xyzuv\cdots} f_{mn}. \text{ [18])}$$

Daher ergibt sich aus $(\bar{2})_{3,4}$ nach der auf f_m mit den Variablen $x\,\bar{y}\,z\,u\,v\ldots$

[17]) Im übrigen vergleiche man hierfür die nachstehende Tabelle zum Beweis der Verschärfungen, welche den Kern des Beweises der unverschärften Sätze nochmals hervorhebt.

[18]) Die letzte Voraussetzung ist also gegen früher unverändert und identisch mit $(1)_2$ bzw. $(2)_4$.

angewandten Verschärfung 1^* wieder $[2]_a$, ferner aus $(\bar{2})_{1,2}$ nach der auf f mit den Variablen $0\,\bar{y}\,z\,u\,v\,\ldots$ [19]) angewandten Verschärfung 1^* die Beziehung $\exists^{0yzuv\ldots} f^{(\nu')}$, und daraus wieder $[2]_b$. Also folgt die Behauptung.

Beweis der Verschärfung 3^*. Die Variablen sind jetzt $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, $u, v, \ldots$, sodaß die Voraussetzung lautet

$$(\bar{3})_{1-8} \quad \begin{cases} \exists^{000uv\ldots} f, \quad \exists^{00zuv\ldots} f_r, \quad \exists^{0y0uv\ldots} f_n, \quad \exists^{0yzuv\ldots} f_{nr}, \\ \exists^{x00uv\ldots} f_m, \quad \exists^{x0zuv\ldots} f_{mr}, \quad \exists^{xy0uv\ldots} f_{mn}, \quad \text{und } (3)_8. \end{cases}$$

Die weiteren Schlüsse gehen aus folgender Tabelle hervor, in welche der Vollständigkeit halber auch der vorige Beweis aufgenommen ist.

Beweis der Verschärfung 4^*. Derselbe ist ebenfalls in unserer Tabelle enthalten.

Und wie wie nunmehr die Beweiskette weiterläuft, liegt auf der Hand.

Tabelle zum Beweis der Verschärfungen. [a])

	Die Verschärfung Nr.	wird angewandt auf die Funktion	mit den Variablen	und liefert die Eigenschaft	für die Funktion	also auch für	d. i. Formel
Beweis der Versch. 2^*.	1^*	f_m	$x\,\bar{y}\,z\,u\,v\,\ldots$ [b])	$\exists^{xyzuv\ldots}$	$f_m^{(\nu)}$	$f_{m\nu}$	$[2]_a$
	1^*	f	$0\,\bar{y}\,z\,u\,v\,\ldots$	$\exists^{0yzuv\ldots}$	$f^{(\nu')}$	$f_\mu^{(\nu')}$	$[2]_b$
Beweis der Versch. 3^*.	1^*	f_{mn}	$x\,y\,\bar{z}\,u\,v\,\ldots$ [b])	$\exists^{xyzuv\ldots}$	$f_{mn}^{(\varrho)}$	$f_{mn\varrho}$	$[3]_a$
	1^*	f_m	$x\,0\,\bar{z}\,u\,v\,\ldots$	$\exists^{x0zuv\ldots}$	$f_m^{(\varrho')}$	$f_{m\nu}^{(\varrho')}$	$[3]_b$
	2^*	f	$0\,\bar{y}\,\bar{z}\,u\,v\,\ldots$	$\exists^{0yzuv\ldots}$	$f^{(\nu',\varrho')}$	$f_\mu^{(\nu',\varrho')}$	$[3]_c$
Beweis der Verschärfung 4^*.	1^*	f_{mnr}	$x\,y\,z\,\bar{u}\,v\,\ldots$ [b])	$\exists^{xyzuv\ldots}$	$f_{mnr}^{(\sigma)}$	$f_{mnr\sigma}$	$[4]_a$
	1^*	f_{mn}	$x\,y\,0\,\bar{u}\,v\,\ldots$	$\exists^{xy0uv\ldots}$	$f_{mn}^{(\sigma')}$	$f_{mn\varrho}^{(\sigma')}$	$[4]_b$
	2^*	f_m	$x\,0\,\bar{z}\,\bar{u}\,v\,\ldots$	$\exists^{x0zuv\ldots}$	$f_m^{(\varrho',\sigma')}$	$f_{m\nu}^{(\varrho',\sigma')}$	$[4]_c$
	3^*	f	$0\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{u}\,v\,\ldots$	$\exists^{0yzuv\ldots}$	$f^{(\nu',\varrho',\sigma')}$	$f_\mu^{(\nu',\varrho',\sigma')}$	$[4]_d$

Bemerkungen.

[a]) Die dabei benutzten Voraussetzungen sind dieselben wie in den Sätzen 1^*, 2^*, 3^*, ... an der entsprechenden Stelle [15]).

[b]) Das Argument y bzw. z bzw. u bzw. ... ist hinterher $= 0$ zu setzen.

[19]) D. h. (um es ausdrücklich zu sagen) bei jedem zulässigen x mit den Variablen $\bar{y}\,z\,u\,v\,\ldots$!

II.

Parabolische Interpolation und Schmiegung bei Funktionen zweier Argumente.

Es sei zunächst eine Funktion *eines Argumentes* gegeben, welche $f(x)$ heißen und den in der Einleitung formulierten Voraussetzungen genügen soll.

Was man dann bei k im Intervall (a, A) gegebenen Abszissen $x_1, \ldots, x_k$ unter der *einfachen Interpolation* von $f(x)$ in diesen Punkten zu verstehen hat, ist bekannt und durch die Lagrangesche Interpolationsformel mit Restglied erledigt.

Als *Schmiegung* bezeichnen wir die Approximation von $f(x)$ durch ein Polynom, das für ein in (a, A) gegebenes $x = x_1$ mit $f(x)$ in der 0-ten, 1-ten, ..., $(m-1)$-ten Ableitung übereinstimmt, d. h. also durch den $(m-1)$-ten Abschnitt der zu $x = x_1$ gehörigen Taylorentwicklung unserer Funktion.

Statt Schmiegung und einfacher Interpolation betrachten wir hier sogleich die, jene beiden umfassende (hier so genannte) *„Schmieg"-Interpolation*, welche von Ch. Hermite[2]) näher betrachtet worden ist, und wobei zu den im Intervall (a, A) gegebenen Interpolationsabszissen $x_1, \ldots, x_k$ ganzzahlige Vielfachheiten $r_1, \ldots, r_k$ gehören,

$$r_1 + \ldots + r_k = m$$

gesetzt ist, und das Interpolationspolynom $P(x) = P_I f(x)$ [1]) vom Grade $< m$ den m Bedingungen

$$P^{(\varrho)}(x_\varkappa) = f^{(\varrho)}(x_\varkappa) \quad \text{für} \quad 0 \leqq \varrho < r_\varkappa; \quad \varkappa = 1, \ldots, k \tag{1}$$

zu genügen hat, durch welche es eindeutig bestimmt ist.

Es kann nämlich $P(x)$ (dessen genaue Form wir für spätere Zwecke brauchen) angesetzt werden in der Gestalt

$$P(x) = \sum_{\lambda=1}^{k} [(x-x_1)^{r_1} \ldots (x-x_k)^{r_k}]^* \cdot \sum_{\alpha=0}^{r_\lambda - 1} \frac{c_{\lambda,\alpha}}{\alpha!} (x-x_\lambda)^\alpha,$$

wobei der Stern bedeuten soll, daß im λ-ten Produkt $\Pi_\lambda(x)$ der λ-te Faktor $(x-x_\lambda)^{r_\lambda}$ fehlt. Dann ist für das Bestehen der Gleichungen (1) in Punkte $x_\varkappa$ notwendig und hinreichend, daß

$$\Pi_\varkappa(x_\varkappa)\, c_{\varkappa,\varrho} + \binom{\varrho}{1} \Pi'_\varkappa(x_\varkappa)\, c_{\varkappa,\varrho-1} + \ldots + \binom{\varrho}{\varrho} \Pi_\varkappa^{(\varrho)}(x_\varkappa)\, c_{\varkappa,0} = f^{(\varrho)}(x_\varkappa)$$

$$\text{für } \varrho = 0, 1, \ldots, r_\varkappa - 1.$$

---

[1]) Durch die Indizes I, II und später auch III bezeichne ich die Interpolation nach x bzw. y bzw. z.

[2]) Sur la formule d'interpolation de Lagrange [Journ. f. d. Math. 84 (1878), 70–79 = Œuvres III, 432–443].

Diese Gleichungen ergeben wegen $\Pi_\varkappa(x_\varkappa) \neq 0$ der Reihe nach $c_{\varkappa,0}, c_{\varkappa,1}, \ldots, c_{\varkappa,r_\varkappa-1}$ linear ausgedrückt durch $f(x_\varkappa), f'(x_\varkappa), \ldots, f^{(r_\varkappa-1)}(x_\varkappa)$ mit Koeffizienten, die nur von den Konstanten $x_1, \ldots, x_k, r_1, \ldots, r_k$ des Interpolationsverfahrens abhängen, so daß unser $P(x)$ übergeht in

$$(2)_a \qquad P_I f(x) = \sum_{\varkappa=1}^{k} \sum_{\varrho=0}^{r_\varkappa-1} f^{(\varrho)}(x_\varkappa)\, p_{\varkappa,\varrho}(x),$$

wobei die $p_{\varkappa,\varrho}$ Polynome vom Grade $< m$ sind, die ebenfalls von $f(x)$ nicht abhängen, sondern nur von den Interpolationskonstanten.

Hat man analog eine Funktion $g(y)$ an den Stellen $y_\lambda (\lambda = 1, \ldots, l)$ jeweils s_λ-fach zu interpolieren, so wird entsprechend das Interpolationspolynom

$$(2)_b \qquad P_{II}\, g(y) = \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\sigma=1}^{s_\lambda-1} g(y_\lambda)\, q_{\lambda,\sigma}(y),$$

(wobei die $q_{\lambda,\sigma}$ Polynome vom Grade $< s_1 + \ldots + s_l$ sind), welche Formel wir für später notieren.

Nunmehr lautet die eindimensionale Interpolationsformel, deren Übertragung auf Funktionen von zwei (und mehr) Argumenten unser Ziel ist, bei Interpolation nach x folgendermaßen:

$$(3) \qquad f(x) - P_I f(x) = \frac{(x-x_1)^{r_1} \ldots (x-x_k)^{r_k}}{m!} f^{(m)}(\xi),\ ^{3})$$

wo ξ den Ungleichungen

$$(3)' \qquad \min(x_1, \ldots, x_k, x) < \xi < \max(x_1, \ldots, x_k, x)$$

genügt (außer wenn alle Zahlen einander gleich sind, d. h. $k = 1$ und $x = x_1$ ist, in welchem Falle ξ beliebig bleibt).

Es seien nunmehr im Falle *zweier Argumente* im Intervall (a, A) die Interpolationsabszissen $x_1, \ldots, x_k$ und im Intervall (b, B) die Inter-

---

[3]) Im Spezialfall $r_1 = \ldots = r_k = 1$ der Lagrangeschen Interpolationsformel findet sich diese Restform, wie ich hier nebenbei bemerken möchte, bei (unnötigerweise) stetig vorausgesetztem $f^{(k)}(x)$, zuerst bewiesen bei R. Hoppe in dessen vergessenem, aber wegen seiner starken Eigenart auch heute noch lesenswerten Lehrbuch der Differentialrechnung und Reihentheorie [Berlin 1865], vgl. S. 162–164 den § 241. Erst 13 und mehr Jahre später sind die hierzu gewöhnlich zitierten (übrigens ebenfalls unnötigerweise $f^{(k)}(x)$ stetig voraussetzenden) Beweise von A. Genocchi und H. A. Schwarz veröffentlicht [vgl. die franz. Enzyklopädie, II, Teil 1, S. 306, Fußnote [228])].

Im obigen allgemeinen Falle schreibt die französische Enzyklopädie a. a. O. das Restglied (4) Hermite zu, auf Grund der unter [2]) gen. Arbeit. Doch findet sich daselbst nur eine Integralform des Restes (vgl. Abschnitt III, § 2 der vorl. Mitteilung), aus welcher die obige höchstens unter gewissen (unnötigen) Beschränkungen für $f^{(m)}(x)$ folgt, welche durch den zu Grunde gelegten Integralbegriff bedingt sind.

lationsordinaten $y_1, \ldots, y_l$ gegeben, samt Vielfachheiten $r_1, \ldots, r_k$ bzw. $\ldots, s_l$, sowie

$$r_1 + \ldots + r_k = m, \quad s_1 + \ldots + s_l = n \tag{4}$$

setzt. Ferner sei $f(x, y)$ eine gegebene Funktion der beiden Argumente, elche die in der Einleitung formulierten Voraussetzungen erfüllt.

Wie wir im Falle eines Argumentes gesehen haben, läuft die allgeeine Interpolation auf die Ersetzung der unendlich vielen Funktionswerte rch endlich viele (evtl. abteilungsweise einander unendlich nahe) hinaus. iese Ersetzung kann man nun bei zwei Argumenten entweder nur hinchtlich eines einzigen Argumentes oder aber zugleich hinsichtlich beider rgumente vornehmen, was wir je nachdem als *partielle* oder *totale Interolation* bezeichnen wollen. Alsdann gilt Folgendes:

A) Der *partielle Interpolationsausdruck* bei Interpolation nach x allein, h. in x ein Polynom vom Grade $< m$, also

$$p(x, y) = P_I f(x, y) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \varphi_\mu(y)\, x^\mu, \text{ [1]}$$

t (wie aus obigen eindimensionalen Betrachtungen leicht folgt) eindeutig stgelegt dadurch, daß

$$p^{(\varrho, 0)}(x_\varkappa, y) = f^{(\varrho, 0)}(x_\varkappa, y) \quad \text{für} \quad 0 \leqq \varrho < r_\varkappa;\ \varkappa = 1, \ldots, k$$

in soll, identisch in y. Entsprechendes gilt für den anderen partiellen nterpolationsausdruck $P_{II} f(x, y)$ [1]), und es ergibt sich auf Grund von $3)_a$ und $(3)_b$

$$P_I f(x, y) = \sum_{\varkappa=1}^{k} \sum_{\varrho=0}^{r_\varkappa - 1} f^{(\varrho, 0)}(x_\varkappa, y)\, p_{\varkappa, \varrho}(x), \tag{5}_a$$

$$P_{II} f(x, y) = \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\sigma=0}^{s_\lambda - 1} f^{(0, \sigma)}(x, y_\lambda)\, q_{\lambda, \sigma}(y). \tag{5}_b$$

Die Operationen P_I, P_{II} sind dabei, wie aus $(5)_a$ bzw. $(5)_b$ hervorgeht, *istributiv* [4]) bezüglich der ihnen unterworfenen Funktionen.

B) Über das *totale Interpolationspolynom* sagt der folgende Satz les nachher Benötigte aus:

Satz 1. *Wenn k verschiedene Zahlen $x_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, k$) im Interall (a, A) und l verschiedene Zahlen y_λ ($\lambda = 1, 2, \ldots, l$) im Intervall $, B)$ gegeben sind, deren jeder eine natürliche Zahl $r_\varkappa$ bzw. s_λ zugehört, nd wenn m, n durch (4) erklärt wird, so gibt es ein und nur ein*

[4]) Dies soll hier nur bedeuten, daß

$$P_I[f_1 + f_2] = P_I f_1 + P_I f_2$$

ird, und entsprechendes für P_{II} gilt.

Polynom $P(x, y) = P_{I,II} f(x, y)$ [1]) *vom Grade* $< m$ *in* x, $< n$ *in* y, *das totale Interpolationspolynom der Funktion* $f(x, y)$, *der Art, daß die Beziehungen*

$$(6) \quad P^{(\varrho,\sigma)}(x_\varkappa, y_\lambda) = f^{(\varrho,\sigma)}(x_\varkappa, y_\lambda) \quad \text{für} \quad \begin{cases} 0 \leqq \varrho < r_\varkappa; & \varkappa = 1, \ldots, k, \\ 0 \leqq \sigma < s_\lambda; & \lambda = 1, \ldots, l \end{cases}$$

bestehen, und zwar wird

$$(6)' \qquad P_{I,II} f(x, y) = P_I[P_{II} f(x, y)] = P_{II}[P_I f(x, y)]$$

sich ergeben.

Die beiden vorstehenden Arten von Interpolationsausdrücken kann man nun zur Approximation von $f(x, y)$ verwenden. Man erhält dann, wenn noch

$$(7)_a \qquad R_I f(x, y) = \frac{(x - x_1)^{r_1} \ldots (x - x_k)^{r_k}}{m!} f^{(m,0)}(\xi, y),$$

$$(7)_b \qquad R_{II} f(x, y) = \frac{(y - y_1)^{s_1} \ldots (y - y_l)^{s_l}}{n!} f^{(0,n)}(x, \eta),$$

$$(7)_c \quad R_{I,II} f(x, y) = \frac{(x - x_1)^{r_1} \ldots (x - x_k)^{r_k}}{m!} \frac{(y - y_1)^{s_1} \ldots (y - y_l)^{s_l}}{n!} f^{(m,n)}(\xi, \eta)$$

gesetzt wird, worin ξ bzw. η den Ungleichungen

$$(7)' \qquad \min(x_1, \ldots, x_k, x) \leqq \xi \leqq \max(x_1, \ldots, x_k, x),$$

$$(7)'' \qquad \min(y_1, \ldots, y_l, y) \leqq \eta \leqq \max(y_1, \ldots, y_l, y)$$

genügt, zwei Interpolationsformeln, über welche die beiden folgenden Sätze Auskunft geben:

Satz 2. *Unter den Voraussetzungen des Satzes* 1 *gilt die Formel der totalen Interpolation*

$$(8) \quad f(x, y) = P_{I,II} f(x, y) + R_I f(x, y) + R_{II} f(x, y) - R_{I,II} f(x, y). \text{ [5])}$$

Satz 3. *Unter denselben Voraussetzungen gilt ferner die Formel der gemischten Interpolation*

$$(9) \quad f(x, y) = P_I f(x, y) + P_{II} f(x, y) - P_{I,II} f(x, y) + R_{I,II} f(x, y).$$

Um die gemischte Formel (10), die weniger nahe liegt als die totale Formel (9), und an die man bisher nicht gedacht zu haben scheint, dem Leser etwas zu bringen, sei darauf hingewiesen, daß deren primitivster Spezialfall, wobei nach x und y nur in je einem Werte x_1 bzw. y_1 einfach interpoliert wird, bereits bekannt ist. Nämlich die Formel

$$f(x, y) = f(x_1, y) + f(x, y_1) - f(x_1, y_1) + (x - x_1)(y - y_1) f^{(1,1)}(\xi, \eta),$$

[5]) In die drei Bestandteile des Restes geht dabei, wie wir ausdrücklich hervorheben wollen, gemäß $(7)_a, _b, _c$ überall dasselbe ξ bzw. η ein. Wozu man übrigens den Zusatz am Schlusse des Abschnitts vergleichen möge.

welche in den Beweisen für die Vertauschbarkeit der beiden Differentiationen in $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ eine Hauptrolle spielt.

Ferner hebe ich noch bei der totalen Interpolationsformel (9) die folgenden Spezialfälle hervor[6]):

1. Für $k=1$, $l=1$, also, nach (4), $r_1=m$, $s_1=n$ entsteht die zweidimensionale (nicht, wie üblich, dreieckig, d. h. durch die Indexungleichung $\mu+\nu\leqq N-1$, sondern) rechteckig begrenzte *Taylorsche Formel*

$$(10)\qquad f(x,y)=\sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{\nu=0}^{n-1} f^{(\mu,\nu)}(x_1,y_1)\frac{(x-x_1)^\mu}{\mu!}\,\frac{(y-y_1)^\nu}{\nu!}+R,\text{ [7])}$$

mit der Übertragung der Lagrangeschen Form des Restgliedes, welche lautet

$$(10)'\qquad R=\frac{(x-x_1)^m}{m!}f^{(m,0)}(\xi,y)+\frac{(y-y_1)^n}{n!}f^{(0,n)}(x,\eta)-\frac{(x-x_1)^m}{m!}\,\frac{(y-y_1)^n}{n!}f^{(m,n)}(\xi,\eta),$$

wobei ξ zwischen x_1 und x, sowie η zwischen y_1 und y (Grenzen einschl.) liegt.

2. Für $r_1=\ldots=r_k=1$, $s_1=\ldots=s_l=1$, also, nach (4), $m=k$, $n=l$ entsteht die zweidimensionale *Lagrangesche Interpolationsformel*

$$(11)\qquad f(x,y)=\sum_{\varkappa=1}^{k}\sum_{\lambda=1}^{l} f(x_\varkappa,y_\lambda)\frac{(x-x_1)\ldots(x-x_k)^*(y-y_1)\ldots(y-y_l)^*}{(x_\varkappa-x_1)\ldots(x_\varkappa-x_k)^*(y_\lambda-y_1)\ldots(y_\lambda-y_l)^*}+R,$$

wobei der Stern wieder bedeutet, daß im $\varkappa$-ten bzw. λ-ten Produkt der $\varkappa$-te bzw. λ-te Faktor wegzubleiben hat, und die Werte der drei Restglieder aus $(7)_{a-c}$ leicht durch Spezialisierung ersichtlich sind. —

Nach diesen Vorbereitungen und Auseinandersetzungen kommen wir nunmehr zu den Beweisen unserer drei Sätze.

Beweis des Satzes 1. a) *Einzigkeit* des Interpolationspolynoms $P(x,y)$. Nach den getroffenen Festsetzungen über die Grade von P in x bzw. y wird

$$P(x,y)=\sum_{\mu=0}^{m-1}P_\mu(y)\,x^\mu,$$

---

[6]) Die natürlich ebensowohl bei der gemischten Formel (10) möglich und von Interesse sind.

[7]) Wegen Literaturangaben hierzu sei auf die Wiedergabe meines Vortrages auf der Danziger Tagung (welcher die Resultate der vorliegenden Mitteilung und ihrer Fortsetzungen zum Gegenstand hatte) verwiesen: Über Funktionen reeller Argumente [Jahresber. d. D. Math. Ver., demnächst].

wo die $P_\mu(y)$ Polynome vom Grade $\leqq n=1$ sind. Sind nun zwei Interpolationspolynome $P_1(x,y)$ und $P_2(x,y)$ vorgelegt, so hat deren Differenz $P=P_1-P_2$ dieselbe Gestalt, und es ist, da P_1 wie P_2 den Beziehungen (6) genügt,

$$(\bar{6}) \qquad P^{(\varrho,\sigma)}(x_\varkappa, y_\lambda)=0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} 0 \leqq \varrho < r_\varkappa; \ \varkappa=1,2,\ldots,k, \\ 0 \leqq \sigma < s_\lambda; \ \lambda=1,2,\ldots,l. \end{cases}$$

Betrachten wir nun die n Funktionen von x,

$$P^{(0,\sigma)}(x,y_\lambda)=\sum_{\mu=0}^{m-1} P_\mu^{(\sigma)}(y_\lambda)\,x^\mu \quad \text{für} \quad 0 \leqq \sigma < s_\lambda; \ \lambda=1,2,\ldots,l,$$

so verschwindet jede derselben wegen $(\bar{6})$ mindestens m-mal, also identisch. Es ist also bei jedem unserer μ

$$P_\mu^{(\sigma)}(y_\lambda)=0 \ \text{für} \ 0 \leqq \sigma < s_\lambda; \ \lambda=1,2,\ldots,l,$$

d. h. jede der Koeffizientenfunktionen $P_\mu(y)$ verschwindet mindestens n-mal, also identisch. Folglich verschwindet auch die Differenz $P(x,y)$ unserer beiden Interpolationspolynome identisch.

b) *Existenz* des Interpolationspolynoms. Wir setzen

$$(12) \qquad P_{I,II}f(x,y)=P_I[P_{II}f(x,y)],$$

wobei die Bedeutung der rechten Seite aus $(5)_{a,b}$ ersichtlich ist. Dann sind die Beziehungen (6) erfüllt. Denn auf Grund der definierenden Eigenschaft (1) von P_I und nach $(5)_b$ wird

$$P^{(\varrho,0)}(x_\varkappa,y)=D_x^{(\varrho)}\{P_{II}f(x,y)\}_{x=x_\varkappa}=P_{II}f^{(\varrho,0)}(x_\varkappa,y),$$

und hieraus folgt auf Grund der zu (1) analogen Relation in y die Behauptung (6).

c) Auf dieselbe Weise ergibt sich, daß auch die Funktion $P_{II}[P_If(x,y)]$ eine Lösung der Interpolationsaufgabe (6) ist. Wegen der unter a) nachgewiesenen Einzigkeit derselben muß also

$$P_I[P_{II}f(x,y)]=P_{II}[P_If(x,y)]$$

sein, was man auch direkt sehen kann, wenn man die beiden Seiten dieser Gleichung nach $(5)_{a,b}$ herstellt. Deren gemeinsamer Wert, also $P_{I,II}f(x,y)$, ist nämlich

$$=\sum_{\varkappa=1}^{k}\sum_{\lambda=1}^{l}\sum_{\varrho=0}^{r_\varkappa-1}\sum_{\sigma=0}^{s_\lambda-1} f^{(\varrho,\sigma)}(x_\varkappa,y_\lambda)\,p_{\varkappa,\varrho}(x)\,q_{\lambda,\sigma}(y).$$

Womit die Beziehung $(6)'$ vollends bewiesen ist.

Beweis der Sätze 2 und 3. Wir stellen uns sogleich auf einen etwas allgemeineren Standpunkt, indem wir ausgehen von zwei beliebigen Formen der Restglieder in den beiden partiellen Interpolationsformeln

$$f(x, y) - P_I f(x, y) = R_I f(x, y),$$
$$f(x, y) - P_{II} f(x, y) = R_{II} f(x, y).$$

bei muß, um den Satz 2 sicherzustellen, die Operation R_I noch die aus d) rvorgehende Eigenschaft der *Distributivität*[4]) haben.

a) Zunächst ergibt sich bei der gemischten Interpolationsformel (9), gen (12) und der oben nach $(5)_{a, b}$ festgestellten Distributivität der eration P_I,

$$f - P_I f - P_{II} f + P_{I,II} f = [f - P_{II} f] - P_I[f - P_{II} f]$$
$$= R_I[f - P_{II} f] = R_I R_{II} f.$$

b) Bei der totalen Interpolationsformel (8) ergibt sich, mit Rücksicht f das Vorstehende,

$$f - P_{I,II} f = \{f - P_I f\} + \{f - P_{II} f\} - \{f - P_I f - P_{II} f + P_{I,II} f\}$$
$$= R_I f + R_{II} f - R_I R_{II} f.$$

c) Diese Art zu rechnen, die bei Zugrundelegung von exakten (etwa tegral-) Formen der Restglieder R_I, R_{II} vollkommen angemessen und sreichend ist, besitzt jedoch bei Zugrundelegung von Zwischenwertformen r Restglieder R_I, R_{II} einen Nachteil. Dieselben enthalten nämlich Para- eter ξ bzw. η (vgl. unten unter e)), welche sich im Allgemeinen mit der der stoperation unterliegenden Funktion ändern. Wenn daher z. B. unter b) e Operation R_I einmal auf f, das andere Mal auf $f - P_{II} f$ angewandt wird, ist keinerlei Sicherheit gegeben, daß beidemal in das Resultat das- lbe ξ hereinkommt. Da es aber erwünscht ist, daß, und interessant, nn man in solchen Fällen mit einem einzigen Werte jedes Parameters skommen kann (wie es in der Behauptung des Satzes 2 der Fall ist, l. [5])), so geben wir nachstehend noch:

d) Eine zweite Restberechnung bei der Formel (8). Man hat nämlich gen (12)

$$f - P_{I,II} f = f - P_I f + P_I f - P_I P_{II} f$$
$$= f - P_I f + P_I[f - P_{II} f]$$
$$= f - P_I f + P_I R_{II} f$$

as bei additiver und subtraktiver Hinzufügung dieses (auch hinsichtlich nes eventuellen Parameters) selben $R_{II} f$

$$= f - R_{II} f - P_I f + P_I R_{II} f + R_{II} f$$
$$= [f - R_{II} f] - P_I[f - R_{II} f] + R_{II} f$$
$$= R_I[f - R_{II} f] + R_{II} f$$
$$= R_I f + R_{II} f - R_I R_{II} f,$$

tzteres, falls die Operation R_I distributiv[4]) ist.

e) Nunmehr ergibt sich der Satz 3 auf der Stelle aus a), indem ma darin die Restformen $(7)_a$ und $(7)_b$ einsetzt. Um entsprechend den Satz zu erhalten, hat man d) anzuwenden und dazu nur nachzuweisen, daß di Operation R_I distributiv[4]) ist, was Formel $(7)_a$ unmittelbar zeigt.

Hiermit sind die Sätze 2 und 3 vollständig bewiesen. —

Zusatz bei der Korrektur. Wie ich anschließend an meine Danziger Vortrag (vgl. [7])) durch Herrn A. Walther erfuhr, hat kürzlic Herr J. F. Steffensen[8]) ebenfalls Resultate in Richtung des obigen Satzes veröffentlicht. In der Tat stimmt seine Formel (46) a. a. O.[8]), S. 3 äußerlich mit unserer Formel (8) überein; jedoch weist Verf. selbst aus drücklich darauf hin „that [auf Grund seines Beweises] ξ and η in th third term [unserem $R_{I,II}$] of (46) need not have the same values as i the two first terms [unseren R_I, R_{II}]".

Inzwischen habe ich bemerkt, daß drei Jahre früher bereits Her S. Narumi[9]) zu demselben Resultat gelangt ist. Er äußert sich allerding nicht darüber, ob seine Parameter α, β (entsprechend unseren ξ, η) in de drei Gliedern R_I, R_{II}, $R_{I,II}$ überall dieselben sind; jedoch läßt sein Beweis[10]) der (ebenso wie der Steffensensche) gemäß Punkt b) unseres Textes ver läuft, indem die drei Bestandteile des Restes separat behandelt werden keinerlei Schluß in jener Hinsicht zu.

Unser Restglied der totalen Interpolationsformel (8), in dem di Parameter ξ, η überall *dieselben* Werte haben, wird daher, wie man sieht durch Vorstehendes nicht berührt.

III.

Weitere Sätze für zwei und mehr Argumente.

§ 1. Andere Formen der Restglieder in den Sätzen 3 und 2 des vorigen Abschnitts, denen wir uns zunächst zuwenden wollen, ergeben sich, wenn wir in den Teilen a), b), d) des letzten Beweises andere zulässige Restformen R_I, R_{II} einsetzen.

§ 2. Im allgemeinen Falle der gemischten bzw. totalen Interpolation erhält man so die Übertragung der von Hermite[1]) für den Rest der Formel (3) des Abschn. II angegebenen Integralform (wi

---

[8]) Interpolation-formulas with one and more variables [Skand. Aktuarietidskr 1923, 18—43].

[9]) Some formulas in the theory of interpolation of many independent variable [Tôhoku math. Journ. 18 (1920), 309—321].

[10]) Man vgl. a. a. O. [9]), S. 312 unten bis S. 313, Zeile 8.

[1]) Vgl. Abschn. II, a. a. O. [2]), den Schluß des Post-Scriptum.

merieren die Interpolationsstellen $x_\varkappa$ und die Integrationsvariablen $\vartheta_\varkappa$ ngekehrt wie Hermite):

$$\frac{\Phi_m(x)}{\Gamma(r_1)\dots\Gamma(r_k)}\int_{(k)}\Theta\cdot g^{(m)}(u)\cdot d\vartheta_1\dots d\vartheta_k = R[x_\varkappa, r_\varkappa, k, g(*); x],$$

bei gesetzt ist

$$m = r_1+\dots+r_k,\quad \Phi_m(x) = (x-x_1)^{r_1}\dots(x-x_k)^{r_k},$$

$$\int_{(k)} = \int_0^1\int_0^{\vartheta_1}\dots\int_0^{\vartheta_{k-1}},$$

$$u = x_1(1-\vartheta_1)+x_2(\vartheta_1-\vartheta_2)+\dots+x_k(\vartheta_{k-1}-\vartheta_k)+x\vartheta_k,$$

$$\Theta = (1-\vartheta_1)^{r_1-1}(\vartheta_1-\vartheta_2)^{r_2-1}\dots(\vartheta_{k-1}-\vartheta_k)^{r_k-1}.$$

an hat zum genannten Zweck auszugehen von

$$R_I f(x,y) = R[x_\varkappa, r_\varkappa, k, f(*,y); x],$$
$$R_{II} f(x,y) = R[y_\lambda, s_\lambda, l, f(x,*); y],$$

nd erhält, wenn $f^{(m,n)}(x,y)$ als stetig im Rechteck $\mathfrak{R}$ vorausgesetzt wird, n leicht verständlicher Bezeichnung) den noch fehlenden Restbestandteil

$$_I[R_{II}f(x,y)]$$

$$= \frac{\Phi_m(x)}{\Gamma(r_1)\dots\Gamma(r_k)}\,\frac{\Psi_n(y)}{\Gamma(s_1)\dots\Gamma(s_l)}\int_{(k-1)}\int_{(l-1)}\int_0^{\vartheta_{k-1}}\int_0^{\eta_{l-1}}\Theta\cdot H\cdot f^{(m,n)}(u,v)\cdot\Pi d\vartheta_\varkappa\cdot\Pi d\eta_\lambda.$$

Die Voraussetzung der Stetigkeit von $f^{(m,n)}$ ist dabei notwendig für en Beweis, damit man den in $R_{II}f(x,y)$ enthaltenen Ausdruck

$$\int_0^1\int_0^{\eta_2}\dots\int_0^{\eta_{l-1}} H\cdot f^{(0,n)}(u,v)\,d\eta_1\,d\eta_2\dots d\eta_l$$

zwecks Überlagerung von R_I) unter den Integralzeichen m-mal nach u fferentiieren darf. Man kann sich von ihr nachträglich teilweise befreien, dem man von zulässigen Funktionen aus durch Approximation zu all-emeineren Funktionen übergeht. Man kommt so[2]) nach zwei Schritten n den in jedem inneren Teilrechteck von $\mathfrak{R}$ beschränkten (also flächen-aft summierbaren) Ableitungen $f^{(m,n)}$. Jedoch werden, wenn man noch eiter gehen will, die Beweise zu subtil für den vorliegenden Zweck, und ber die durch den benutzten Integralbegriff gezogenen Grenzen kommt an doch nicht hinaus.

§ 3. Im Spezialfall der rechteckig begrenzten Taylorschen ormel (vgl. Abschn. II, (10)) mit $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ ergibt sich in der

[2]) Die i. T. gewählte Gestalt von $R_I[R_{II}f(x,y)]$ ist bereits diesem Zweck an epaßt.

oben genannten Weise die Übertragung des Schlömilchschen Restgliedes indem man ausgeht von

$$R_I f(x,y) = \frac{(x-\xi)^{m-1}}{(m-1)!}\,\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{\varphi'(\xi)}\,f^{(m,0)}(\xi,y) \quad \text{mit} \quad 0 \leqq \frac{\xi}{x} \leqq 1,^{3})$$

$$R_{II} f(x,y) = \frac{(y-\eta)^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{\psi(y)-\psi(0)}{\psi'(\eta)}\,f^{(0,n)}(x,\eta) \quad \text{mit} \quad 0 \leqq \frac{\eta}{y} \leqq 1,^{3})$$

wobei φ, ψ zwei Funktionen sein sollen, die von 0 bis x bzw. y (Grenze einschl.) stetig sind und dazwischen eine nicht verschwindende, endliche Ableitung besitzen. Man erhält dann

$$R_I[R_{II} f(x,y)] = \frac{(x-\xi)^{m-1}}{(m-1)!}\,\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{\varphi'(\xi)}\,\frac{(y-\eta)^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{\psi(y)-\psi(0)}{\psi'(\eta)}\,f^{(m,n)}(\xi,\eta$$

Hieraus ergibt sich die Übertragung der Restform von Schlömilch Roche durch die spezielle Wahl

$$\varphi(\xi) = -(x-\xi)^p \quad (p>0), \qquad \psi(\eta) = -(y-\eta)^q \quad (q>0),$$

wodurch man z. B. erhält

$$R_I[R_{II} f(x,y)] = \frac{(x-\xi)^{m-p}}{(m-1)!}\,\frac{x^p}{p}\,\frac{(y-\eta)^{n-q}}{(n-1)!}\,\frac{y^q}{q}\,f^{(m,n)}(\xi,\eta),$$

und noch spezieller entsteht für $p=m$, $q=n$ die Übertragung der Lagrangeschen Restform (Abschn. II, (10)′) für $p=1$, $q=1$ dagegen die Übertragung der Cauchyschen Restform, bei welcher

$$R_I f(x,y) = \frac{(x-\xi)^{m-1}}{(m-1)!}\,x\,f^{(m,0)}(\xi,y),$$

$$R_{II} f(x,y) = \frac{(y-\eta)^{n-1}}{(n-1)!}\,y\,f^{(0,n)}(x,\eta),$$

$$R_I[R_{II} f(x,y)] = \frac{(x-\xi)^{m-1}}{(m-1)!}\,x\,\frac{(y-\eta)^{n-1}}{(n-1)}\,y\,f^{(m,n)}(\xi,\eta),$$

und der Gesamtrest, wie immer,

$$R^* = R_I f(x,y) + R_{II} f(x,y) - R_I[R_{II} f(x,y)]$$

wird. Diese Restform ist weitaus die wertvollste unter den vorstehend neu angegebenen und wird in einem späteren Abschnitt eine wichtige Rolle spielen.

Endlich erhält man, wenn man R_I, R_{II} in der bekannten Integralform annimmt (vgl. in der nächsten Formel rechts die beiden ersten Glieder

---

[3]) Für $x=0$ ($y=0$) soll dies heißen $\xi=0$ ($\eta=0$).

und mit Herrn W. Burnside etwa $f^{(m,n)}(x,y)$ als stetig im Rechteck $\mathfrak{R}$ voraussetzt, die von diesem[4]) angegebene Integralform des Restes, nämlich

$$R = \int_0^x \frac{(x-u)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m,0)}(u,y)\,du + \int_0^y \frac{(y-v)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(0,n)}(x,v)\,dv$$

$$- \int_0^x \int_0^y \frac{(x-u)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{(y-v)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(m,n)}(u,v)\,du\,dv.$$

Über die Voraussetzung der Stetigkeit von $f^{(m,n)}$ gelten dabei, mutatis mutandis, wieder die Bemerkungen am Schlusse des § 2.

§ 4. Einige Bemerkungen über das Verhältnis der verschiedenerlei Restformen zueinander seien an dieser Stelle eingeschoben:

Es pflegte bereits bei der eindimensionalen Taylorschen Formel ($\mu \leqq m-1$) als ein nicht zu unterschätzender Vorteil betrachtet zu werden, der bisher besonders bei dem Zwischenwertsatz[5]) ($m=1$) und auch noch bei dem Fall $m=2$ zur Wirkung kam, daß die Zwischenwertformen des Restgliedes *nur die Existenz* der m-ten Ableitung verlangen, während derselben die Integralform noch *Beschränkungen* auferlegt, die durch benutzten Integralbegriff gegeben sind.

In noch höherem Maße gilt dies in zwei (und mehr) Dimensionen, wo man überdies zur Durchführung der Beweise bei den Integralformen der Restglieder noch stärkere Beschränkungen nötig hat, von denen man sich allerdings hinterher (nicht ohne Mühe) teilweise befreien kann (vgl. den Schluß des § 2). Es ist darum als ein theoretischer und ästhetischer Vorzug zu betrachten (wenn es auch wohl „praktisch" nicht allzusehr ins Gewicht fällt), daß unsere Zwischenwert-Restformen nur die Existenz von $f^{(m,n)}$ (in dem in der Einleitung festgestellten Umfange) benötigen, ohne daß dadurch eine Komplikation der Beweise entstünde.

Ganz besonders gilt dies gegenüber der Integral- *und Zwischenwert*form des Restgliedes der dreieckig ($\mu+\nu \leqq N-1$) abgebrochenen Taylorschen Formel, bei der man (in der Standardform des Satzes) die Stetigkeit aller N-ten Ableitungen voraussetzen muß, damit $f(x,y)$ ein vollständiges Differential N-ter Ordnung besitzt.

§ 5. Allgemeine Interpolationsformeln bei mehr als zwei Argumenten, auf die wir zum Schluß noch einen Blick werfen wollen,

[4]) An expression for the remainder in the expansion of a function in a series of positive integral powers of the variables [Mess. Math. **46** (1917), 172–175].
Die Arbeit enthält übrigens ein kleines Versehen [das auch in das Ref. Fortschr. d. Math. **46** (1916–18), 357 übergegangen ist], indem Verf. in der Taylorschen Partialsumme das Glied $f(0,0)$ zweimal aufgeführt hat, einmal explizit, und noch einmal in der Doppelsumme.

[5]) Diese Bezeichnung ist zutreffender als das übliche „Mittelwertsatz".

nebst den zugehörigen Restgliedern erfordern zu ihrer Herleitung keinen neuen Gedanken. So hat man für drei Argumente bei

$$P_{I,II,III} f = P_I P_{II} P_{III} f,$$

analog den entsprechenden Teilen a) und d) des Beweises der Sätze 2 und 3 des vorigen Abschnitts

a)′ zum Beweise der gemischten Interpolationsformel die Beziehungen

$$f - P_I f - P_{II} f - P_{III} f + P_I P_{II} f + P_I P_{III} f + P_{II} P_{III} f - P_I P_{II} P_{III} f$$
$$= [f - P_{III} f] - P_I [f - P_{III} f] - P_{II} [f - P_{III} f] + P_I P_{II} [f - P_{III} f],$$

was nach a)

$$= R_I R_{II} [f - P_{III} f] = R_I R_{II} R_{III} f$$

wird. Ferner hat man

d)′ zum Beweise der totalen Interpolationsformel die Schlußkette

$$f - P_I P_{II} P_{III} f = f - P_I f + P_I f - P_I P_{II} P_{III} f$$
$$= f - P_I f + P_I [f - P_{II} P_{III} f],$$

was nach d)

$$= f - P_I f + P_I [R_{II} f + R_{III} f - R_{II} R_{III} f],$$

also bei additiver und subtraktiver Hinzufügung der in der eckigen Klammer enthaltenen Glieder

$$= \quad [f - R_{II} f - R_{III} f + R_{II} R_{III} f]$$
$$- P_I [f - R_{II} f - R_{III} f + R_{II} R_{III} f] + R_{II} f + R_{III} f - R_{II} R_{III} f$$
$$= R_I [f - R_{II} f - R_{III} f + R_{II} R_{III} f] + R_{II} f + R_{III} f - R_{II} R_{III} f$$
$$= R_I f + R_{II} f + R_{III} f - R_I R_{II} f - R_I R_{III} f - R_{II} R_{III} f + R_I R_{II} R_{III} f.$$

Nunmehr ergibt sich auf Grund von a)′ die Integralform des Restgliedes der dreidimensionalen Taylorschen Formel, welche sich bereits bei Herrn Burnside a. a. O.[4]) findet.

Ebenso ergibt sich zum Satz 2 des Abschn. II ohne Weiteres das Analogon

$$f(x, y, z) - P_{I,II,III} f(x, y, z) \text{ d. h. } f(x, y, z) - P_I P_{II} P_{III} f(x, y, z)$$
$$= [x]_m f^{(m,0,0)}(\xi, y, z) + [y]_n f^{(0,n,0)}(x, \eta, z) + [z]_p f^{(0,0,p)}(x, y, \zeta)$$
$$- [x]_m [y]_n f^{(m,n,0)}(\xi, \eta, z) - \text{zwei entspr. Glieder in } y, z \text{ und } z, x$$
$$+ [x]_m [y]_n [z]_p f^{(m,n,p)}(\xi, \eta, \zeta),$$

wobei zur Abkürzung

$$[x]_m = \frac{(x - x_1)^{r_1} \dots (x - x_k)^{r_k}}{m!}$$

gesetzt und $[y]_n$ sowie $[z]_p$ analog erklärt ist.

(Eingegangen am 11. September 1925.)

Bemerkung zu der Arbeit von V. Fock: Über eine Klasse von Integralgleichungen.

(Math. Zeitschr. 21 (1924) S. 161—173.)

Von

Gustav Doetsch in Stuttgart.

Die von V. Fock-Petrograd für die Volterrasche Integralgleichung zweiter Art

$$G(x) = F(x) + \int_0^x G(\xi) K(x-\xi)\, d\xi$$

(F und K bekannt, G gesucht) gegebene Lösung

$$G(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{xz} \frac{f(z)}{1-k(z)}\, dz$$

mit

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-zx} F(x)\, dx, \qquad k(z) = \int_0^\infty e^{-zx} K(x)\, dx$$

(Hauptsatz I, S. 166), ebenso wie die Lösung der entsprechenden Gleichung erster Art (Hauptsatz II, S. 167) sind nichts Anderes als die einfachsten Spezialfälle (sogar mit engeren Voraussetzungen hinsichtlich der vorkommenden Funktionen) der von mir vor einigen Jahren beschriebenen Theorie einer allgemeinen Klasse von Integralgleichungen[1]). Da die Laplace-Transformation

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-st} \Phi(t)\, dt \equiv L(\Phi)$$

die Integralkopplung („Faltung")

$$\Phi_1 * \Phi_2 = \int_0^t \Phi_1(\tau)\, \Phi_2(t-\tau)\, d\tau$$

[1]) Doetsch, Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus. Math. Ann. 89 (1923) S. 192—207. Im folgenden als M zitiert.

in die einfache Multiplikation verwandelt:

$$L(\Phi_1 * \Phi_2) = L(\Phi_1) \cdot L(\Phi_2),$$

so kann man Integralgleichungen, in denen nur solche Faltungsintegrale (in beliebiger Anzahl und Kombination) vorkommen, durch die Laplace-Transformation in gewöhnliche algebraische Gleichungen verwandeln. (Die in M entwickelte Theorie ist übrigens umfassender, sie bezieht sich auf noch allgemeinere Typen und vor allem auch auf Integrodifferentialgleichungen.) Genau dies aber wendet Fock auf den speziellen Fall der linearen Integralgleichung an, wobei er natürlich eine lineare Gleichung für die Laplace-Transformierte von G erhält:

$$L(G) = \frac{L(F)}{1 - L(K)} = \frac{f}{1-k}.$$

Durch Anwendung der altbekannten Umkehr der Laplace-Transformation

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{ts} \varphi(s)\, ds \equiv L^{-1}(\varphi)$$

erhält man zu $\frac{f}{1-k}$ die von Fock angeschriebene Funktion G. Daß diese Funktion tatsächlich eine Lösung ist, folgt, wie in M auf S. 201 angegeben, aus dem Satz von Lerch, daß alle zu demselben φ gehörigen Φ sich nur durch Nullfunktionen unterscheiden, d. h. solche Funktionen, die bis auf eine Nullmenge identisch 0 sind. Der Focksche etwas umständliche Beweis, der sich auf drei Hilfssätze stützt, ist daher überflüssig.

Die Lösung gewisser *linearer* Integralgleichungen vermittels der Laplace-Transformation kommt jedoch in der Literatur noch früher vor, was auch mir bei der Abfassung von M entgangen war und inzwischen von L. Neder, der es mir jetzt freundlichst mitgeteilt hat, bemerkt worden ist: H. Bateman[2]) weist in seinem Bericht über die Integralgleichungstheorie vom Jahre 1910 (ohne nähere Ausführung) darauf hin, daß die Laplace-Transformation die lineare Integralgleichung vom Faltungstypus in eine lineare *algebraische* Relation überführt, und G. Herglotz[3]) hat sogar schon 1907, allerdings unter Einschränkungen (daß der Kern überall außerhalb des Intervalls 0 ... 1 verschwindet und innerhalb von

---

[2]) Bateman, Report on the history and present state of the theory of integral equations. Report of the eightieth meeting of the british association for the advancement of science (Sheffield 1910). London 1911, S. 345–424 [S. 393].

[3]) Herglotz, Über die Integralgleichungen der Elektronentheorie. Math. Ann. 65 (1908) S. 87–106.

eschränkter Schwankung ist), die Laplace-Transformation (in etwas anerer Gestalt) dazu benutzt, um die Integralgleichungen

$$K(t) = \varphi(t) - \int_{t-1}^{t} K(t-s)\varphi(s)\,ds \quad \text{und} \quad K(t) = \varphi(t) - \int_{0}^{t} K(t-s)\varphi(s)\,ds$$

u lösen, wobei er übrigens Ausdrücke erhält, die man als Borelsche Summationen der von P. Hertz[4]) in Form von Reihen gefundenen Lösungen desselben Problems ansehen kann.

Noch eine Bemerkung zu der Fockschen Arbeit: Die S. 167 ohne genauere Nennung der notwendigen Einschränkungen angegebene Methode, die Integralgleichung

$$\int_{0}^{x} G(\xi) K(x-\xi)\,d\xi = F(x)$$

(G ist die gesuchte Funktion) auf die spezielle Gleichung

$$\int_{0}^{x} H(\xi) K(x-\xi)\,d\xi = x$$

(H gesucht) zurückzuführen, wobei sich

$$G(x) = \frac{d^2}{dx^2} \int_{0}^{x} F(\xi) H(x-\xi)\,d\xi$$

ergibt, stellt sich bei Anwendung der Sätze aus M einfach so dar: In der Faltungssymbolik lautet die ursprüngliche Gleichung

$$G * K = F,$$

die Hilfsgleichung

$$H * K = x.$$

Die ihnen vermöge der Laplace-Transformation entsprechenden Gleichungen sind

$$g \cdot k = f,$$

bzw.

$$h \cdot k = \frac{1}{z^2}.$$

Es ist also

$$g = z^2 f h.$$

Setzen wir $F * H = A$, so folgt aus dem Satze III in M (S. 198): Es ist $F = \frac{d^2 A}{dx^2}$, wenn $A(0) = A'(0) = 0$ ist. Diese Bedingungen für A lassen

[4]) Hertz, Die Bewegung eines Elektrons unter dem Einflusse einer stets gleich gerichteten Kraft. Ebenda S. 1–86 [S. 70, 77, 81].

sich leicht in solche für F umsetzen. Zieht man den anderwärts[5]) bewiesenen Satz über die Differentiation eines Faltungsintegrals heran, so sieht man, daß, selbst wenn H sich als uneigentlich integrabel herausgestellt hat, es genügt, daß F in einem Intervall $0 \leqq x \leqq X$ differenzierbar, $F'(x)$ eigentlich integrabel und $F(0) = 0$ ist.

Man erkennt auf diesem Wege leicht, daß es noch einfacher ist, die Hilfsgleichung $H * K = 1$ einzuführen $\left(\text{weil dann } G = \frac{d}{dx} F * H \text{ ist}\right)$ und daß jede andere Hilfsgleichung $H * K = x^n$ ebenfalls brauchbar ist.

---

[5]) Doetsch, Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung. II. Mitteilung. Math. Zeitschr. 22 (1925) S. 293—306 [S. 294].

(Eingegangen am 2. 8. 1925.)

Nachtrag zu der Arbeit: Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen. III.

(Math. Zeitschr. 24, S. 377—395.)

Von

H. Weyl in Zürich.

Die Überlegungen, welche in § 3 des IV. Kapitels zur Bestimmung ler primitiven Charakeristiken aller halb-einfachen Gruppen führen, be- ürfen in einem Punkte noch der Ergänzung. Auf S. 384, Zeile 14 heißt s: „Jede alternierende Fourierreihe ist eine lineare Kombination aus den Elementarsummen", und bei der Erklärung der Elementarsummen wird on der mit Φ bezeichneten Linearform ohne weiteres angenommen, daß ie *höher* steht als alle ihre äquivalenten (außer Φ selber). Von dem öchsten Glied $e(\Phi)$ einer alternierenden Fourierreihe kann man aber zu- ächst nur behaupten, daß

$\Phi \geqq \Phi S$ ist für alle Substitutionen S und

1] $\Phi > \Phi S$ für alle *ungeraden* S, insbesondere für die Erzeugenden S_a.

n den Sonderfällen der Kapitel I—III ergab sich daraus zufolge der Konstitution der Gruppe (S), ohne daß es ausdrücklich erwähnt zu werden rauchte, die Ungleichung $\Phi > \Phi S$ für alle von der Identität verschie- enen Substitutionen S. Allgemein kommt man, dem Gedankengang auf . 384—387 folgend, so zum Ziel.

Die ganzzahlige Linearform Φ mit den Koeffizienten l genüge der Be- ingung [1]. $(S)_l$ sei die Gruppe derjenigen (geraden) Substitutionen S, ür welche $\Phi S = \Phi$ ist, h_l ihre Ordnung. In der zugehörigen Elementar- umme $\xi(l)$, Formel (13), fallen dann — gemäß der Zerlegung von (S) n rechtsseitige Nebengruppen nach $(S)_l$ — die Glieder zu je h_l zusammen; icht die Fourierreihe $\xi(l)$, sondern

$$\frac{1}{h_l}\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = \xi^*(l_1, l_2, \ldots, l_n)$$

hat lauter ganzzahlige Koeffizienten $= \pm 1$. Infolgedessen kommt an Stelle von (18):

$$[2] \quad \int_0^1 \dots \int_0^1 \xi^*(l_1, l_2, \dots, l_n)\, \bar{\xi}^*(l_1, l_2, \dots, l_n)\, d\varphi_1 \dots d\varphi_n = \frac{\text{Ordn. von } (S)}{h_l}.$$

Die Überlegung des ersten Absatzes auf S. 386 führt zu der entscheidenden Gleichung

$$\Delta = \xi^*(r_1, r_2, \dots, r_n),$$

und infolgedessen ist nach [2]:

$$\Omega = \frac{\text{Ordn. von } (S)}{h_r}.$$

Spaltet man $\Phi^0 = r_1\varphi_1 + \dots + r_n\varphi_n$, die halbe Summe der positiven Wurzeln, ab, $\Phi = \Psi + \Phi^0$, so gilt $\Psi S \leqq \Psi$, $\Phi^0 S \leqq \Phi^0$ für alle Substitutionen S der Gruppe (S); darum kann nur dann $\Phi S = \Phi$ sein, wenn in beiden vorangehenden Ungleichungen das Gleichheitszeichen zutrifft. Mit andern Worten: $(S)_l$ ist eine Untergruppe von $(S)_r$; bezeichnen wir die Substitutionen von $(S)_r$ allgemein mit S_0, so besteht nämlich $(S)_l$ aus denjenigen Substitutionen S_0, welche Ψ invariant lassen. h_l ist ein Teiler von h_r, h_r/h_l eine ganze positive Zahl. Die Substitutionen S_0 sind dadurch gekennzeichnet, daß sie alle positiven Wurzeln wieder in positive Wurzeln überführen.

Für die Charakteristik χ einer irreduziblen Darstellung oder, besser noch, für die zugehörige Funktion $\xi = \Delta \cdot \chi$ erhält man analog zu (21):

$$\xi = c \cdot \xi^*(l) + c' \cdot \xi^*(l') + \dots$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $c, c', \dots$. Bildet man danach den Mittelwert

$$\frac{1}{\Omega} \int_0^1 \dots \int_0^1 \xi\, \bar{\xi}\, d\varphi_1 \dots d\varphi_n,$$

welcher nach Schur den Wert 1 besitzt, so kommt

$$1 = c^2 \frac{h_r}{h_l} + c'^2 \frac{h_r}{h_{l'}} + \dots.$$

Daraus folgt nach den schon gewonnenen Resultaten

$$c = 1, \; c' = 0, \dots \quad \text{und} \quad h_l = h_r, \; (S)_l = (S)_r.$$

Es ist also

$$[3] \qquad \chi = \frac{\xi^*(l)}{\Delta} = \frac{\xi(l_1, l_2, \dots, l_n)}{\xi(r_1, r_2, \dots, r_n)},$$

und das höchste Gewicht $\Psi = m_1\varphi_1 + \dots + m_n\varphi_n$ der irreduziblen Darstellung ist invariant gegenüber allen Substitutionen S_0.

Die Hauptformel [3] ist damit unabhängig von der angefochtenen Voraussetzung sichergestellt. Aber nun ergibt sich nachträglich auch leicht, daß $(S)_r$ nur aus der Identität bestehen kann. Der Zusatz sagt nämlich aus, daß das höchste Gewicht einer jeden irreduziblen Darstellung und damit überhaupt einer jeden Darstellung invariant ist gegenüber den Substitutionen S_0. Derartige einschränkende *Gleichungen* für die vorkommenden höchsten Gewichte bestehen aber nicht. In der adjungierten Darstellung $\tilde{\mathfrak{a}}$, deren Substrat der r-dimensionale Vektorraum der inf. Gruppe selber ist, und denjenigen Gruppen, nach denen sich in diesem Raum die 2-dimensionalen, 3-dimensionalen, ..., $\frac{r-n}{2}$-dimensionalen Vektoren unter dem Einfluß von $\tilde{\mathfrak{a}}$ transformieren, haben wir $\frac{r-n}{2}$ Darstellungen vor uns, deren höchste Gewichte die Teilsummen der absteigend geordneten positiven Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ sind:

$$\varrho_1, \quad \varrho_1+\varrho_2, \quad \varrho_1+\varrho_2+\varrho_3, \quad \ldots, \quad \Sigma^+\varrho.$$

Eine Substitution S_0 muß sie alle (nicht nur die letzte $2\Phi^0$) in sich überführen. Es gehen daher alle Wurzeln durch S_0 in sich über, S_0 ist die Identität. Damit ist nachträglich bewiesen, daß das höchste Glied $e(\Phi)$ einer alternierenden Fourierreihe durch alle von der Identität verschiedenen Substitutionen S in niedriger stehende übergeht.

Ich benutze die Gelegenheit zur Richtigstellung einiger Druckfehler in Teil II und III (Bd. 24).

S. 331, Z. 5 lies: Zahlen, statt: Zahl.

S. 332, Z. 18 lies: Gleichung (3) ohne Änderung von t, statt: Gleichung (3) von t.

S. 339, Z. 2 lies: $\Delta\bar{\Delta}$, statt: Δ^2.

S. 361, Z. 13 lies: $1\cdot2\cdot3$, statt: 3 (im Nenner des zweiten Summengliedes).

S. 362, Z. 10 v. u. lies: § 1, statt: § 2.

(Eingegangen am 10. September 1925.)

Nachtrag zu meiner Arbeit: Über geodätische rhombische Netze auf krummen Flächen[1]).

Von

Oskar Perron in München.

Nachdem ich durch neuere Untersuchungen des Herrn Voß und Gespräche mit ihm dazu geführt war, mich in der oben erwähnten sowie in einer vorher in den Sitzungsberichten der bayr. Akademie veröffentlichten Arbeit mit geodätischen rhombischen Netzen zu befassen, habe ich nachträglich erfahren, daß Herr Voß sich bereits in einer älteren, in Vergessenheit geratenen Arbeit mit der gleichen Frage beschäftigt hat[2]). In § 5 dieser Arbeit ist bereits der Satz bewiesen, daß geodätische rhombische Netze nur auf Liouvilleschen Flächen möglich sind, und daß zu einem gegebenen Liouvilleschen Linienelement auch wirklich unendlich viele Netze gehören. Für das Ergebnis des § 3 meiner Arbeit gebührt hiernach Herrn Voß die Priorität. Einen weiteren Beweis des gleichen Satzes hat auch Herr Lagally gegeben[3]).

[1]) Band 24 dieser Zeitschrift.

[2]) A. Voß, Über diejenigen Flächen, welche durch zwei Scharen von Kurven konstanter geodätischer Krümmung in infinitesimale Rhomben zerlegt werden. Sitzungsberichte der bayr. Akad. der Wissenschaften, math.-phys. Klasse 36 (1906), S. 247—296.

[3]) M. Lagally, Über die Verbiegung geodätischer Netze. Ebenda Jahrgang 1910.

(Eingegangen am 23. November 1925.)